

Ю. Я. ВОЛКОЛУПОВ, канд. физ.-мат. наук, А. Н. ДОВБНЯ, д-р физ.-мат. наук,
В. В. ЗАКУТИН, канд. физ.-мат. наук, М. А. КРАСНОГОЛОВЕЦ, д-р физ.-мат. наук,
Ю. Л. СТАРЧЕВСКИЙ, Г. И. ЧУРЮМОВ, д-р физ.-мат. наук

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ (КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Введение

Стандартный подход к расчету траекторий заряженных частиц при их движении в скрещенных статических электрическом и магнитном полях представляет собой решение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику их поведения во времени и пространстве. Один из подходов реализации системы дифференциальных уравнений движения в двумерной постановке задачи для плоского магнетрона был предложен П.Л. Капицей [1], который использовал метод усреднения для получения аналитического решения. Данный подход был развит далее и применен для решения уравнения движения в цилиндрической системе координат. Однако такой подход предполагает использование рядов с последующим пренебрежением некоторыми членами ряда [2], что не позволяет признать решение абсолютно точным. Иногда такой метод содержит неберущиеся интегралы, значение которых возможно определить при помощи численных методов. В связи с этим существует целесообразность сразу перейти к применению численных методов для решения системы дифференциальных уравнений движения [3]. К недостаткам численных методов можно отнести постоянную необходимость контролировать точность расчётов, а также проблемы, связанные с трудоемкостью вычислений, что, в свою очередь, требует применения мощных вычислительных средств.

В данной работе представлен новый численный подход к расчету траекторий движения заряженных частиц (векторный метод). Его достоинства заключаются в высокой скорости и точности вычислений. Принципиально отличаясь от описанных выше методов, предлагаемый подход является универсальным и может быть применен при любой конфигурации электродов и полей.

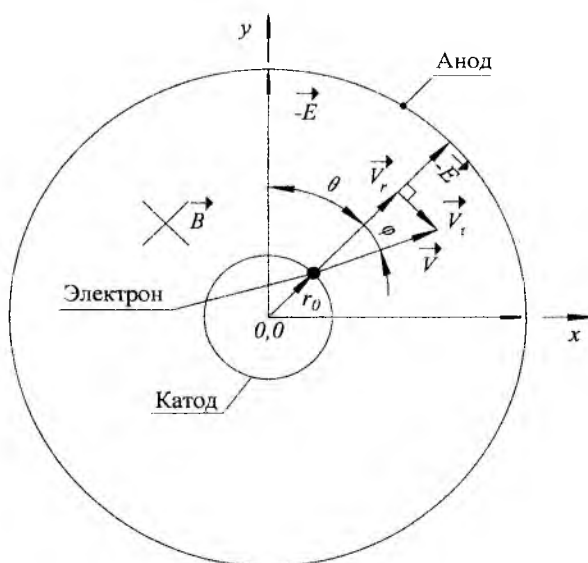


Рис. 1

Постановка задачи

На рис. 1 схематично показано распределение электрического и магнитного полей в пространстве между катодом и анодом. Магнитное поле является однородным, а электрическое – радиально-симметричным. Выбираем декартову систему координат, связанную с центром катода, и ориентируем её так, как показано на рис. 1. Расчеты проводятся с учетом двумерного приближения, т.е. движение в аксиальном направлении отсутствует. Введем следующий перечень входных данных: E – модуль напряжённости электрического поля; B – модуль индукции магнитного поля; V_0 – модуль начальной скорости электрона; r_0 – радиус-вектор, характеризующий начальное положение электрона относительно начала выбранной системы координат в любой момент времени; θ – угол между осью ординат и радиус-вектором; φ – угол между вектором скорости и вектором напряжённости электрического поля; e – заряд электрона; m – масса электрона; Δt – интервал времени, за который рассчитывается одна итерация цикла; X_{el}, Y_{el} – декартовы координаты электрона; V_{x_0}, V_{y_0} – декартовы координаты начала вектора скорости электрона; V_x, V_y – декартовы координаты конца вектора скорости электрона.

