УДК 510.62

Г. А. ТИМОФЕЕВА, канд. техн. наук, *С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО*

О КОНЕЧНЫХ ОТНОШЕНИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Благодаря развитию алгебры конечных предикатов первого порядка [1] стало возможным формальное описание абстрактных понятий, которыми пользуется человек в своей интеллектуальной деятельности [1, 2]. При этом обнаружилась настоятельная потребность в разработке алгебр конечных предикатов более высокого порядка, чем первый [2]. Это позволило бы в более компактной и естественной форме математически описывать многочисленные и разнообразные понятия высокой степени абстрактности, широко используемые человеческим интеллектом. В настоящей статье описывается подход к построению алгебры конечных предикатов произвольного порядка, предназначаемой для формального описания различных аспектов интеллектуальной деятельности человека.

Прежде всего введем понятия конечного отношения произвольного порядка, для чего нам потребуется расмотреть конечные математические структуры. Конечные математические структуры являются наиболее общим объектом математического описания в конечной математике. На практике используются три приема при построении математических структур. Первый прием состоит в том, что из объектов, имеющихся в наличии, образуем множество их одноместных наборов. Например, из букв a и b образуем множество $\{(a), (b)\}$ одноместных наборов (a) и (b) этих букв. Наборы объектов (одноместные или многоместные) будем заключать в круглые скобки. Объекты, входящие в состав набора, будем называть *компонентами набора*. Наборы, входящие в состав множества, будем называть *элементами множества*. Множества элементов будем заключать в фигурные скобки. Второй прием состоит в образовании подмножеств из элементов уже имеющегося множества. Например, из элементов (a) и (b) множества $\{(a), (b)\}$ образуем подмножества $\varnothing, \{(a)\}, \{(a), (b)\}$. Третий прием состоит в образовании из имеющихся множеств их декартовых произведений.

Декартовым произведением $A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$ множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называют множество всех наборов $(a_1, a_2, ... a_n)$, где $(a_1) \in A_1$, $(a_2) \in A_2, ..., (a_n) \in A_n$. В дальнейшем для краткости вместо выражения $(a) \in A$ будем писать $a \in A$, а вместо выражения $(a_1), (a_2) ..., (a_n)$ будем писать $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Множества $A_1, A_2, ..., A_n$ называют *сомножителями декартового произведения*. Пример декартового произведения: $\{a, b\} \times \times \{0,1\} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}$. Для пустого множества принимаем

$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$. Декартово произведение ассоциативно $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, но, вообще говоря, не коммутативно $A \times B \neq B \times A$. Буквами A, B, C обозначены произвольные множества. Декартово произведение $A^n = A \times A \times \ldots \times A$, в котором одно и то же множество A умножается n раз само на себя, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, называют n-й *декартовой степенью множества*. Множество A^2 называют *декартовым квадратом множества* A, множество A^3 — *декартовым кубом множества* A. Примеры декартовых степеней множества: $\{0,1\}^1 = \{0,1\}$, $\{0,1\}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, $\{0,1\}^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0)), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

Конечные математические структуры образуем с помощью трех описанных выше приемов в следующем порядке. Из *первичных символов* образуем конечное множество их одноместных наборов, называемое *базой шкалы множеств*. Подмножества базы шкалы множеств назовем *множествами первого порядка*. Из множеств первого порядка образуем *декартовы произведения первого порядка*. Подмножества декартовых произведений первого порядка назовем *отношениями первого порядка*. Из отношений первого порядка образуем систему их одноместных наборов. Подмножества этой системы называем *множествами второго порядка*. Из множеств первого и второго порядка образуем *декартовы произведения второго порядка*. Подмножества декартовых произведений второго порядка назовем *отношениями второго порядка*. Образуем систему всех одноместных наборов отношений второго порядка и т. д. При образовании декартовых произведений третьего порядка можно использовать множества первого, второго и третьего порядков.

