

ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА, ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Волков, И. П. Лыткин

Харьков

При решении задач оптимального управления различными техническими объектами и производственными процессами возникает необходимость в разработке оптимальных алгоритмов управления.

В теории оптимального управления для решения указанной задачи, относящейся к классу вариационных задач, существуют следующие методы: принцип максимума Л. С. Понтрягина, принцип оптимальности Р. Беллмана, метод Лагранжа и др. Указанные методы предназначены для решения задач оптимального программирования и только в весьма частных случаях позволяет решать задачи синтеза.

В ХИРЭ разработаны приближенные методы синтеза оптимальных алгоритмов управления, основанные на идеях методов Понтрягина, Беллмана и Четаева. Настоящая работа является первой попыткой в сжатой форме дать систематическое изложение полученных результатов.

Изложение начинается с описания метода «попятного движения». Идея этого метода, по-видимому, принадлежит Фельдбауму. Все другие методы впервые освещаются в литературе.

1. Математическая формулировка задачи. Пусть уравнения движения управляемого объекта, граничные условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$\dot{x} = f(x) + bU \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, x_0 \in \Omega, x(T) = 0; \quad (2)$$

$$I(u) = \int_0^T y(x(t))dt. \quad (3)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор n -мерного фазового пространства x , характеризующий состояние системы (1); $b = (b_1, \dots, b_n)$; n -мерный постоянный вектор; $u(t)$ — скалярная функция, вызываемая функцией управления; T — положительное действительное число, которое может быть как фиксированным, так и нефиксированным; $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ — векторная функция; $\varphi(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ — скалярные, в общем случае нелинейные функции, определенные, непрерывны и непрерывно дифференцируемые на некотором открытом множестве v , $v \equiv x$.

Ω — область управляемости $\Omega = v$. Будем считать что Ω ограничено. Если это не так, тогда все нижеследующие уравнения будем рассматривать на некотором замкнутом ограниченном множестве Ω .

Введем в рассмотрение множество U , элементами которого являются любые измеримые функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $u(t) \leq 1$, $0 \leq t \leq T$.

Требуется так определить управление $u(x)$, $u(x(t)) < u$, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1) при $u = u(x)$ удовлетворяло граничным условиям (2) и обращало в минимум функционал (3). Такое управление назовем оптимальным и обозначим его $u_0(x)$.

Любое управление $u(x)$, $u(x) \in U$, при котором соответствующая траектория $x(t)$ удовлетворяет условиям (2), назовем допустимым.

Последовательность $\{u_m(x)\}$ назовем минимизирующей, если она удовлетворяет условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I(u_m) = I(u_0).$$

Зная правила построения минимизирующей последовательности $\{u_m(x)\}$, мы можем построить допустимое управление $\{u_m(x)\}$, когда $I(u_m)$ сколь угодно мало будет отличаться от $I(u_0)$. Это управление $\{u_m(x)\}$ приближенно можно считать оптимальным. Так как задача рассматривается в открытой области v , $v \equiv x$, то для ее решения применимы как принцип максимума, так и принцип динамического программирования в обычной их формулировке. В работе применяются оба принципа.

Приступим к изложению методов построения управления $u(x)$, т. е. методов синтеза управления. Вначале опишем точные методы построения оптимальных по быстродействию управлений, затем перейдем к приближенным методам построения $u_0(x)$, оптимальных по минимуму более общего функционала (3).

2. Метод «попятного движения». Рассмотрим случай, когда уравнения (1) имеют вид

$$\dot{x} = Ax + bu \quad |u| \leq 1, \quad (4)$$

где A — постоянная матрица размерности $n \times n$, причем будем считать, что корни характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = 0 \quad (5)$$

действительны и неположительны. Оптимальный процесс (5) в этом случае состоит из n интервалов, в каждом из которых управляющее воздействие u постоянного и максимально по абсолютной величине; знаки управляющего воздействия чередуются на соседних интервалах. Это утверждение составляет основное содержание известной теоремы А. А. Фельдбаума об n интервалах.