Моделирование движения заряженной частицы (электрона)

В соответствии с принципом суперпозиции рассмотрим движение заряженной частицы раздельно: сначала в статическом электрическом поле $\vec{E}(r_0)$, а затем – в магнитном поле. Выражение для модуля вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}(r_0)$ имеет вид:

$$|\vec{E}(r_0)| = \frac{U}{r_0 \cdot \ln\left(\frac{R_a}{r_k}\right)}, \quad (1)$$

где R_a и r_k – радиусы анода и катода соответственно; U – напряжение, прикладываемое к аноду.

Для определения влияния электрического поля на скорость электрона за интервал времени Δt , при котором вычисляется одна итерация цикла, воспользуемся следующим выражением:

$$dV = \frac{e \cdot E(r_0) \cdot \Delta t}{m}. \quad (2)$$

В результате вычисления следующей формулы определяется угол $Rang$ вектора напряжённости электрического поля в той точке, где находится электрон:

$$Rang = Ang(X_{el}, 0, Y_{el}, 0). \quad (3)$$

Т а б л и ц а 1

Условие	dV
$0 > Rang > \pi/2$	$V_{ex} = V_{x_0} + dV \cdot \sin(Rang); V_{ey} = V_{y_0} + dV \cdot \cos(Rang).$
$\pi/2 > Rang > \pi$	$V_{ex} = V_{x_0} + dV \cdot \sin(\pi - Rang); V_{ey} = V_{y_0} - dV \cdot \cos(\pi - Rang).$
$\pi > Rang > 3 \cdot \pi/2$	$V_{ex} = V_{x_0} - dV \cdot \sin(Rang - \pi); V_{ey} = V_{y_0} - dV \cdot \cos(Rang - \pi).$
$3 \cdot \pi/2 > Rang > 2 \cdot \pi$	$V_{ex} = V_{x_0} - dV \cdot \sin(2 \cdot \pi - Rang); V_{ey} = V_{y_0} + dV \cdot \cos(2 \cdot \pi - Rang).$

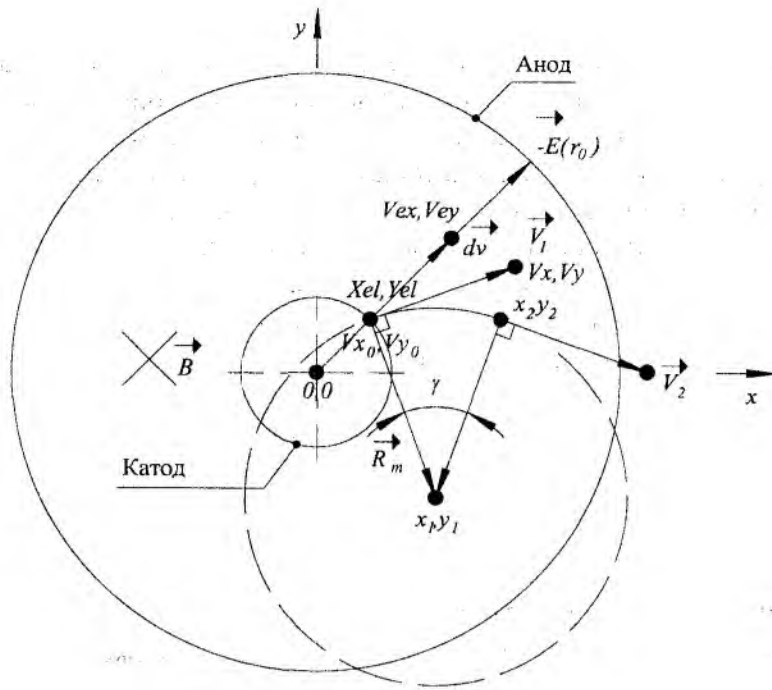


Рис. 2

Работа функции «Ang» рассмотрена ниже. В таблице 1 показано, как рассчитать вектор скорости, которую обретает электрон в электрическом поле без учёта магнитного. Ниже приведены выражения для определения координаты и модуля вектора скорости:

$$V_x = V_x + V_{ex}, \quad (4)$$

$$V_y = V_y + V_{ey}, \quad (5)$$

$$V = \sqrt{(V_x - V_{x_0})^2 + (V_y - V_{y_0})^2}. \quad (6)$$

Графическая интерпретация векторов скорости, обусловленных действием электрического и магнитного полей, представлена на рис. 2.

