СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.862:866

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ АКТИВАМИ И ОБЯЗАТЕЛЬСТВАМИ СТРАХОВЩИКА: НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ

ВОЛКОТРУБ С.В.

Строится модель оптимального стохастического управления активами и обязательствами страховой компании по страхованию жизни в непрерывном времени, предоставляющая возможность перераспределения активов в целях эффективного взаимодействия множеств активов и обязательств.

1. Введение

Модели управления активами и обязательствами сегодня актуальны для многих инвесторов, в частности, для страховщиков. Оптимальное управление финансовыми ресурсами позволяет страховой компании по страхованию жизни не только обеспечивать надежную страховую защиту клиентам, возможность получения более высокого инвестиционного дохода как страхователям, так и самому страховщику, но также предусматривать взаимосвязь множеств активов и обязательств и учитывать все требования государственного регулирования.

Целью работы является построение модели оптимального стохастического управления инвестиционной деятельностью страховщика в непрерывном времени. Поставлены задачи: описать модель функционирования страховой компании по страхованию жизни, построить модель прогнозирования числа действующих договоров, построить модели определения величины страховых обязательств и активов в непрерывном времени, построить динамическую модель оптимального стохастического управления активами и обязательствами страховщика в непрерывном времени.

2. Описание модели страховой компании. Основные предположения

Рассмотрим модель функционирования страховой компании по страхованию жизни, предусматривающую заключение договоров страхования, особенности государственного регулирования деятельности и инвестиционную деятельность страховщика, связанную с размещением активов, принятых в покрытие страховых обязательств.

Рассматриваем также непрерывную модель страхования [1], которая предполагает осуществление страховых выплат в момент наступления страхового случая. Введем следующие предположения:

1. По одному договору страхования за Δt может наступить только один страховой случай, повлекший за собой страховую выплату.

2. Каждый из договоров страхования может предусматривать страховые выплаты по k страховым случаям из q возможных (предлагаемых страховщиком).

3. Действие договора страхования заканчивается (и как следствие клиент «выбывает») при добровольном прекращении действия договора либо при наступлении одного из двух страховых случаев: дожития до оговоренного в договоре возраста или смерти на протяжении действия договора страхования.

4. При расчете страховых резервов (пассивов, обязательств) согласно требованиям законодательства учитывается каждый договор отдельно, независимо друг от друга, используется индивидуальная модель риска для каждого договора. При моделировании изменения активов страховщика рассматривается совокупность договоров в целом. Анализируя статистические данные движения денежных средств, можно определить интенсивность выплат $\mu_k(t)$ по каждому из $k = \overline{1.q}$ возможных в договоре страховых случаев, а соответственно, и вероятность наступления каждого из страховых случаев.

5. Для модели изменения активов также используется модель коллективного риска, рассматривается размер выплаты как случайные величины, независимые друг от друга, отображающие величину выплаты для каждого из $k = \overline{1.q}$ страховых случаев.

Обозначим $N(t)$ число действующих на момент времени t договоров. Рассмотрим возможные состояния компании:

1. Страховщик заключает новые договора. Рассматриваем приходящий поток договоров как пуассоновский поток [2] с переменной интенсивностью $\lambda(t)$. Каждый из договоров содержит случайное число страховых случаев (от одного до q). Вероятность p_i вхождения в договор каждого из $i = \overline{1, q}$ рисков мы можем определить статистически на основе предыдущего опыта. Вероятность заключения нового договора на интервале $[t; t + \Delta t]$ равна $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$, при этом для дальнейших исследований нам необходимо будет знать изменение количества клиентов, которые в своих договорах предусмотрели каждый из q случаев. Каждый новый договор приносит компании страховую премию ξ, размер которой является случайной величиной с функцией распределения $F_\xi(z)$ и моментами $M\{\xi\} = \pi(t)$, $M\{\xi^2\} = a(t)$. Далее будем обозначать $\pi(t) = \pi_t$.

2. По каждому из действующих договоров регулярно с интенсивностью λ_ξ выплачивается страховая премия в размере ξ. Предположим, что как для действу-

ющих, так и для вновь прибывших договоров размер страховой премии описывается одной и той же случайной величиной ξ с известной функцией распределения $F_\xi(z)$. Считаем, что страховые премии вносятся клиентами независимо друг от друга, поэтому за время Δt в компанию поступит страховая премия с вероятностью $N(t)\lambda_\xi \Delta t + o(\Delta t)$.