Обобщение этой теоремы на уравнение (4) содержится в [2]. Для рассматриваемой задачи оптимальное управление существует во всем фазовом пространстве и единственно [2]. Другими словами, в какой бы точке фазового пространства система не находилась, управление будет принимать значение либо $u = +1$, либо $u = -1$. Следовательно, в любой момент времени фазовое пространство разбивается на две области, характеризующиеся значениями $u = +1$ и $u = -1$. Граница между указанными областями фазового пространства и есть гиперповерхность переключения

$$F(x) = 0. \quad (6)$$

Если известна функция $F(x)$, то оптимальное по быстродействию ($\varphi(x) \equiv 1$) управление определится по формуле

$$U_0 = \text{sign } F(x) \quad (7)$$

Укажем один способ построения уравнения (6) гиперповерхности переключения.

В уравнении (4) сделаем подстановку: $t = T - z$, $dt = -dz$
Тогда (4) перепишем так:

$$\frac{d}{dz} x = -Ax - BU \quad (8)$$

Решим уравнение (8) по формуле (15)

$$x(z) = e^{-Az} \cdot c - b \int_0^z e^{-A(z-\tau)} \cdot U(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где c — произвольный вектор фазового пространства x .

Определим вектор c . Для этого в уравнении (9) положим $z = 0$.
Получим $x(0) = 0 = e^{-A \cdot 0} \cdot c$,
откуда $c = 0$.

Подставляем значение c

$$x(z) = -b \int_0^z e^{-A(z-\tau)} \cdot U(\tau) d\tau$$

или

$$x(z_1^* = \varphi_1 - 0),$$

Пусть на первом (последнем) интервале управление будет $u = +1$.
Тогда получим

$$x(z) = -b \int_0^z e^{-A(z-\tau)} u(\tau) d\tau.$$

Обозначим через z_1^* момент времени первого (т. е. фактически последнего) переключения. Положив в предыдущем равенстве $z = z_1^*$, будем иметь

$$x(z_1^*) = b \int_0^{z_1^*} e^{-A(z_1^* - \tau)} d\tau$$

или

$$x(z_1^*) = \varphi(z_1^* - 0), \quad (10)$$

где $x(z_1^*)$ — изображающая точка в момент первого (последнего) переключения.

После переключения знак управления меняется на противоположный: $U = -1$. Подставляя значение $U(t)$ в уравнение (8) и интегрируя его при начальных условиях,

$$z = z_1^*; \quad x = (z_1^*);$$

на основании [15] получим

$$x(z) = e^{-A(z-z_1^*)} \cdot x(z_1^*) + b \int_{z_1^*}^z e^{-A(z-\tau)} d\tau.$$

Положив в последнем равенстве $z = z_2^*$, будем иметь

$$e^{-A(z_2^* - z_1^*)} \cdot x(z_1^*) + \varphi(z_2^* - z_1^*),$$

где $x(z_2^*)$ — изображающая точка в момент второго (предпоследнего) переключения и т. д.

Для k -го момента переключения изображающую точку находим по формуле

$$x(z_k^* = e^{-A(z_k^* - z_{k-1}^*)} x(z_{k-1}^*) + (-1)^k \varphi(z_k^* - z_{k-1}^*). \quad (11)$$

Фазовая траектория на $(n-1) - M$ интервале (т. е. на втором интервале) определяем из выражения

$$x(z) = e^{-A(z - z_{n-2}^*)} \cdot x(z_{n-2}^*) + (-1)^{n-1} \cdot \varphi(z - z_{n-2}^*), \\ (z_{n-1}^* \leq z \leq T - t_1^*);$$

Положим в последнем равенстве $z = z_{n-1}^*$, получим

$$x(z_{n-1}^*) = e^{-A(z_{n-1}^* - z_{n-2}^*)} \cdot x(z_{n-2}^*) + (-1)^{n-1} \cdot \varphi(z_{n-1}^* - z_{n-2}^*),$$

где $X(z_{n-1}^*)$ — изображающая точка в момент последнего (первого) переключения.