Рассмотрим влияние магнитного поля на движение заряженной частицы. При этом предполагается, что электрическое поле отсутствует. Определим необходимые параметры, используя следующие выражения:

$$\gamma = e \cdot B \cdot \sin(\alpha) \cdot \Delta t / m, \quad (7)$$

$$R_m = v \cdot m / (e \cdot B \cdot \sin(\alpha)). \quad (8)$$

В соответствии с (7) определим угол γ , на который поворачивается электрон в магнитном поле за определённое время относительно центра вращения x_1, y_1 . Так как выражение (7) не содержит скорости, можно предположить, что электроны, имеющую любую скорость, будут поворачиваться на один и тот же угол, который зависит только от электромагнитной индукции и интервала времени. В соответствии с (8) получим радиус окружности, по которой будут двигаться электроны. Вектор скорости направлен по касательной к этой окружности, следовательно, перпендикулярно её радиусу. Схематическое изображение этого процесса представлено на рис. 3 (а). Используя информацию о векторе скорости и тот факт,

что скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю, можно поставить локальную задачу определения координат x_1, y_1 конца радиуса вращения электрона. В этом случае имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (V_x - V_{x_0}) \cdot (X_{el} - x_1) + (V_y - V_{y_0}) \cdot (Y_{el} - y_1) = 0, \\ (X_{el} - x_1)^2 + (Y_{el} - y_1)^2 = R_m^2. \end{cases} \quad (9)$$

В результате выполненных алгебраических преобразований получаем две пары значений x_1, y_1 . Неопределённость можно проиллюстрировать рисунком 3 (б). Математика не даёт возможности однозначно установить координаты без физической интерпретации.