3. Количество договоров страховщика за время Δt может уменьшиться по нескольким причинам. Клиент добровольно прерывает действие договора. Предполагаем, что каждый клиент принимает такое решение независимо от других с интенсивностью μ, тогда за время Δt компанию по данной причине покинет клиент с вероятностью $N(t)\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Следующая причина: страховое время некоторых договоров заканчивается. Будем считать, что интенсивность наступления страхового случая (в частности, дожития μ_{alive} или смерти μ_{dead}) для каждого клиента происходит независимо от поведения других. Тогда за время Δt компанию покинет клиент с вероятностью $N(t)(\mu + \mu_{alive} + \mu_{dead})\Delta t + o(\Delta t)$.

4. Наступают страховые случаи. Будем считать, что по каждому договору может наступить страховой случай с интенсивностью μ_k, $k = \overline{1.q}$ и эти страховые случаи для различных страховых рисков независимы. Тогда на интервале Δt наступит страховой случай с вероятностью $N(t)\sum_{k=1}^{q} \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$, а компания по каждому риску при этом выплатит страховое возмещение в размере β_k, $k = \overline{1.q}$, которое является случайной величиной с функцией распределения $F_\beta(z)$ и моментами $M\{\beta\} = b_1$, $M\{\beta^2\} = b_2$. Функцию распределения выплат для каждого риска мы можем найти статистически на основании прошлого опыта.

Итак, рассмотрим интервал времени $[t; t + \Delta t]$, на этом интервале нам необходимо описать поведение количества договоров страховщика. Будем использовать последовательность вывода обратных уравнений Колмогорова для марковских процессов. Представим:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta N(t). \qquad (1)$$

На этом интервале может произойти:

$$\Delta N(t) = \begin{cases} +1, & \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t); \\ -1, & N(t)(\mu + \mu_{alive} + \mu_{dead})\Delta t + o(\Delta t); \\ 0, & 1 - (\lambda(t) + N(t)(\mu + \mu_{alive} + \mu_{dead})\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Усредним формулу (1) по флуктуациям $\Delta N(t)$, считая, что $N(u)$ при $t_0 \le u \le t$ известно. Затем полученное выражение усредним по реализациям $N(u)$:

$$M\{\Delta N(t)\} = M\{N(t + \Delta t) - N(t) \mid F_{N(u)}\} =$$
$$= \lambda(t)\Delta t - M\{N(t)\}(\mu + \mu_{alive} + \mu_{dead})\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделим на Δt и $\Delta t \to 0$. Предел справа существует и, следовательно, существует и предел слева:

$$\frac{d}{dt} M\{N(t)\} = \lambda(t) - M\{N(t)\}(\mu + \mu_{alive} + \mu_{dead})\Delta t.$$

Решение полученного дифференциального уравнения позволяет найти математическое ожидание прогнозируемого количества действующих на момент времени t договоров страхования.

3. Моделирование обязательств в непрерывной модели

Введем обозначения. $T(x)$ – продолжительность предстоящей жизни до момента смерти (случайная величина, имеющая непрерывное распределение). $H_i(x)$ – продолжительность предстоящей жизни до момента наступления i-го страхового случая (кроме смерти и дожития) из предусмотренных в договоре $i = \overline{1, k-2}$. Рассматриваем договора страхования жизни, заключенные на n лет. В каждом договоре предусматривается k рисков (страховых случаев). Тогда перспективные потери страховщика:

$$L_t = \begin{cases} 0, T(x) \le t; \\ b_{T(x)} v^{T(x)-t} - \int\limits_t^{T(x)} \pi_r v^{r-t} dr, n > T(x) > t; \\ b_{H_i(x)} v^{H_i(x)-t} - \int\limits_t^{H_i(x)} \pi_r v^{r-t} dr, n > H_i(x) > t; \\ b_n v^{n-t} - \int\limits_t^{n} \pi_u v^{u-t} du, T(x) > t, t \ge n. \end{cases}$$

Величина нетто-резерва для одного договора:

$$_t\overline{V} = M[L_t \mid T(x) > t, H_1(x) > t, ..., H_k(x) > t] =$$
$$= M[b_{T(x)-t+t} v^{T(x)-t} - \int\limits_0^{T(x)-t} \pi_{u+t} v^u du + b_n v^{n-t} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} (b_{H_i(x)-t+t} v^{H_i(x)-t} - \int\limits_0^{H_i(x)-t} \pi_{u+t} v^u du) -$$
$$- \int\limits_t^{n} \pi_u v^{u-t} du \mid T(x) > t, H_1(x) > t, ..., H_k(x) > t].$$