Образуемая таким способом иерархия множеств называется *шкалой множеств*. Конечные отношения первого, второго и т. д. порядков назовем *конечными математическими структурами*. Элементами отношений служат наборы. Набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, состоящий из n компонентов, назовем *n-компонентным набором*. Отношения, состоящие из однокомпонентных наборов, назовем *одноместными*, или *унарными отношениями*, двухкомпонентных — *двуместными*, или *бинарными отношениями*, трехкомпонентных — *трехместными*, или *тернарными отношениями*, n-компонентных — *n-местными*, или *n-арными отношениями*. Рассмотрим примеры построения отношений. Примем множество $\{a, b, 0,1\}$ в качестве базы шкалы множеств. Образуем множества первого порядка $\{a, b\}$ и $\{0, 1\}$, в роли которых берем подмножества базы шкалы множеств. Образуем декартово произведение первого порядка $\{0,1\}^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$, в роли которого используем декартов куб множества $\{0,1\}$. Образуем отношения первого порядка $(\{0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$ и $\{(0,1,1), (1,1,0)\}$, в роли которых используем подмножества множества $\{0,1\}^3$. Из построенных отношений первого порядка образуем множество второго порядка $\{\{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}, \{(0,1,1), (1,1,0)\}\}$. Из множества первого порядка $\{a, b\}$ и только что построенного множества второго порядка образуем декартово произведение второго порядка $\{a, b\} \times \{\{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}, \{(0,1,1), (1,1,0)\}\} = \{(a), \{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}), (a, \{(0,1,1), (1,1,0)\}), (b,$

$\{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}), (b, \{(0,1,1), (1,1,0)\})\}$. Образуем отношение второго порядка $\{(a, \{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)\}), (b, \{(0,1,1), (1,1,0)\})\}$, в роли которого используем одно из подмножеств только что построенного декартового произведения второго порядка. Полученное отношение — бинарное. В каждый из его наборов первым компонентом входит буква, т. е. первичный символ, вторым компонентом — тернарное отношение первого порядка.

Введенное выше понятие конечного отношения произвольного порядка определено не вполне четко, поэтому мы будем рассматривать его лишь как сугубо предварительное. Бурбаки пишет: «...по-видимому, почти невозможно сформулировать общие и точные определения, касающиеся структур, вне рамок формальной математики» [3, с. 396]. Строго определить понятие конечной математической структуры можно на базе алгебры конечных предикатов произвольного порядка, к построению которой мы сейчас и приступим. Ниже дается индуктивное определение понятия конечного предиката p-го порядка, где p — любое число из натурального ряда 1, 2, ... Введем множество $M_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_0}\}$ одноместных наборов первичных символов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, называемых *буквами*, k_0 — число букв в множестве M_0. Множество M_0 будем называть *алфавитом букв*.

Предположим, что уже введены множества $M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}$, где i — какое-нибудь из чисел $1, 2, \ldots, p$. Конечным предикатом i-го порядка назовем любую функцию вида

$$f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) \qquad (1)$$

со значениями в множестве $\{0,1\}$, заданную на декартовом произведении

$$M_0^{n_0} \times M_1^{n_1} \times \cdots \times M_{i-1}^{n_{i-1}}.$$

Здесь $n_0, n_1, \ldots, n_{i-1}$ — любые числа из натурального ряда 1, 2, ... В качестве множества M_i принимаем совокупность одноместных наборов всех конечных предикатов i-го порядка. Принимая $i = p$, приходим к определению понятия конечного предиката p-го порядка.

Конечным предикатом p-го порядка назовем любую функцию вида

$$f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{p-1,_1}, \ldots, x_{p-1,_{n_{p-1}}}) \qquad (2)$$

со значениями в множестве $\{0,1\}$, заданную на декартовом произведении

$$M_0^{n_0} \times M_1^{n_1} \times \cdots \times x_{p-1}^{n_{p-1}}.$$

Множество одноместных наборов всех конечных предикатов p-го порядка обозначим M_p. Будем говорить, что введенные таким способом конечные предикаты p-го порядка имеют *тип* $(k_0, n_0, n_1, \ldots, n_{p-1})$.