Подставляя в последнее равенство вместо $x(z_{n-2}^*)$, $x(z_{n-3}^*)$, ..., $x(z_1^*)$ их значения, найденные по формуле (11), будем иметь

$$e^{-A(z_{n-1}^* - z_{n-2}^*)} [e^{-A(z_{n-2}^* - z_{n-3}^*)} \dots e^{-A(z_2^* - z_1^*)} [-\varphi(z_1^* - 0)] + \\ + \varphi(z_2^* - z_1^*) \dots] + (-1)^{n-2} \cdot \varphi(z_{n-2}^* - z_{n-3}^*) + (-1)^{n-1} \cdot \varphi(z_{n-1}^* - z_{n-2}^*) = X(z_{n-1}^*) \quad (12)$$

Исключив из уравнения (12) величины z_1^* , z_2^* , ..., z_{n-1}^* , получим

$$L_{n-1}^I [x_1(z_{n-1}^*), \dots, x_n(z_{n-1}^*)] = 0.$$

Положив на первом (последнем) интервале $u = -1$, аналогичным путем найдем

$$L_{n-1}^{II} [x_1(z_{n-1}^*), \dots, x_n(z_{n-1}^*)] = 0.$$

Объединяя два последних уравнения в одно, получим уравнение гиперповерхности переключения

$$L_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

3. Метод, основанный на использовании функции Гамильтона и сопряженной системы. Для системы (4) запишем сопряженную систему [2].

$$\dot{P} = -AP \quad (13)$$

и функцию Гамильтона [2]

$$H(x, P, U) = \sum_{j=1}^n (a_j x_j + b_j U) \cdot P_j - 1,$$

где A' — транспонированная матрица A .

Из условия

$$H(x, P, U_0) = \max_{u \in U} H(x, P, U) = 0, \quad (14)$$

которое следует из принципа максимума, получаем

$$U_0 = \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i P_i.$$

Из (15) следует, что задачу построения $u_0(x)$ решим в том случае, если найдем зависимость P_i от $X_1, \dots, X_n$. Уравнения (4), (13) и (15)

определяют неявную зависимость P_0 от x_0 . Укажем способ определения зависимости $P_0(x_0)$ в явном виде. Сущность способа сводится к следующему. Используя способность оптимальных траекторий состоять из определенного, наперед известного числа интервалов, строим решение $x_i(x_{10}, \dots, P_{n0}, t)$ системы уравнений, описывающих движение объекта. Учитывая то обстоятельство, что при $t = T$ изображающая точка приходит в начало координат, получим

$$x_i(x_{10}, \dots, P_{n0}, T) = 0; \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Здесь T — продолжительность переходного процесса. Напишем функцию Гамильтона для момента времени

$$H(x(t), P(t)) = 0. \quad (17)$$

В левые части уравнений (16), (17) входят, кроме величин $x_{10}, \dots, P_{n0}$ еще и $t_1^*, \dots, t_{n-1}^*$, где t_k^* — моменты переключения управления. Следовательно, из уравнений (16), (17) еще нельзя определить зависимость $P_0(x_0)$. Добавим сюда уравнения

$$\sum_{i=1}^n b_i P_i(t) |t - t_k^*| = 0; \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (18)$$

Из уравнений (16) — (17) можно найти зависимость $P_0(x_0)$.

4. Приближенный метод синтеза, основанный на использовании функции Гамильтона и сопряженной системы. Рассмотренные выше (пункты 2, 3) точные методы синтеза позволяют построить только оптимальные по быстродействию управления, причем для линейных объектов с постоянными коэффициентами. Для решения более общей задачи, сформулированной в пункте, представляющем большой практический интерес, эти методы непригодны.

Для решения этой общей задачи предлагается применять разработанные на кафедре технической кибернетики ХИРЭ приближенные методы синтеза оптимальных алгоритмов релейного управления.