После преобразований получим:

$$\overline{_tV} = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{n-t} b_{u+t} v^u {}_u p_{x+t} \mu_i (t+u) du + b_n v^{n-t} {}_{n-t} p_{x+t} -$$
$$- \int\limits_0^{n-t} \pi_{u+t} v^u \cdot {}_u p_{x+t} du$$

Умножим на $v^t {}_t p_x$ и сделаем замену $s = t + u$:

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{n-t} b_{u+t} v^{u+t} {}_u p_{x+t} \cdot {}_t p_x \mu_i (t+u) du + b_n v^{n-t} {}_{n-t} p_{x+t} \times$$
$$\times v^t \cdot {}_t p_x - \int\limits_0^{n-t} \pi_{u+t} v^{u+t} \cdot {}_u p_{x+t} \cdot {}_t p_x du \cdot = {}_t\overline{V} \cdot v^t \cdot {}_t p_x.$$

Изменим пределы интегрирования (после замены):

$$\sum_{i=1}^{k}\int_t^n b_s v^s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_i(s)ds - \int_t^n \pi_s v^s \cdot {}_s p_x ds + b_n v^n \cdot {}_n p_x = $$
$$= {}_t\overline{V} \cdot v^t \cdot {}_t p_x \,.$$

Получим

$$ {}_t\overline{V} = \frac{\int_t^n v^s \cdot {}_s p_x [\sum_{i=1}^{k} b_s \cdot \mu_i(s) - \pi_s]ds + b_n v^n \cdot {}_n p_x}{v^t \cdot {}_t p_x}\,.$$

Найдем производную данной функции:

$$(v^t {}_t p_x)'_t = v^t ({}_t p_x)'_t + v^t \cdot {}_t p_x \ln\frac{1}{1+r_t} = -v^t {}_t p_x \times$$
$$\times \mu_{dead}(t) - v^t \cdot {}_t p_x \cdot \ln(1+r_t) = -v^t {}_t p_x (\mu_{dead}(t) + \delta),$$

$$(\int_t^n v^s \cdot {}_s p_x [\sum_{i=1}^{k} b_s \cdot \mu_i(s) - \pi_s]ds + b_n v^n \cdot {}_n p_x)'_t =$$
$$= v^t \cdot {}_t p_x [\pi_t - \sum_{i=1}^{k} b_t \cdot \mu_i(t)]\,.$$

Производную от интеграла найдем по формуле Лейбница:

$$\frac{d\,{}_t\overline{V}}{dt} = [\pi_t - \sum_{i=1}^{k} b_t \cdot \mu_i(t)] + \frac{(\mu_{dead}(t)+\delta)}{v^t \cdot {}_t p_x} \times$$
$$\times\left(\int_t^n v^s \cdot {}_s p_x [b_s \cdot \mu_x(s) - \pi_s]ds + b_n v^n \cdot {}_n p_x\right) =$$
$$= \pi_t - \sum_{i=1}^{k} b_t \cdot \mu_i(t) + (\mu_{dead}(t)+\delta)\,{}_t\overline{V}\,.$$

Полученная рекуррентная формула позволяет определять величину нетто-резерва для одного договора. Далее представим величину обязательств страховщика по всем договорам:

$$CP(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} {}_t\overline{V}^{(i)}\,.$$

Таким образом, общая величина обязательств страховщика представляет собой случайную сумму случайных разнораспределенных величин. Найти математическое ожидание данной суммы можем используя центральную предельную теорему для разнораспределенных случайных величин и теорему Вальда для случайных сумм.

Обозначим $M\{CP(t)\} = {}^{*}CP(t)$.

4. Моделирование изменения величины активов в непрерывной модели

Предположим, что в покрытие страховых обязательств выбраны следующим категории активов: банковский счет (безрисковый актив), акции n эмитентов, предоставление кредитов страхователям. В каждую категорию активов введена управляющая компонента, позволяющая перемещать денежные средства за счет безрискового актива.