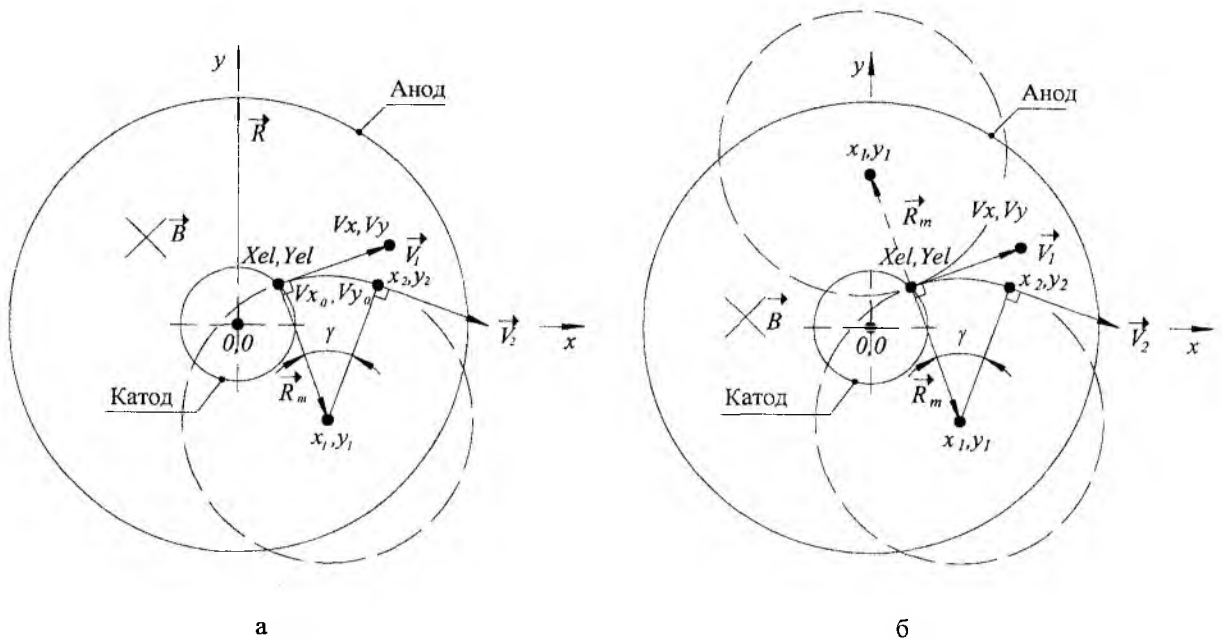


Рис. 3

Радиус \vec{R}_m был проведен перпендикулярно вектору скорости. Электрон движется в соответствии с правилом «правой руки», поэтому абсолютный угол вектора радиуса, проведенного от электрона к центру окружности траектории, всегда будет больше абсолютного угла вектора скорости на $\pi/2$. Это и будет критерием оценки. Для внедрения предложенного критерия необходимо ввести систему абсолютных углов с учётом возможных полных оборотов (рис. 4) при помощи специальной функции «Ang». Входными данными для неё будут координаты вектора (формальные параметры $xxx1, yyy1$ – начало, $xxx2, yyy2$ – конец), а выходными – абсолютный угол Ang . Она реализована согласно таблице 2. Принцип её использования представлен на рис. 5.

Таблица 2

Условие	Ang
$xxx2 > xxx1$ и $yyy2 > yyy1$	$Ang = \text{ArcTg}((xxx2 - xxx1) / (yyy2 - yyy1))$
$xxx2 > xxx1$ и $yyy2 < yyy1$	$Ang = \pi - \text{ArcTg}((xxx2 - xxx1) / (yyy1 - yyy2))$
$xxx2 < xxx1$ и $yyy2 < yyy1$	$Ang = \pi + \text{ArcTg}((xxx1 - xxx2) / (yyy1 - yyy2))$
$xxx2 < xxx1$ и $yyy2 > yyy1$	$Ang = 2 \cdot \pi - \text{ArcTg}((xxx1 - xxx2) / (yyy2 - yyy1))$

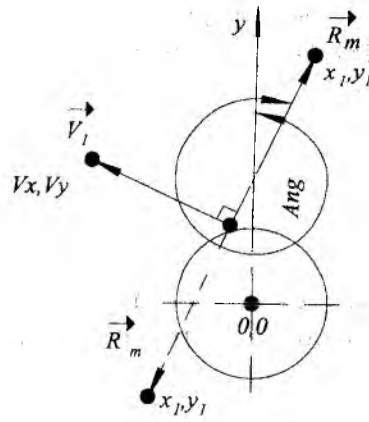


Рис. 4

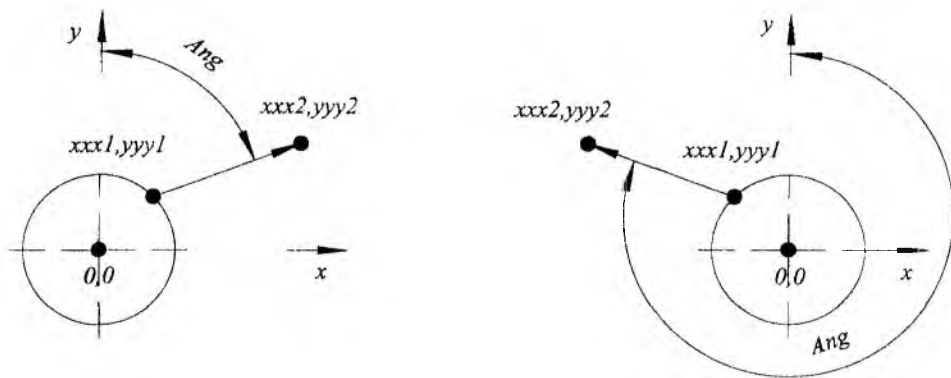


Рис. 5

Если выяснить угол вектора скорости, то угол вектора магнитного радиуса автоматически становится известным. Таким образом, локальную задачу определения координат x_1, y_1 конца радиуса оборота электрона можно считать решённой.

