УДК 519.6

ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

ГРИЦЮК В.И.

Исследуется проблема определения структуры модели в пространстве состояний для многомерного стационарного стохастического процесса. Рассматриваются условия для выбора базиса, при котором число оцениваемых параметров минимально. Приводится метод оценки структуры, основанный на выборе наиболее независимых компонент.

Важная и широко изучаемая проблема в теории идентификации линейных систем – определение структуры представления в пространстве состояния типа

$$\begin{aligned} x_t &= Fx_{t-1} + Ke_t \;; \\ y_t &= Hx_t \;. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь y_t – стационарный чисто случайный стохастический векторный процесс размерности p; e_t – гауссовский вектор белого шума той же размерности, что и y_t; x_t – состояние размерности n. В многомерных системах проблема оценивания структуры состоит не только в определении размерности x_t – вектора состояния (как в случае систем с одним входом и одним выходом), но и в определении специальной структуры (или параметризации) для F, K и H матриц так, чтобы они могли быть единственно определены в процедуре параметрического оценивания. Нет универсальной структуры, которая может быть использована для всех многомерных линейных систем одного и того же порядка. Другая трудность та, что данная система может быть единственно параметризована более, чем одной структурой. Поэтому проблема оценивания структуры заключается в определении вначале набора допустимых для данного y_t процесса структур и последующего выбора наилучшей структуры в этом наборе, т. е. структуры, в которой проблема оценивания будет хорошо обусловленной.

Идентификация структуры представления пространства состояния (1) состоит из 1) определения размерности n вектора состояния и 2) размещения в матрице F оцениваемых параметров. Фактически определение структуры модели для процесса y_t руководствуется вводом в матрицу F наборов 1 или 0 и поэтому не оцениваемым. Разрешение этих вводов – важная часть определения структуры, так как уменьшает число неизвестных параметров и обеспечивает хорошую обусловленность проблемы оценивания. Этот аспект составляет главное отличие идентификации многомерных процессов. Рассмотрим представление импульсной реакции для

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} H_j e_{t-j} \;. \tag{2}$$

Тогда $H_j = HF^jK$ и так как обновление – процесс белого шума с нулевым средним, $\hat{y}_{t+k|t}$ можно представить как

$$\hat{y}_{t+k|t} = \sum_{j=k}^{\infty} H_j e_{t+k-j} \;, \tag{3}$$

Np -мерный вектор предсказания

$$\hat{Y}_t^N = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t|t} \\ \hat{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+N-1|t} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Используя (3), можно представить

$$\hat{Y}_t^N = H_{N,\infty} \begin{bmatrix} e_t \\ e_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

где $H_{N,\infty}$ – полуопределенная матрица Ганкеля, определяемая как

$$H_{N,M} = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_{M-1} \\ H_1 & H_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N-1} & \cdots & \cdots & H_{N+M-2} \end{bmatrix}.$$

Ввиду предположения, что y_t – процесс конечного порядка n, ранг матрицы $H_{N,M}$ меньше или равен n при любом N и M. Следовательно, для достаточно большого N можем выбрать n независимых строк в $H_{N,\infty}$ и соответственно n независимых компонент в векторе предсказания $\hat{Y}_t^N$, которые будут образовывать базис для пространства, охваченного всеми компонентами $\hat{Y}_t^N$. Пусть x_t – вектор, сформированный этими независимыми компонентами $\hat{Y}_t^N$.

Определим h – структурный вектор представления пространства состояния, содержащий индексы строк $H_{N,\infty}$ (компоненты вектора предсказания), которые могут быть выбраны в базис. Введем несколько ограничительных условий для выбора базиса. Во-первых, ввиду формы матрицы Ганкеля, если j-я компонента $\hat{y}_{t+i|t}$, $\hat{y}^j_{t+i|t}$ есть в модели присутствующих компонент вектора предсказания $\hat{Y}_t^N$, тогда выполняется $\hat{y}^j_{t+k\{t}$ для $k \succ i$. Во-вторых, так как y_t – процесс полного ранга, ясно, что первые p компоненты вектора предсказания $\hat{Y}_t^N$ – независимы. Налагаются два условия на выбор базиса: 1) если $i \in h$, то $i - p \in h$; 2) $i \in h$ для $i = 1,2,\cdots p$. Если выбираются условия 1) и 2), то соответствующий структурный вектор h называется хорошим. Если состояние x_t формируется выбором n компонент $\hat{Y}_t^N$, полученного из хорошего структурного вектора h, тогда соответствующие F, K, H структуры называются допустимыми. Ясно, что оптимальным выбором будет параметризация, которая ведет к наиболее точным оценкам параметров. Можно определить, что строки матрицы F могут быть двух типов: 1) $(0 \cdots 0 \quad 1 \quad 0 \cdots 0)$ и 2) $(X\,X\,X)$, т. е. полностью параметризованы. Так как F выражает линейную зависимость в векторе предсказания [1,2], можно видеть, что в F есть $n - n_1$ строк типа 1), где n_1 – число строк первой блочной строки $H_{N,\infty}$ ($n_1 \le p$), которые выбраны в базис. Строки H также типа 1) или 2), и в H есть n_1 строк типа 1). Поэтому в F nn_1 оцениваемых параметров и в H - $(p - n_1)n$. Общее число параметров в H и F - np независимо от величины n_1. Однако n_1 влияет на величину неизвестных параметров в K.