Переменные $x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_{n_0}}$, каждая из которых определена на множестве M_0, будем называть *переменными нулевого порядка*, или *буквенными переменными*. Переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_i}}$, заданные на множестве M_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, будем называть *переменными* *i-го порядка*, или *переменными предикатами i-го порядка*. Все введенные переменные, кроме буквенных, будем называть *предикатными переменными*. Переменные, от значений которых значение функции не зависит, называют *фиктивными переменными* этой функции. В том частном случае, когда все предикатные переменные конечного предиката p-го порядка фиктивны, его можно считать *конечным предикатом первого порядка*. Таким образом, конечные предикаты первого порядка являются частным случаем конечных предикатов p-го порядка. К конечным предикатам первого порядка можно прийти и иным способом, положив в выражении (2) $p = 1$.

Число k_i предикатов i-го порядка, т.е. число элементов в множестве M_i, определяется формулой

$$k_i = 2^{k_0^{n_0} k_1^{n_1} \ldots k_{i-1}^{n_{i-1}}}. \qquad (3)$$

Здесь индекс i может принимать значения $i = 1, 2, \ldots, p$. Показатель $k_0^{n_0} k_1^{n_1} \ldots k_{i-1}^{n_{i-1}}$ в формуле (3) характеризует число всех различных наборов значений аргументов предиката i-го порядка. Определим, к примеру, число k_1 элементов в множестве M_1 и число k_2 элементов в множестве M_2, если $k_0 = n_0 = n_1 = 2$. Имеем

$$k_1 = 2^{(k_0^{n_0})} = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16;$$

$$k_2 = 2^{k_0^{n_0} k_1^{n_1}} = 2^{2^2 \cdot 16^2} = 2^{1024} \approx 10^{308}.$$

Число Q всех различных наборов значений аргументов конечного предиката p-го порядка равно $Q = k_0^{n_0} k_1^{n_1} \ldots k_{p-1}^{n_{p-1}}$ (4). Число R всех различных конечных предикатов p-го порядка равно $R = 2^Q$ (5).

Теперь мы имеем возможность дать строгое определение конечного отношения произвольного порядка. Конечные отношения p-го порядка вводим с помощью индуктивного определения. Вводим множество $M_0 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k_0}\}$. Под символами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k_0}$ понимаем некоторые предметы. При определении предикатов произвольного порядка под символами $a_1, a_2, \ldots, a_{k_0}$ не понималось ничего. Это были просто символы, взятые сами по себе. Жирными буквами обозначаем семантические объекты, тонкими буквами того же начертания обозначаем соответствующие им синтаксические объекты. Множество $\mathbf{M}_0$ назовем *предметной областью*.

Предположим, что уже введены множества $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. *Конечным отношением i-го порядка* назовем любое подмножество декартового произведения $\mathbf{M}_0^{n_0} \times \mathbf{M}_1^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{M}_{i-1}^{n_{i-1}}$. В качестве множества $\mathbf{M}_i$ принимаем совокупность одноместных наборов всех конечных отношений i-го порядка. Принимая $i = p$, приходим к определению понятия конечного отношения p-го порядка. *Конечным отношением p-го порядка типа* $(k_0, n_0, n_1, \ldots, n_{p-1})$ назовем любое подмножество декартового произведения $\mathbf{M}_0^{n_0} \times \mathbf{M}_1^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{M}_{p-1}^{n_{p-1}}$. Множество одноместных наборов всех конечных отношений p-го порядка обозначим $\mathbf{M}_p$.