Запишем сопряженную систему

$$P_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial t_j}{\partial x_i} P_j + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (19)$$

и функцию Гамильтона

$$H(x, P, U) = \sum_{i=1}^n (f_i = b_i U)(P_i - \varphi).$$

Из условия

$$H(x, P, U_0) = \max_{u \in \pi} H(x, P, U) = 0$$

получим

$$U_0 = \text{sgn} \sum_{i=1}^n b_i P_i \quad (20)$$

$$H(x, P) = \sum_{i=1}^n |f_i P_i| + \left| \sum_{i=1}^n b_i P_i \right| - \varphi = 0. \quad (21)$$

Заметим, что формула (20) совпадает с (24). Для построения зависимости $P_0(x_0)$ мы не можем применить метод, основанный на функ-

ции Гамильтона и на сопряжении системы (см. раздел 3), так как оптимальные траектории уже не состоят из определенного, наперед известного числа интервалов. Чтобы все же построить управление $u(x)$, поступим следующим образом.

В выражениях (1), (20) и (21) функции $\text{sign } y$ и $|y|$ заменим функциями $\frac{y}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{m}}}$ и $\sqrt{y^2 + \frac{1}{m}}$ соответственно:

получим

$$\dot{x}_{mi} = f_i x_m + b_i \frac{\sum_{j=1}^n b_j P_{mj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n b_j P_{mj}\right)^2 + \frac{1}{m}}} \quad (22)$$

$$P_{mi} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{mi}} P_{mj} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{mi}}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (23)$$

$$H(x_m, P_m) = \sum_{i=1}^n f_i P_{mi} + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n b_i P_{mi}\right)^2 + \frac{1}{m}} - \varphi = 0, \quad (24)$$

Пусть $x_{mi}(x_{m0}, P_{m0}, t)$ решения управлений (22), (23). Из (5) следует существование таких решений $x_{mi}(t)$, когда при достаточно больших m ; $m = 1, 2, \dots$, точка $x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$ в момент T_m попадает в сколь угодно малую окрестность начала координат, если $x_{m0} \in \Omega$. Будем считать, что мы нашли такие решения. Тогда приближенно выполняются равенства

$$x_{mi}(x_{m0}, P_{m0}, T_m) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Из уравнений (24), (25) можно найти зависимость $P_{mi}(x_i)$. По формуле

$$U_m(x) = \text{sign} \sum_{i=1}^n b_i P_{mi}(x)$$

мы найдем допустимое управление. Если оптимальное решение задачи (1) — (3) существует и единственно, то, в силу теоремы 3 [5], имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I(U_m) = I(U_0). \quad (26)$$

Отсюда следует, что последовательность $\{U_m(x)\}$ является минимизирующей, т. е. с увеличением индекса m управление $\{U_m(x)\}$ сколь угодно точно аппроксимирует оптимальное управление $U_0(x)$. Укажем другие методы построения минимизирующих последовательностей.

5. Синтез оптимальных алгоритмов при помощи метода Якоби. Согласно принципу оптимальности Беллмана [6], необходимое условие оптимальности управления

$$\min_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^n (f_i + b_i U) \frac{\partial z}{\partial x_i} + \tau \right\} = 0, \quad (27)$$

где

$$z(x_0) = \min \int_0^T \varphi(x(x_0, t)) dt$$

($\varphi(x)$ — определенно положительная функция).

Из (27) следует, что оптимальное уравнение $u_0(x)$ определяется равенством

$$U_0(x) = - \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}. \quad (28)$$

Формулу (28) получим из (14), если в последней положить $P_i = -\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, n$. Подставляя (28) в (27),

$$\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial z}{\partial x_i} - \left| \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \right| + \varphi(x) = 0. \quad (29)$$

Из (28) и выражения для $z(x_0)$ следует, что при построении функции $U_0(x)$ достаточно найти определенно положительное решение уравнения (29). Однако это сопряжено с большими трудностями. Оказывается, что при приближенном решении задачи синтеза, т. е. при построении минимизирующей последовательности $\{U_m(x)\}$ вовсе нет необходимости решать уравнения (29). Достаточно построить последовательность $\{z_m(x)\}$, устремляющую к нулю левую часть уравнения (29). К этому выводу можно прийти, анализируя неравенство

$$I(U) - I(U_0) \leq \int_0^T \left| \sum_{i=1}^n f_i(x(t)) \frac{\partial z(x(t))}{\partial x_i} - \left| \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z(x(t))}{\partial x_i} \right| + \right. \\ \left. + \varphi(x(t)) \right| dt,$$

которое можно получить из (7).