Используя скалярное произведение радиусов до и после поворота, ставим следующую локальную задачу определения координат радиуса x_2, y_2 после его поворота вокруг точки x_1, y_1 на угол γ . Для её решения составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = R_m^2, \\ (X_{el} - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (Y_{el} - y_1) \cdot (y_2 - y_1) = R_m^2 \cdot \cos \gamma. \end{cases} \quad (10)$$

В результате выполненных алгебраических преобразований получаем четыре пары значений x_2, y_2 . Неопределённость можно пояснить рисунком, аналогичным рис. 3 (б). Математика не позволяет однозначно установить координаты без физической интерпретации. Радиус в данной конфигурации полей всегда поворачивается по часовой стрелке, поэтому его следующий угол всегда будет больше предыдущего на γ . Это и будет критерием оценки правильных координат. Для реализации предложенного выше метода используем несколько иной принцип, чем при определении координат центра окружности, по которой двигался электрон. В данном случае будет удобнее записать все возможные варианты в двумерный массив, а потом сравнивать с критерием. Это целесообразно, поскольку мы не знаем, какая может быть разница между вариантами, а она иногда еле заметна. С другой стороны, выбор неверных координат вызывает сбой в программе и делает её непригодной для дальнейших исследований.

Локальную задачу определения координат x_2, y_2 конца радиуса оборота электрона после поворота на угол γ можно считать решённой. Начальные координаты вектора скорости изменяются в соответствии с положением электрона.

Следующая локальная задача заключается в определении координат V_x, V_y вектора скорости (рис. 6), который после оборота электрона изменил своё направление.

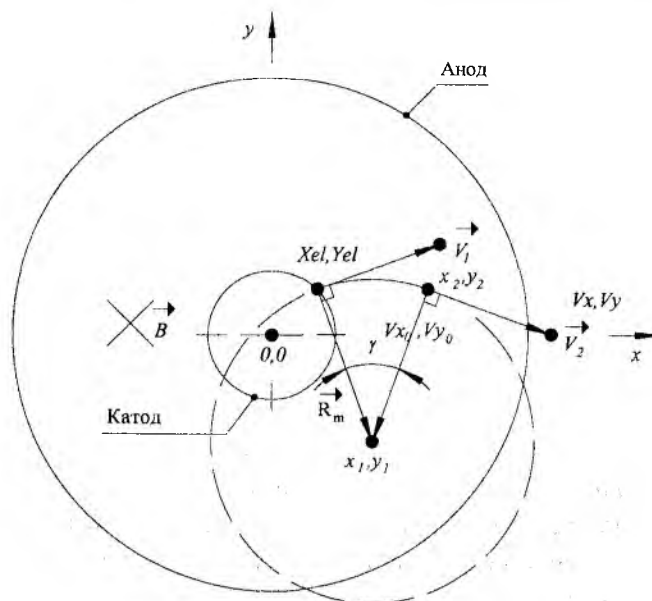


Рис. 6

Для её решения составим систему уравнений опираясь на равенство нулю скалярного произведения вектора скорости частицы и вектора магнитного радиуса. Данная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) \cdot (V_x - V_{x_0}) + (y_1 - y_2) \cdot (V_y - V_{y_0}) = 0, \\ (V_x - V_{x_0})^2 + (V_y - V_{y_0})^2 = V^2. \end{cases} \quad (11)$$

В результате выполненных алгебраических преобразований получаем две пары значений V_x, V_y . Неопределённость можно пояснить рисунком, аналогичным рисунку 3 (б). Математика не позволяет однозначно установить координаты без физической интерпретации. В данном случае целесообразно воспользоваться способом, который был успешно применён при установлении однозначности координат после решения системы 9.