Рассмотрим модель изменения вложений в акции:

$$dx_i(t) = \left[\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)dw_j(t)\right]\cdot(x_i(t) + u_i(t)),\ i = \overline{1,n}.$$

Здесь $\mu_i(t) > 0$ характеризует коэффициент возрастания акции на интервале $(t; t+\Delta t)$; $w_i(t)$ – последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией; $\|\sigma_{ij}(t)\|_{n\times n}$ – матрица волатильности; $u_i(t)$ – сумма капитала, которая перераспределяется в i-м активе в момент времени t за счет банковского счета, выбирается так, чтоб средства, размещенные в соответствующей категории активов, в каждый момент времени не превосходили нормативного значения; $i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$ – средства, полученные при инвестировании в n ценных бумаг (n акций).

Эволюция средств, которые используются для кредитования страхователей, задается аналогичным соотношением:

$$dx_{n+1}(t) = \beta(t)\cdot(x_{n+1}(t) + u_{n+1}(t))dt, \qquad (2)$$

где $\beta(t)$ – процент кредитования; $u_{n+1}(t)$ – сумма капитала, которая перераспределяется в момент времени t за счет банковского вклада.

Динамика объема страховых резервов, размещенных на депозитных счетах в банковских структурах, описывается соотношением:

$$dx_{n+2}(t) = r(t)\cdot(x_{n+2}(t) - \sum_{i=1}^{n+1} u_i(t))dt, \qquad (3)$$

где $r(t)$ – банковский процент; $\mu_i(t) > r(t)$.

Сумму величин перечисленных выше категорий активов будем называть управляемым капиталом.

Изменение величины активов за время Δt представляет собой сумму величины изменившегося управляемого капитала $K(t) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i(t)$, поступивших за данное время премий P_t и осуществленных выплат B_t:

$$Act(t+\Delta t) = Act(t) + \Delta Act(t) = \underset{\omega}{M}\{\sum_{i=1}^{n+2} x_i(t)\} + P_t - B_t\,,$$

$$P_t = \begin{cases} \xi, & [\lambda(t) + N(t)\lambda_\xi(t)]\Delta t + o(\Delta t);\\ 0, & 1 - [\lambda(t) + N(t)\lambda_\xi(t)]\Delta t + o(\Delta t);\end{cases}$$

$$B_t = \begin{cases} \beta, & N(t)\sum_{i=1}^{q}\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t);\\ 0, & 1 - N(t)\sum_{i=1}^{q}\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t).\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание, пусть $N(u)$ при $t_0 \le u \le t$ известно:

$$M\{Act(t+\Delta t)-Act(t)\mid N(u)\}=M\{\underset{\omega}{M}\{\sum_{i=1}^{n+2}\Delta x_i(t)\}+\pi_t\lambda(t)\Delta t+$$

$$+\pi_t\lambda_\xi(t)N(t)\Delta t-\sum_{i=1}^{q}b_i(t)\mu_i N(t)\Delta t+o(\Delta t)\mid N(u)\}=\pi_t\lambda(t)\Delta t+$$

$$+\underset{\omega}{M}\{\sum_{i=1}^{n+2}\Delta x_i(t)\}+[\pi_t\lambda_\xi(t)-\sum_{i=1}^{q}b_i(t)\mu_i]\cdot M\{N(t)\}\Delta t+o(\Delta t)\ .$$

Разделим на Δt и $\Delta t \to 0$. Предел справа существует и, следовательно, существует и предел слева:

$$\frac{d}{dt}M\{Act(t)\}=\underset{\omega}{M}\{\sum_{i=1}^{n+2}\frac{d}{dt}x_i(t)\}+\pi_t\lambda(t)+[\pi_t\lambda_\xi(t)-\sum_{i=1}^{q}b_i(t)\mu_i]\times$$
$$\times M\{N(t)\}.$$

Следовательно, математическое ожидание количества денежных средств, принятых в покрытие страховых обязательств (активов) в момент времени t, можем найти по формуле:

$$M\{Act(t)\}=\underset{\omega}{M}\{\sum_{i=1}^{n+2}x_i(t)\}+\int_{t_0}^{t}\pi(\tau)\lambda(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}[\pi(\tau)\lambda_\xi(\tau)-$$
$$-\sum_{i=1}^{q}b_i(\tau)\mu_i]\cdot M\{N(\tau)\}d\tau.$$

Обозначим $M\{Act(t)\}=Act_t(l)$.