Введем переменные $x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}$, каждая из которых определена на множестве M_0. Будем их называть предметными переменными. Переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}$, заданные на множестве M_i $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p-1)$, назовем *переменными отношениями i-го порядка.*

Между конечными предикатами p-го порядка и конечными отношениями p-го порядка можно установить взаимно однозначное соответствие. Сделаем это с помощью функций F_i: $M_i \to M_i$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$. Функции F_i вводим с помощью индуктивного определения. Функцию $F_0 : M_0 \to M_0$ определяем следующим образом: $F_0(a_1) = a_1, \ldots, F_0(a_{k_0}) = a_{k_0}$. Условимся считать, что каждому значению переменных $x_{0_1}, \ldots$ $\ldots, x_{0_{n_0}}$ поставлено в соответствие значение переменных $x_{0_1} = F_0 \times$ $\times (x_{0_1}), \ldots, x_{0_{n_0}} = F_0(x_{0_{n_0}})$. Предположим, что, кроме функции F_0, уже определена функция F_1, которая предикатам первого порядка $x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}$ ставит в соответствие отношения первого порядка $x_{1_1} =$ $= F_1(x_{1_1}), \ldots, x_{1_{n_1}} = F_1(x_{1_{n_1}}), \ldots$, функция $F_{i-1}, (i = 1, 2, \ldots, p)$, которая предикатам $i-1$-го порядка $x_{i-1,_1}, \ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}$ ставит в соответствие отношения $i-1$-го порядка $x_{i-1,_1} = F_{i-1}(x_{i-1,_1}), \ldots,$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}} = F_{i-1}(x_{i-1,_{n_{i-1}}})$.

Функцию $F_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ определяем следующим образом. Полагаем, что функция F_i ставит в соответствие каждому конечному предикату f из множества M_i конечное отношение f из множества M_i, удовлетворяющее условию: если $f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots x_{1_{n_1}}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_1}, \ldots, x_{i-1,_{n-1}}) = 1$, то $(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) \in f$; если $f(x_{0_1}, \ldots x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) = 0$, то $(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots x_{i-1,_{n_{i-1}}}) \notin f$. С помощью функций F_p можно перейти от любого конечного предиката p-го порядка к соответствующему конечному отношению p-го порядка. Все функции F_i $(i = 0, 1, \ldots, p)$ — взаимно однозначные. В самом деле, функция F_0 — взаимно однозначная. Кроме того, если функции $F_0, F_1, \ldots, F_{i-1}$ — взаимно однозначные, то, очевидно, взаимно однозначной, в силу своего определения, будет и функция F_i.

Обратный переход от любого конечного отношения p-го порядка к соответствующему конечному предикату p-го порядка можно совершить с помощью функций $F_i : M_i \to M_i$, обратных функциям F_i $(i = 0,$ $1, \ldots, p)$. Можем записать: $x_{i_1} = F_i(x_{i_1}), \ldots, x_{i_{n_i}} = F_i(x_{i_{n_i}})$. Функция F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ ставит в соответствие каждому конечному отношению f из множества M_i конечный предикат f из множества M_i, удовлетворяющий условию: «если $(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) \in f$, то $f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) = 1$; если $(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots, x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) \in f$, то $f(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n_0}}, x_{1_1}, \ldots x_{1_{n_1}}, \ldots, x_{i-1,_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i-1,_{n_{i-1}}}) = 0$.

Рассмотрим пример построения предиката второго порядка. Пусть $p = 2$, множество M_0 содержит два знака a и b, т. е. $M_0 = \{a, b\}$. При этом $k_0 = 2$. Пусть, кроме того, $n_0 = n_1 = 1$. Это значит, что имеются в виду двуместные предикаты второго порядка типа $(k_0, n_0, n_1) = 2,1,1$. Предикаты рассматриваемого типа представляют собой функции $y = f(x, X)$ с двоичными значениями y. Буквой x обозначена переменная нулевого порядка, т. е. буквенная переменная, $x \in M_0$. Переменная x выполняет роль переменной x_{0_1}, введенной выше. Буквой X обозначена переменная первого порядка, т. е. переменный предикат первого порядка. Ее значениями служат предикаты первого порядка. Эти предикаты — одноместные (так, как $n_0 = 1$). Будем обозначать их в виде $P(x)$. Они заданы на множестве $M_0^{n_0} = M_0^1 = M_0$, таким образом $x \in M_0$.