Наряду с (29) рассмотрим уравнение

$$F_m(x, P) \equiv \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{m}} + \varphi = 0, \quad (31)$$

получаемое из (29) заменой функции (y) на функцию $\sqrt{y^2 + \frac{1}{m}}$.

Пусть $z_m(x)$ — решение уравнения (31).

Из последовательности $\{z_m(x)\}$ можно выделить последовательность, устремляющую к нулю левую часть уравнения (29). Если при этом функции $z_m(x)$, $\varphi(x)$ определенно положительные, то в силу прямой теоремы Ляпунова, функции $z_m(x)$ по формуле

$$U_m(x) = - \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z_m}{\partial x_i} \quad (32)$$

вольны. Тогда уравнение (31) интегрируем методом разделения переменных, причем в новых координатах значения переменных P_i , $P_i = + \partial z / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n$ найдем из уравнений

$$P_i = \sum_{l=2}^{n-1} a_{il} p_l(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$P_n p_n(x_n) - \sqrt{b_n P_n^2 + \frac{1}{m}} + \varphi(x_n) = 0;$$

(d_i — произвольные постоянные)

Укажем другой случай интегрируемости. Пусть (1) имеет вид $\dot{X} = A_x + bU$; $a(3) = \int_0^T x^* c x dt$. Здесь c — постоянная симметричная положительная матрица.

Пусть матрица A простой структуры, т. е. приводима к диагональному виду. Тогда, если k такая неособая преобразующая матрица, $x = kx$, что

$$k^{-1} A k = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$k^* c k = \text{diag}(l_1, \dots, l_n)$$

$$k^{-1} b = (0, \dots, 0, b_n).$$

Уравнение (31) интегрируется методом разделения переменных, причем в новых координатах значения переменных P_i найдем из уравнений

$$\lambda_i P_i x_i + l_i x_i^2 = c_i; \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$\lambda_n P_n x_n - \sqrt{b_n^2 P_n^2 + \frac{1}{m}} + l_n x_n^2 = 0.$$

Здесь C_i — произвольные постоянные.

Справедливость этих утверждений можно подтвердить путем непосредственных вычислений.

7. Синтез оптимальных алгоритмов при помощи метода наименьших квадратов. В разделах 2 и 3 изложены методы, которые применяются лишь в случаях, когда число интервалов, из которых состоят оптимальные траектории, заранее известно. Методы, изложенные в последующих разделах 4, 5, 6, могут применяться независимо от того, состоят ли оптимальные траектории из определенного и заранее известного числа интервалов или нет. Однако все эти методы обладают рядом серьезных недостатков. При их применении всегда возникает задача установления единой на всем множестве Ω аналитической записи для функции переключения $\Phi(x)$. Последнее достигается только при помощи вспомогательных геометрических построений, поэтому задачи синтеза практически могут быть решены лишь для случая фазового пространства размерности не более трех. Кроме того, построенные указанными методами функции переключения громоздки, что усложняет реализацию оптимального управления. Задача реализации, очевидно, упростится в значительной мере, если функцию переключения аппроксимировать алгебраическим полиномом. При этом сразу получаем также единую запись для $\Phi(x)$.

Приведем один конструктивный способ построения аппроксимирующих многочленов. Для этого рассмотрим уравнение

$$Bz_k - \psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

где

$$Bz_k = \sum_1^n f_i \frac{\partial z_k}{\partial x_i};$$

$$-\phi_k = -\sqrt{\left(\sum_1^n b_i \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_i}\right)^2} + \frac{1}{k} + \varphi.$$

Если z_k — решение уравнения (35), то из последовательности $\{z_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, устремляющую к нулю левую часть уравнения (29). Решение уравнения (35) также будем искать приближенно

$$z_{ek} = \sum_{i=1}^e a_{ik} \varphi_i; \quad e = 1, 2, \dots \quad (36)$$

В качестве координатных функций φ_i возьмем совокупность степеней $x^{i_1} \dots x^{i_n}$ переменных $x_1, \dots, x_n$; $i_1 + \dots + i_n = 1, 2, \dots$.