5. Модель оптимального управления активами и обязательствами в непрерывном времени

$$F(\overline{u_t},t)=Act_t(l)-\overline{u_t}^{T}\cdot R\cdot\overline{u_t}-{}^{*}CP(t),\ t=0,1,..,\infty;$$

$$F(\overline{u_t},t)\to\underset{u_t\in G}{\max}, \tag{4}$$

$$G:\ P\{x_i(t)\le\gamma_i K(t)\}\ge\alpha_i,\ 0\le\alpha_i\le 1,\ i=\overline{1,n+1},$$

$$P\{\theta\cdot x_{n+2}(t)\ge\sum_{j=1}^{n+1}u_t^j\}\ge\alpha_i,\ x_i(t+1)\ge 0,$$

$\overline{x(0)}, K(0), N_0^*$ – заданные величины.

Обоснуем выбор вида целевой функции. Активы в нашем случае – это денежные средства, принимаемые в покрытие страховых обязательств. Пассивы- обязательства страховщика, связанные с обеспечением страховых выплат по договорам страхования. Заданный вид целевой функции преследует определенную цель. На каждом шаге (в каждый момент времени) осуществлять оптимальное управление и регулирование активов, чтобы обеспечить не только превышение размера активов над размером обязательств, но при этом учитывать заданный гарантированный уровень доходности активов и особенности их государственного регулирования, заключение новых договоров и осуществление выплат по существующим договорам. В целевой функции также учитывается, что при перемещении активов страховая компания несет некоторые затраты.

Ограничения регулируют объемы вложений согласно законодательным нормам и перераспределение средств таким образом, чтобы суммарный объем перераспределенных средств из банковского счета не превышал заданной доли θ средств на этом счету [4].

После определения управляющих составляющих каждой категории активов необходимо провести согласование множества активов и пассивов следующим образом:

$$K(t)=\begin{cases}M\{CP(t)\}, & F(\overline{u_t},t)<0;\\ M\{Act(t)\}, & 0\le F(\overline{u_t},t)\le e^{\ln(1+\eta)\Delta t}K(t-\Delta t);\\ e^{\ln(1+\eta)\Delta t}\cdot K(t-\Delta t), & F(\overline{u_t},t)>e^{\ln(1+\eta)\Delta t}K(t-\Delta t),\end{cases}$$

где η – заданный инвестором уровень доходности; $K(t-\Delta t)$ – величина активов, полученная на предыдущем шаге расчетов.

6. Выводы

Построенная математическая модель актуальна для страховой компании по страхованию жизни, поскольку она позволяет оптимально управлять денежными средствами в каждый момент времени, учитывая особенности функционирования страховщика, распределение инвестиционного дохода.

Научная новизна работы: при построении математической модели ALM используется подход оптимального стохастического управления (а не многошаговой стохастической оптимизации, как в известных моделях [3]), не зависящий от точности построения многих влияющих вероятностных сценариев. Преимущества модели: существует возможность выделения инвестиционного дохода, его корректировки, увеличение страховой суммы в действующем договоре за счет полученного инвестиционного дохода путем его распределения между страхователями; возможность оптимального управления активами в каждый момент времени путем перераспределения денежных средств между выбранными категориями активов; учет особенностей государственного регулирования; прогнозирование количества заключаемых договоров и расчет страховых обязательств по всем договорам в непрерывном времени; используется непрерывная динамическая модель страхования [1]; учет сложного взаимодействия множеств активов и обязательств. Впервые построена модель, позволяющая учитывать наибольшее количество влияющих факторов на функционирование страховщика и специфику реального взаимодействия множеств активов и обязательств страховой компании по страхованию жизни.

Практическая значимость работы: результаты данной работы позволят страховщику оптимально управлять денежными средствами, принятыми в покрытие страховых обязательств, обеспечивая надежную защиту страхователям, контролируя обязательства по каждому договору в отдельности и общий их объем, контролировать обеспечение увеличения страховой суммы для каждого страхователя и ряд других преимуществ.

Перспективы дальнейших исследований: исследование свойств построенной математической модели.

Литература: 1. *Бауэрс Н. и др.* Актуарная математика: Пер. с англ. / Под ред. В.К. Малиновского. М.: Янус-К, 2001. 656 с. 2. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007. 542 с. 3. Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. Cambridge: University Press, 1998. 468 p. 4. *Волкотруб С.В., Герасин С.Н.* Пошаговая дискретная модель оптимального управления динамическим балансом страховой компании // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2009. №863. С.53-61.

Поступила в редколлегию 25.02.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Герасин С.Н.

Волкотруб Светлана Владимировна, аспирантка, ассистентка кафедры ПМ ХНУРЭ. Финансовая и актуарная математика, оптимальное стохастическое управление. Харьков, просп. Ленина, 14, тел. (050)9150935.