Если x_t выбрано так, что соответствует условиям 1) и 2), то $H = [I \quad 0]$, $K = \left[\dfrac{I}{K^*}\right]$, и число оцениваемых параметров $2np - p^2$, где n – размерность состояния модели (1). Если x_t выбрана так, что соответствует только условию 1), то число параметров $2np - n_1 p$, где $n_1 \prec p$. Если x_t выбрано без соответствия условиям 1) и 2), число параметров, которые должны быть оценены в F, может быть больше, чем $2np - n_1 p$. Определим концепцию сложности [3]. Фактически – это мера взаимодействия между компонентами случайного вектора. Чем большее взаимодействие, тем большая сложность:

$$C = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\log(n\lambda_i), \qquad (5)$$

где λ_i – собственные значения ковариационной матрицы случайного вектора (при условии, что ковариационная матрица нормализована так, что её след равняется 1). Если известна ковариационная матрица $R_{\hat{Y}}$ вектора $\hat{Y}_t^N$ и известен порядок процесса n, можно вычислить сложность различных подвекторов порядка n вектора $\hat{Y}_t^N$, так как соответствующая $n \times n$ ковариационная матрица - подматрица $R_{\hat{Y}}$. Идея, предложенная в [3], позволяет выбрать подвектор $\hat{Y}_t^N$, который имеет наименьшую сложность среди всех подвекторов размерности n, соответствующих условиям 1) и 2). Компоненты, полученные этим путем, называются "наиболее независимые компоненты" Y_t^N. Если параметры F матрицы оцениваются методом наименьших квадратов, то ковариационная матрица ошибок оценок параметров связана с обращением подматрицы $R_{\hat{Y}}$, выбранной процедурой в [3]. Поэтому возможно использовать матрицу $R_{\hat{Y}}$ для выбора компонент базиса, хотя она прямо не достижима. Можно минимизировать некоторую скалярную меру обращения различных подматриц $R_{\hat{Y}}$, чтобы различить между соответствующими подвекторами $\hat{Y}_t^N$. Предложим следующую процедуру.

1) Вычислить оценки предсказателей $\hat{y}_{t+k|t}$ для первой подгонки модели авторегрессии высокого порядка.

2) Вычислить матрицу ковариаций модели $R_{\hat{Y}}$ из оценок предсказателей.

3) Вычислить UDU^T разложение согласно методу [4] верхней левой $p \times p$ подматрицы $R_{\hat{Y}}$, а затем её обращение.

4) Для порядка n, равного $p+1$, выбрать все $(p+1)\times(p+1)$ подматрицы $R_{\hat{Y}}$, которые содержат $p \times p$ верхнюю левую подматрицу и удовлетворяют условию 1). Вычислить обращение этих подматриц, для чего определить сингулярные значения матриц согласно методу [4]. Для этой цели представим матрицу

$$O = \begin{bmatrix} D^{1/2}U^T & D^{-1/2}U^{-1}b \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

умножение на которую её же транспонированной дает

$$O^T O = \begin{bmatrix} UDU^T & b \\ b^T & \alpha \end{bmatrix},$$

где b – вектор; $\rho = (\alpha - b^T (UDU^T)^{-1} b)^{1/2}$; U – нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали.

5) Выбрать подматрицу, для которой след обращенной минимальный.

6) Повторить последние два шага со всеми $(n+1)\times(n+1)$ подматрицами, которые содержат выбранную $n \times n$ подматрицу, а добавочная строка и колонка их выбраны так, что соответствуют условию 1).

7) Выбрать порядок, который минимизирует критерий типа AIC.

Предложенный метод определения оптимальной структуры позволяет выбрать структуру с наиболее независимыми компонентами в векторе состояния из набора допустимых для данного процесса структур.

Литература: 1. *Rissanen J.* Basis of invariants and canonical forms for linear dynamical systems // Automatica, 1974, Vol. 10. P. 32-41. 2. *Gevers M., Werts V.* On the problem of structure selection for the identification of stationary stochastic processes // Proc. IFAC Symp. Identification Parameter Est., Washington, 1982. P.112-123. 3. *Ljung L., Rissanen J.* On canonical forms, parameter identifiability and the concept of complexity// Proc. IFAC Symp. Identification, Tbilisi, 1976. Vol. 3. P.84-90. 4. *Грицюк В. И.* Рекуррентный алгоритм идентификации модели, основанный на ортогональном разложении // Радиоэлектроника и информатика, 1998. № 3. С. 46-48.

Поступила в редколлегию 14.12.99

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Авраменко В.Г.

Грицюк Вера Ильинична, канд. техн. наук, докторант ХТУРЭ. Научные интересы: стохастические системы управления. Хобби: литература, музыка. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.