Поэтому функции z_{ek} являются алгебраическими многочленами. Если z_{ek} сходится к z_k при $e \rightarrow \infty$, то из последовательности $\{z_{ek}\}$ можно выделить подпоследовательность, устремляющую к нулю левую часть уравнения (29).

Из [10, 11] следует, что если функции $\psi(x)$, $f_i(x)$ бесконечно дифференцируемы, то метод наименьших квадратов позволяет построить последовательность $\{z_{ek}\}$, сходящуюся к z_k при каждом $x \in \Omega$, $e \rightarrow \infty$.

Сущность метода наименьших квадратов состоит в том, что коэффициенты a_{ik} разложения (36) находим из условия минимума выражения

$$\int_{\Omega} (Bz_{ek} - \phi_k)^2 dx.$$

Экстремальные значения a_{ik} должны удовлетворять уравнениям (10)

$$\sum_{j=1}^e (B\varphi_i, B\varphi_j a_{jk}) = (\phi_k, B\varphi_i), \quad i = 1, \dots, e, \quad (37)$$

где

$$(f_1, f_2) = \int_{\Omega} f_1(x) f_2(x) dx. \quad (38)$$

Решив алгебраические уравнения (37) и подставив найденные значения a_{ik} в выражение (36), мы получим по формуле (32) приближенно оптимальное управление, если функции $\psi(x)$, $z_{ek}(x)$ положительны. Заметим, что полученное при этом управление $U(x)$ можно переписать так:

$$U(x) = \text{sign} P_{e-1}(x), \quad (39)$$

где $P_{e-1}(x)$ — некоторый алгебраический многочлен степени не выше $e-1$.

8. Синтез оптимальных алгоритмов при помощи степенных рядов. Построение приближенно оптимального управления в виде (39) при помощи метода наименьших квадратов сопряжено со значительными трудностями, так как оно связано с решением уравнений (37), коэффициенты которых вычисляем по формулам (38). В некоторых случаях построение $U(x)$ в виде (39) можно упростить, применив для этих целей обычные степенные ряды.

Рассмотрим этот способ на конкретном примере. Пусть поведение объекта управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = ax_1 + b \cdot u; \quad x_2 = x_3;$$

$$\dot{x}_3 = ku; \quad |u(t)| \leq 1; \quad 0 \leq t \leq \alpha.$$

Требуется определить закон управления $U(x)$, оптимальный по минимуму функционала,

$$I(u) = \int_0^{\alpha} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dt.$$

Уравнение (31) запишется так:

$$(ax_1 + bx_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} - R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{1}{m}} + B + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \quad (40)$$

Подбором постоянной b можно добиться наилучшей аппроксимации $|y|$ функцией $\sqrt{y^2 + \frac{1}{m}} + B$ при малых значениях $|y|$. Уравнение (40) представим следующим образом:

$$ax_1 + bx_2 + \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{K}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{1}{2} m p_3^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) m^2 p_3^2 + \dots \right) + B + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}. \quad (41)$$

Относительно этого уравнения заметим, что оно имеет смысл при $|m p_3^2| < 1$, так как только в этом случае имеющийся в нем ряд сходится. Причем чем больше m , тем меньше диапазон изменения (допустимый) P_3 . Таким образом, желание увеличить степень близости решения уравнения (31) к решению уравнения (29) находится в противоречии с желанием увеличить допустимый диапазон изменения переменной P_3 . Решение уравнения (41) будем искать в виде

$$z(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1+i_2+i_3=0}^{\infty} a_{i_1 i_2 i_3} x_1 x_2 x_3. \quad (42)$$

Подставляя ряд (42) в уравнение (41) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x_i , получим уравнения, определяющие коэффициенты $a_{i_1 i_2 i_3}$. Если же положить $B \frac{R}{\sqrt{m}}$, то эта система распадается на отдельные системы с неизвестными $a_{i_1 i_2 i_3}$, для которых имеет место равенство $i_1 + i_2 + i_3 = \text{const}$.