Область изменения переменной X содержит, согласно формуле (3), четыре элемента: $k_1 = 2^{(k_0^{n_0})} = 2^{(2^1)} = 2^2 = 4$. Этими элементами служат четыре предиката первого порядка, представленные в табл. 1.

Таблица 1

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
a	0	0	1	1
b	0	1	0	1

Таблица 2

x	a	a	a	a	b	b	b	b
X	0	x^a	x^b	1	0	x^a	x^b	1
$f(x, X)$	0	1	0	1	1	0	1	0

Запишем эти предикаты в виде формул алгебры конечных предикатов первого порядка: $P_0(x) \equiv 0$, $P_1(x) \equiv x^b$, $P_2(x) \equiv x^a$, $P_3(x) \equiv 1$. Таким образом, $X \in \{0, x^a, x^b, 1\}$. Переменная X выполняет роль переменной x_{1_1}, введенной выше. Область определения переменной X есть множество $M_1^{n_1} = M_1^1 = M_1$, $M_1 = \{0, x^a, x^b, 1\}$.

Определяем число всех различных наборов (x, X) значений аргументов предиката $f(x, X)$ типа (2, 1, 1) по формуле (4): $Q = k_0^{n_0} k_1^{n_1} = 2^1 \cdot 4^1 = 8$. Формируем множество из восьми наборов: $\{(a, 0), (a, x^a), (a, x^b), (a, 1), (b, 0), (b, x^a), (b, x^b), (b, 1)\}$. Это множество есть следующее декартово произведение: $M_0^{n_0} \times M_1^{n_1} = M_0^1 \times M_1^1 = M_0 \times M_1$. Предикат $f(x, X)$ выполняет роль предиката $f_2(x_{0_1}, x_{1_1})$, введенного выше. Составляем табл. 2 для одного из предикатов $f(x, X)$. В зависимости от способа расстановки нулей и единиц в таблице получаем тот или иной предикат второго порядка.

Полученную таблицу можно представить в более компактном виде (табл. 3). Число всех различных предикатов рассматриваемого типа равно (вычисления ведем по формуле (5)): $R = 2^Q = 2^8 = 256$. Для каждого из 256 предикатов типа (2,1,1) можно составить свою таблицу значений. Каждому из этих предикатов можно присвоить свой номер. Например, для предиката, представленного табл. 2, получаем № 90: $01011010 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = 64 + 16 + 8 + 2 = 90$. Двоичный код, составленный из значений предиката, мы преобразовали в десятичный номер этого предиката. Совокупность всех 256 предикатов заданного типа образует множество $M_p = M_2$.

Таблица 3

X \ x	0	x^a	x^b	1
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0

$f(x, X)$

Таблица 4

P	0	xa	xb	1
$P = F_1(P)$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$

Таблица 5

P	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$P = F_1(P)$	0	x^a	x^b	1

Перейдем от рассмотренного выше предиката второго порядка к отношению второго порядка, соответствующего этому предикату. Множество M_0 равно $M_0 = \{a, b\}$. Здесь $a = F_0(a)$, $b = F_0(b)$. Множество M_1 есть система всех подмножеств множества $M_0^{n_0} = M_0^1 = M_0$, т. е. $M_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Поскольку между элементами множеств M_i и M_i $(i = 0, 1, p)$ существует взаимно однозначное соответствие, то число элементов множества M_i равно числу элементов множества M_i и может быть вычислено по формуле (3):

$$k_0 = 2,\ k_1 = 4,\ k_2 = 2^{k_0^{n_0} k_1^{n_1}} = 2^{k_0^1 k_0^1} = 2^{k_0 k_1} = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256.$$

