УДК 68...

Е. П. ПУТЯТИН, д-р техн. наук, *В. П. МАШТАЛИР, А. А. МАЙСТРЕНКО*

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА НОРМАЛИЗАЦИИ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЛОСКОСТИ

Алгоритмы анализа последовательности изображений широко используются при динамическом управлении технологическими процессами в промышленности, слежении за облаками в метеорологии, управлении высокоскоростным движением на транспорте и т. д. [1]. Одной из первостепенных проблем является нормализация изображений, т. е. компенсация найденных параметров их геометрических преобразований. Преобразования возникают вследствие изменения в пространстве местоположения и ориентации объекта или датчика видеоинформации. Сокращая множество координатных описаний изображений, нормализация часто позволяет сводить задачу распознавания к сравнению с эталоном, дает возможность оценивать трехмерные преобразования объектов.

Здесь описывается разработка алгоритма определения параметров проективных преобразований изображений.

Пусть (G, X, T) — группа преобразований; G — группа вещественных матриц третьего порядка, $G \in GL(3, R)$; X — линейное пространство; $X \subset R_2$, $T: G \times X \to X$ — действие группы G на X, $T(g, T(h, x)) = T(gh, x)$, $\forall g, h \in G$, $\forall x \in X$, $T(e, x) = x$, $\forall x \in X$; e — единица группы G.

Определим в некоторой ограниченной области $D \subset R_2$ функцию распределения яркостей $B(x) \in C_1(D)$, $x \in R_2$. Далее функцию $B(x)$ будем называть изображением. Пусть $M = \{B(x)\}$ — множество изображений. Действие группы G в D порождает разбиение множества M на классы m_α такие, что $\bigcup_\alpha m_\alpha = M$, $m_\alpha \cap m_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$; $m_\alpha = m_\beta$ при $\alpha = \beta$. Изображение $B_0(x)$ в некоторый начальный дискретный момент времени будем считать эталоном $B_0(x) = B(T(e, x))$. Необходимо найти параметры группы G, связывающие изображение $B_n(x)$ в момент времени n

с эталоном $B_0(x)$ при условии их принадлежности одному классу эквивалентности m_α. Очевидно, что $B_n(x)=B_0(T(h, x))$, где $h=g_1g_2 \dots g_n$ и $B_i(x)=B_{i-1}(T(g_i, x))$, $i=\overline{1, n}$.

Предположим, что группа G действует эффективно, т. е. $T(g, x)=x$ только при $g=e$ и преобразования не выводят изображения из области D. Пусть, кроме того, $|a_{ij}-\delta_{ij}|<\varepsilon$ (1) для некоторого малого $\varepsilon>0$, где $A=(a_{ij})\in G$ — матрица преобразования; $i, j=\overline{1,3}$; δ_{ij} — символ Кронекера. При таком предположении можно считать, что преобразования объекта в R_3 почти всегда не меняют класса эквивалентности его изображений в R_2.

Введем в области D систему координат xoy, тогда действие группы $G\in GL(3, R)$ определяется следующим образом:

$$x = uz^{-1}|_{z=1}, \quad y = vz^{-1}|_{z=1}, \quad (\hat{u}, \hat{v}, \hat{z}) = (a_{ij})(u, v, z)^{\mathsf{T}},$$

где $(a_{ij})\in GL(3, R)$ и $\det(a_{ij})\neq 0$. Ограничившись проективными преобразованиями, получаем

$$B_1(x, y) = B_0(T_1(g, x), T_2(g, x)) = B_0\left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},\right.$$

$$\left.\frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}\right). \qquad (2)$$

Отметим, что при геометрических преобразованиях (2) значения яркости изображения в точке (x, y) переносится в точку $(T_1(g, x), T_2(g, x))$. Тогда, учитывая ограничения (1) и то, что группа проективных преобразований является восьмипараметрической группой Ли (при этом коэффициент a_{33} несущественен и считается $a_{33}=1$) [2], получаем

$$B_1(x, y) - B_0(x, y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}\left(\frac{\partial T_1}{\partial a_{ij}}\bigg|_{g=e}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial a_{ij}}\bigg|_{g=e}\frac{\partial}{\partial y}\right)B_0(x,y),$$

$$(\beta_{ij}) = e - (a_{ij}), \qquad (3)$$

где e — единичная матрица третьего порядка. Выражения в круглых скобках являются инфинитеземальными операторами группы Ли, действующей на плоскости. Аналогичная связь существует между изображениями $B_i(x, y)$ и $B_{i-1}(x, y)$, $i=\overline{2,n}$.