Решив эти уравнения и подставляя полученные значения коэффициентов $a_{i_1 i_2 i_3}$ в усеченный ряд ряда (42), найдем приближенное значение решения уравнения (40). По формуле (32) находим приближенно оптимальное управление.

9. Синтез оптимальных алгоритмов при наличии двух ограничений. На практике довольно часто встречаются случаи, когда объект, описывается уравнением

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u; \quad i=1, \dots, n.$$

Здесь δ — координата регулирующего органа, связанная с управляющей функцией u зависимостью

$$\delta = KU$$

причем ограничения наложены на скорость перемещения $\delta: |\dot{\delta}| \leq 1$ и угол отклонения $\delta: |\delta| \leq \delta_m$ регулирующего органа.

Будем считать, что корни характеристического уравнения вещественны и положительны. В условиях двух ограничений для построения оптимального по быстродействию управления уже нельзя применить теорему Фельдбаума об интервалах. Однако и в этом случае оптимальные по быстродействию траектории могут состоять из определенного, наперед известного числа интервалов.

В (12) показано, что в случае, когда величина $\bar{t} = \delta_m / k$ значительно меньше длительности переходного процесса, оптимальные траектории состоят из $2n + 1$ интервалов, на каждом из которых либо u , либо δ принимают предельные значения. Интервалы, на которых $u = +1$ или $u = -1$ чередуются с интервалами, где $u = 0$, а $\delta = \delta_m$.

На основании этого утверждения методы, изложенные в разделах 2 и 3, позволяют определить уравнение гиперповерхности переключения.

10. Метод И. Г. Четаева и приближенный синтез линейных управлений. В (3) показано, что оптимальные по минимуму

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_1^n a_i x_i^2 + c U^2 \right) dt \quad (43)$$

линейные системы имеют линейный закон управления

$$U_0(x) = \sum_1^n k_i x_i. \quad (44)$$

Однако пользоваться этой теорией неудобно, так как неизвестно, из каких соображений нужно выбирать весовые коэффициенты a_i в (43). Оказывается, что значения коэффициентов k_i в (44) можно найти иным путем, лишенным указанного недостатка.

Пусть поведение объекта описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i U, \quad i = 1, \dots, n. \quad (45)$$

Закон управления будем искать в виде

$$U = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j.$$

После подстановки (44) в исходные уравнения получим

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (46)$$

Обозначим через $V(x_1, \dots, x_n)$ функцию Ляпунова системы (46). Потребуем, чтобы полная производная от V по t в силу (46) удовлетворяла условию

$$\frac{dV}{dt} = - \left(\sum_1^n x_i^2 \right). \quad (47)$$

Известно, что функция Ляпунова, удовлетворяющая (47), является квадратичной

$$2V = \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

Пусть при $t = t_0$ изображающая точка находится на сфере

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = A.$$

Тогда, по Н. Г. Четаеву [13],

$$A\lambda_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \leq V \leq A\lambda_n e^{-\frac{t}{\lambda_n}}; \quad (48)$$

$$T = \lambda_n e_n \frac{A\lambda_n}{\varepsilon\lambda_1}, \quad (49)$$

где λ_1, λ_n — минимальный и максимальный корни уравнения; $|b_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$; T — время перехода изображающей точки со сферы радиуса $\sqrt{A}$ на сферу радиуса $\sqrt{\varepsilon}$; $V(x)$ — положительно определенная квадратичная форма.

Для уменьшения T нужно, как следует из (49), уменьшать λ_n и увеличивать λ_1 путем соответствующего подбора k_i , $i = 1, \dots, n$. При этом $V(x)$ должна оставаться определенно положительной. Если в законе управления (44) использовать «нечистые» производные, то вместо k_i будут фигурировать параметры реального дифференцирующего устройства.