Множество M_2 есть система всех подмножеств множества $M_0^{n_0} \times M_1^{n_1} = M_0^1 \times M_1^1 = M_0 \times M_1$. Имеем: $M_0 \times M_1 = \{(a, \varnothing), (a, \{a\}), (a, \{b\}), (a, \{a, b\}), (b, \varnothing), (b, \{a\}), (b, \{b\}), (b, \{a, b\})\}$, $M_2 = \{\varnothing, \{(a, \varnothing)\}, \{(a, \varnothing), (a, \{a\})\}, \ldots\}$. Всего в множестве имеется 256 элементов.

Строим функцию $F_1 : M_1 \to M_1$. Множество M_1 было найдено ранее: $M_1 = \{0, x^a, x^b, 1\}$. В данном случае сформулированное выше правило перехода от предиката из M_1 к соответствующему отношению из M_1 гласит. Предикату $P = P(x)$ ставим в соответствие отношение $P = F_1(P)$, удовлетворяющее условию: если $P(x) = 1$, то $x \in P$; если $P(x) = 0$, то $x \in P$. Здесь $x = F_0(x)$. Составляем по этому правилу табл. 4, задающую функцию F_1. По ранее сформулированному правилу от предиката из M_i переходим к соответствующему отношению из M_i. В нашем примере переходим от предиката второго порядка, заданного табл. 3 и принадлежащего множеству M_2, к соответствующему отношению второго порядка из M_2. В данном случае это правило гласит. Предикату $f = f(x, X)$ ставим в соответствие отношение $f = F_2(f)$, удовлетворяющее условию: если $f(x, X) = 1$, то $(x, X) \in f$; если $f(x, X) = 0$, то $(x, X) \notin f$. Здесь $x = F_0(x)$, $x = F_1(x)$. По этому правилу строим отношение f, соответствующее предикату $f = f(x, X) : f\ \{(a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (b, \varnothing), (b, \{b\})\}$.

Выполним обратный переход от только что построенного отношения второго порядка к соответствующему предикату второго порядка. Строим функцию $F_1 : M_1 \to M_1$. В данном случае правило перехода от отношения из M_1 к соответствующему предикату из M_1 гласит. Отношению P ставим в соответствие предикат $P = F_1(P)$, удовлетворяющий условию: если $x \in P$, то $P(x) = 1$; если $x \notin P$, то $P(x) = 0$. Здесь $x = F_0(x)$. Составляем по этому правилу табл. 5, задающую функцию F_1. Мы видим, что функция F_1 получилась обратной по отношению к функции F_1.

По ранее сформулированному правилу переходим от отношения из M_i к предикату из M_i. В нашем примере переходим от отношения второго порядка $f = \{(a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (b, \varnothing), (b, \{b\})\}$ из M_2 к соответствующему предикату второго порядка из M_2. В данном случае это правило гласит. Отношению f ставим в соответствие предикат $f = F_2(f)$ $(f = f(x, X))$, удовлетворяющий условию: если $(x, X) \in f$, то $f(x, X) = 1$; если $(x, X) \notin f$, то $f(x, X) = 0$. Здесь $x = F_0(x)$, $X = F_1(X)$. Строя по этому правилу предикат $f(x, X)$, соответствующий отношению f, приходим к табл. 3. Каждому набору, входящему в состав отношения f, в таблице соответствует единица, в остальных ячейках таблицы проставляем нули. В результате получили исходный предикат. Этим иллюстрируется тот факт, что функция F_2 обратна функции F_2. Привести примеры перехода от предикатов к отношениям и обратно также для предикатов третьего и более высоких порядков затруднительно, так как нет способа формульной записи предикатов второго и более высоких порядков.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства — Х., 1984.— 142 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Технические средства.— Х., 1986.— 136 с. 3. *Бурбаки Н.* Теория множества.— М., 1965.— 449 с.

Поступила в редколлегию 19.12.86.