Произведя необходимые вычисления, получаем следующие соотношения для любых точек x, y, принадлежащих области D:

$$B_1(x, y) - B_0(x, y) = (a_{11} - 1)\, x\, \frac{\partial B_0(x, y)}{\partial x} + a_{12}\, y\, \frac{\partial B_0(x, y)}{\partial x} +$$

$$+ a_{13}\frac{\partial B_0(x, y)}{\partial x} + a_{21}\, x\, \frac{\partial B_0(x, y)}{\partial y} + (a_{22} - 1)\, y\, \frac{\partial B_0(x, y)}{\partial y} +$$

$$+ a_{23}\frac{\partial B_0(x, y)}{\partial y} - a_{31}\left(x^2\frac{\partial B_0(x, y)}{\partial x} + xy\frac{\partial B_0(x\ y)}{\partial y}\right) - a_{32}\times$$
$$\times\left(xy\frac{\partial B_0(x, y)}{\partial x} + y^2\frac{\partial B_0(x, y)}{\partial y}\right). \qquad (4)$$

Учитывая цифровой способ представления изображений, получаем систему линейных уравнений с восемью неизвестными: $\Delta B = CP$ (5). Здесь ΔB — вектор размерностью $N^2\times 1$ разностей изображений в дискретных отсчетах в два последующих момента времени; N — количество дискретных отсчетов по осям $0x$ и $0y$; C — матрица коэффициентов размерностью $N^2\times 8$, соответствующих правой части выражения (4); P — вектор неизвестных коэффициентов размерностью 8×1.

Отметим, что соотношения (4) совпадают с линейной частью разложения функции $B_0(T_1(g, x), T_2(g, x))$ по степеням параметров проективной группы в окрестности тождественного преобразования.

Учитывая, кроме того, что на практике трудно определить связь с выражения (1) с возможностью найти точные значения коэффициентов преобразования (2) и то, что цифровая форма представления изображений может нарушать эффективность действия группы G [3], перепишем систему (5) в виде $\Delta B = CP + F(P)$, где $F(P)$ — вектор ошибок, зависящий от P. Будем искать оценку $\hat{P}$, минимизирующую ошибку

$$\varepsilon_M = \mathrm{tr}\,\{[\Delta B - C\hat{P}][\Delta B - C\hat{P}]^{\mathrm{T}}\}.$$

Здесь $\mathrm{tr}\,\{\cdot\}$ обозначает след матрицы.

В силу условия о невырожденности проективных преобразований псевдообратная матрица получения оценки $\hat{P}$ является матрицей обращения методом наименьших квадратов [4]. Тогда получаем

$$\hat{P} = C^{-}\Delta B,\ \varepsilon_M = \mathrm{tr}\,\{\Delta B\Delta B^{\mathrm{T}}(I - CC^{-})\},$$

где C^{-} — обобщенная обратная матрица; I — единичная матрица. При $N>8$ $C^{-} = (C^{\mathrm{T}}C)^{-1}C$, при $N<8$ $C^{-} = C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}$, при $N=8$ $C^{-} = C^{-1}$. В случае $CC^{-} = I$ получаем точное решение.