Локальную задачу моделирования движения электрона в магнитном поле можно считать решённой. Далее электрон перемещается в точку с координатами x_2, y_2 и повторяется расчёт для определения его следующего состояния.

Анализ работы программы

Наш метод расчёта сравнивался с известным методом Рунге-Кутты четвёртого порядка [4]. Для этого были написаны две программы: одна с использованием метода Рунге-Кутты четвёртого порядка, а другая – на основе предлагаемого подхода. Сравнение работы обеих программ показало, что точность обоих методов существенно зависит от шага по времени. При этом программа, написанная с применением предлагаемого метода, работает значительно быстрее. Так, например, расчёт траектории движения электрона за 20 нс при прочих равных условиях был проведен быстрее в 2,5 раза.

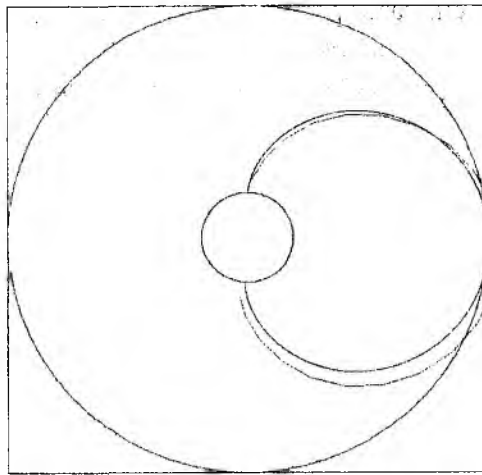


Рис. 7

Рассмотрим оценку точности расчётов для одной из тестовых задач. Пусть электрон с нулевой начальной энергией двигался в стационарных скрещенных полях в течение одного циклотронного периода. Определим энергию этого электрона в конце пути. Известно, что энергия электрона с нулевой начальной энергией при возврате на катод в стационарном поле должна быть равна нулю. Программа, написанная по методу Рунге-Кутты четвёртого порядка, для этого случая даёт значение 5,9 эВ. Программа на основе предлагаемого метода даёт значение 0,3 эВ, что в 20 раз точнее. При этом на последнем шаге применяется линейная аппроксимация, позволяющая оценить значения параметров при ударе с ещё более высокой точностью. Так, для описанного выше случая значение энергии электрона при ударе о катод равно 0,007 эВ.

На рис. 7 представлены траектории движения электрона, рассчитанные при разных шагах по времени. В каждом случае электрон вылетал из катода и пролетал 0,51 нс. Траектория, рассчитанная при шаге по времени $2 \cdot 10^{-11}$ с, значительно отличается от траектории, рассчитанной для шага по времени 10^{-13} с. Траектории, рассчитанные для шага 10^{-13} с и 10^{-14} с практически неразличимы. Дальнейшее уменьшение шага приводит к незначительному увеличению точности. Следовательно, нецелесообразно выбирать шаг менее 10^{-13} с из-за увеличения времени расчёта.

Выводы

В данной работе построена векторная численная модель для анализа движения электрона в скрещенных статических электрическом и магнитном полях в кинематическом приближении. Она позволяет прогнозировать состояние электрона в любой момент времени с определённой точностью, которая существенно зависит от шага дискретизации процесса по времени. Сравнение предлагаемого подхода с известными численными методами показывает его преимущество как по точности вычисления, так и по скорости счёта.

Список литературы: 1. П.Л. Капица. Электроника больших мощностей. М: АН СССР, 1962. 2. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями. Т. 1: Пер. с англ. / Под ред. М.К. Федорова. М.: ИЛ, 1961. С. 451 – 461. 3. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 391 с. 4. Д. Мак-Кракен, У. Дорн. Численные методы и программирование на фортране. М.: МИР, 1977. 579 с.