ГЕНЕРАЦИЯ ИМПУЛЬСА ЭЙРИ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Золотарев Д.А.
Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. Нерух А.Г.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. Высшей математики,
тел. (057) 702-13-72)
e-mail: hm@kture.kharkov.ua

An Airy pulse in time domain is derived for the first time using Green's function for the paraxial equation. The pulse is generated by a source located at some point. Temporal dependence of this source is given by the Airy function that conditioned excitation the Airy pulse. This pulse is decelerating and its velocity trends to zero at infinite distance from the source.

Впервые получена функция Эйри при параксиальном приближении с помощью функции Грина и с учетом источника излучения. Если источник имеет ориентацию вдоль оси x, $\mathbf{j} = (j(t,z),0,0)$, то генерироваться будет только x-вый компонент электрического поля

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \mu \frac{\partial j}{\partial t} \tag{1}$$

Предполагая решение в виде $E = F(t,z)e^{-ikz}$ приведем уравнение (1) к параксиальному приближению считая, что справедливо приближение медленно меняющейся в продольном направлении огибающей $\left|F''_{zz}\right| \ll \left|2ikF'_z\right|$,

$$2ik\frac{\partial}{\partial z}F + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F + k^2 F = -\mu_0\mu\frac{\partial j}{\partial t}e^{ikz} \tag{2}$$

Функция Грина этого уравнения имеет вид

$$G(t,z) = \theta(z) v \left(\frac{k}{z}\right)^{1/2} \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{i}{2}k(z+\frac{v^2t^2}{z})} \tag{3}$$

Полученная функция Грина позволяет найти излучение, генерируемое заданным током

$$\overline{j}_{\tau'} = \delta(z-z_0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t_0 + i\alpha)^3/3} e^{i\omega t} d\omega \tag{4}$$

Такой спектр источника соответствует току, задаваемому функцией Эйри, Рис. 1.

$$\overline{j}_{\tau} = \delta(z-z_0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t_0 + i\alpha)^3/3} e^{i\omega t} d\omega = \delta(z-z_0)\mathrm{Ai}\left(\frac{t}{t_0}\right)e^{\alpha t/t_0} \tag{5}$$

В итоге поле, генерируемое током (4), будет описываться формулой

$$E(t,z) = -\mu_0\mu\theta(z-z_0)e^{-i\frac{k}{2}(z-z_0)}\mathrm{Ai}\left(t/t_0 + 2i\alpha\frac{z_0-z}{2kv^2t_0^2} - \left(\frac{z_0-z}{2kv^2t_0^2}\right)^2\right)\times$$
$$\times e^{i\left[\frac{z_0-z}{2kv^2t_0^2} - i\alpha\right]\frac{t}{t_0} - i\frac{2}{3}\left[\frac{z_0-z}{2kv^2t_0^2}\right]^3 - 2\alpha\left[\frac{z_0-z}{2kv^2t_0^2}\right]^2 + i\alpha^2\frac{z_0-z}{2kv^2t_0^2}} \tag{6}$$

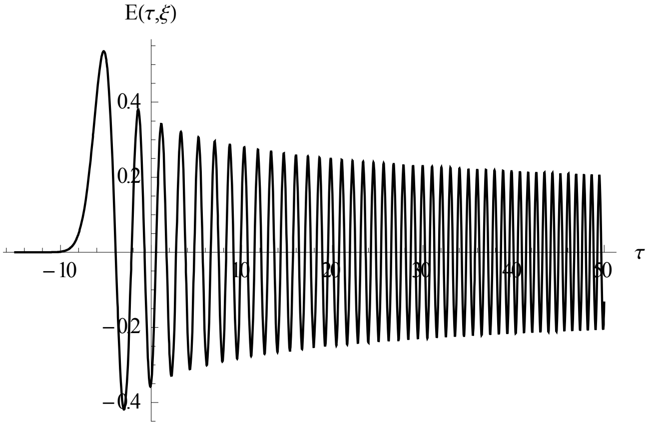
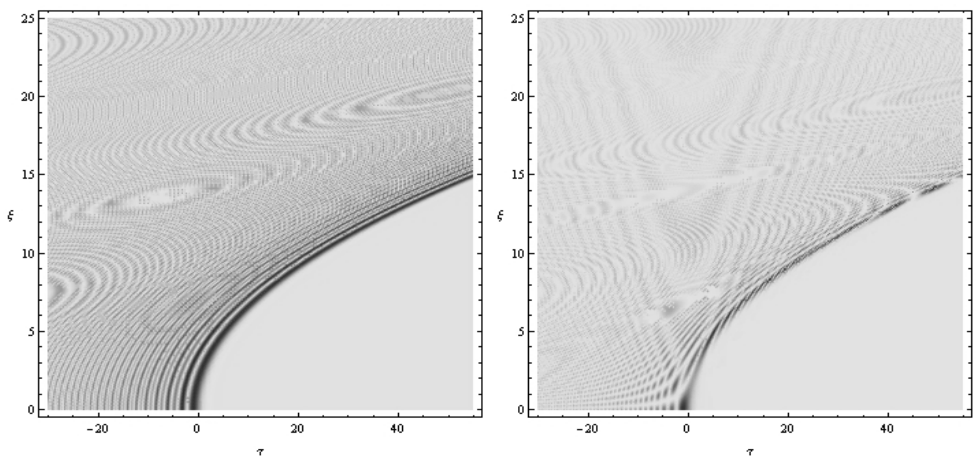


Рис. 1 – Функция Эйри

Таким образом, ток с производной по времени в виде функции Эйри создает импульс Эйри. Этот импульс распространяется замедляясь

$$z_t^{'} = \frac{2k^2 v^4 t_0^4}{z} \tag{7}$$

полностью останавливаясь на бесконечности. Траектория импульса в координатах пространство-время показана на Рис. 2.



а б

Рис. 2 – Траектория импульса в координатах пространство-время: а – для огибающей, б – для полного импульса

Вид огибающей импульса Эйри приведен на Рис. 2а, влияние осциллирующего множителя показано на Рис. 2б. Как видно, это множитель очень существенно меняет пространственное распределение поля импульса. Импульс движется хвостом вперед, искажаясь при этом.