Рассмотрим пути понижения порядка системы (5) и ослабления ограничений (1). Выделим подмножество регулярных матриц третьего порядка $G_{\text{чед}}$. Для этого в дополнение к условию о невырожденности проективных преобразований потребуем, чтобы центроафинные преобразования не были вырождены $\left(\det\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix} \neq 0\right)$ и $a_{11}\neq 0$. Тогда, воспользовавшись разложением Гаусса $g = Z_{-}DZ_{+}$, где g — матрица третьего порядка; Z_{-} —

подгруппа нижнетреугольных матриц; D — подгруппа диагональных матриц; Z_+ — подгруппа верхнетреугольных матриц, получаем

$$B_1(x, y) = B_0(T_1', (T_2'(T_3'(g, x))), T_1''(T_2''(T_3''(g, y)))).$$

Здесь T_1', T_2', T_3', T_1'', T_2'', T_3'' описывают действия указанных выше подгрупп Z_-, D, Z_+, т. е.

$$B_1(x, y) = B'\left(\frac{x}{b_{31}x + b_{32}y + 1}, \frac{b_{21}x + y}{b_{31}x + b_{32}y + 1}\right);$$

$$B'(x, y) = B''(b_{11}b_{33}^{-1}x, b_{22}b_{33}^{-1}y); \tag{6}$$

$$B''(x, y) = B_0(x + b_{12}y + b_{13}, y \neq b_{23}), \tag{7}$$

где
$$\begin{aligned}
&b_{11} = a_{11}, && b_{12} = a_{12}a_{11}^{-1},\\
&b_{22} = a_{21}a_{11}^{-1}, && b_{22} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{11}^{-1},\\
&b_{31} = a_{33}a_{11}^{-1}, && b_{32} = (a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{-1},\\
&b_{13} = a_{13}a_{11}^{-1}, && b_{23} = (a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{-1},
\end{aligned} \tag{8}$$
$$b_{33} = 1 - a_{13}a_{31}a_{11}^{-1} - (a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})(a_{23}a_{11} - {} - a_{21}a_{13})a_{11}^{-1}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^{-1}.$$

Используя далее известные разложения треугольных матриц в однопараметрические подгруппы и комбинируя выражения (6) и (7), получаем

$$B_1(x, y) = B'\left(\frac{x}{c_{31}x + c_{32}y + 1}, \frac{y}{c_{31}x + c_{32}y + 1}\right); \tag{9}$$

$$B'(x, y) = B_0(c_{11}x + c_{12}y + c_{13}, c_{21}x + c_{22}y + c_{23}). \tag{10}$$

Здесь
$$\begin{aligned}
&c_{11} = b_{11}b_{33}^{-1}, && c_{22} = (b_{12}b_{21}b_{11} + b_{22})b_{33}^{-1},\\
&c_{12} = b_{11}b_{21}b_{33}^{-1}, && c_{23} = (b_{13}b_{21}b_{11} + b_{22}b_{23})b_{33}^{-1},\\
&c_{13} = b_{11}b_{13}b_{33}^{-1}, && c_{31} = b_{31} + b_{32}b_{21},\\
&c_{21} = b_{21}b_{11}b_{33}^{-1}, && c_{32} = b_{32}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, отстроившись от аффинных преобразований (10), вместо системы (5) с восемью неизвестными получаем систему с двумя неизвестными c_{31} и c_{32}. При этом происходит ослабление условий (1), так как известные методы нормализации аффинных преобразований не требуют близости преобразования к тождественному. Коэффициенты соотношения (2) определяются при помощи выражений (11) и (8).

Если использовать разложение Гаусса $g = Z_+DZ_-$, то, компенсировав преобразования (9), можно затем найти аффинитет (10).

В заключение отметим, что принадлежность последовательности изображений одному классу эквивалентности не нарушает общности рассмотрения, так как при переходе к другому классу необходимо лишь анализировать новое изображение $B_0(x)$.

Список литературы: 1. *Image* Sequence Analysis. Ed by T. S. Huang.— Springer. Verlag, N-Y., 1981. — 438 p. 2. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1940. — 396 с. 3. *Гороховатский В. А., Машталир В. П., Хитров Б. В.* Исследование влияния дискретизации и квантования на точность алгоритмов нормализации.— АСУ и приборы автоматики, 1983, вып. 65, с. 11—15. 4. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— 310 с.

Поступила в редколлегию 24.11.82.