Зависимость λ_1, λ_n от k_i на практике приходится определять приближенно. Пусть уравнение $|b_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ в развернутом виде

$$b_0 \lambda^n + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0. \quad (50)$$

Тогда, как известно, приближенные значения определяются по формулам

$$\lambda_n = -\frac{b_1}{b_0}; \quad (51)$$

$$\lambda_1 = -\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Для более точного определения λ_1, λ_n можно использовать уравнения

$$\begin{aligned} b_0 x^2 + b_1 x + b_2 &= 0; \\ b_{n-2} x^2 + b_{n-1} x + b_n &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

11. Примеры построения оптимальных систем. а) Как следует из [14], линеаризованные уравнения, связывающие дебит воздуха u и концентрацию метана на добычном участке, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u; \quad |u| \leq 1; \end{aligned} \quad (53)$$

при этом корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$$

вещественны, отрицательны и различны. Следовательно, мы находимся в условиях применения теоремы Фельдбаума об n -интервалах. В данном случае $n = 2$. Так как число переключений управления равно $n-1$, то в рассматриваемом случае для приведения изображающей точки в нуль достаточно одного переключения оптимального по быстродействию управления $U_0(x)$, которое, согласно изложенному в пункте 2, запишем так:

$$U_0(x) = \text{sign } \Phi(x). \quad (54)$$

Уравнение линии переключения $\Phi(x) = 0$

можно найти при помощи методов, описанных в пунктах 2, 3. Применяя, например, метод «попятного движения», получим

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \left[\left(x_1 \frac{h_{22}}{\Delta} - x_2 \frac{h_{12}}{\Delta} \right) \text{sign} \left(kx_1 - x_2 + \frac{h_{20}h_{12} - h_{10}h_{22}}{\Delta} \right) + \frac{\lambda}{\Delta} + \right. \\ & \left. + \left(x_1 \frac{h_{21}}{\Delta} - x_2 \frac{h_{11}}{\Delta} \right) \text{sign} (kx_1 - x_2) + \frac{h_{10}h_{21} - h_{20}h_{11}}{\Delta} \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь h_{ij} , $i, j = 1, 2$; k, Δ — вещественные числа, зависящие от значений a_{ij} .

При $a_{11} = 0$; $a_{12} = 1$; $b_1 = 0$; $a_{21} = -2$; $a_{22} = -3$; $b_2 = 0,1$

$$\Phi(x) = (10(2x_1 - x_2) - 1)^2 + 20(x_1 - x_2) \text{sign}(2x_1 - x_2) - 1 = 0$$

оптимальное управление найдем по формуле (54).

б) В некоторых случаях уравнения, связывающие концентрацию метана с дебитом воздуха (14), выглядит так:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1\delta,$$

$$\delta = ku \quad |u| \leq 1; \quad |\delta| \leq \delta_m.$$

Величина $t = \delta_m / k$ намного меньше постоянной времени объекта. Следовательно, для построения оптимального по быстродействию управления $u_0(x)$ можно воспользоваться теорией, изложенной в пункте 9. Согласно этой теории, оптимальные траектории состоят из $2 \cdot 2 + 1 = 5$ интервалов, на которых управление u принимает значения $u = \pm 1$ и $u = 0$.

Для построения уравнения линии переключения можно применить методы, изложенные в пунктах 2 и 3. Применяя, например, метод «попятного движения», получим

$$\Phi(x) = x_1 + \frac{2}{\delta_m} k t^2 x_2 + \left(\frac{15}{8\delta_m} k^2 b_2 t^4 - \frac{7}{6} k b_2 t^{-2} + \frac{x_2^2}{2b_2\delta_m} \right) \text{sign } x_2 = 0.$$

Здесь

$$a_{11} = a_{21} = a_{22} = b_1 = 0; \quad a_{12} = 1.$$

Оптимальное управление найдем по формуле

$$u_0(x) = \text{sign } \Phi(x).$$

в) Задачу, рассмотренную в а) решим при помощи метода, изложенного в пункте 7. Уравнение (35) запишем так:

$$\begin{aligned} (-3x_1 - 2x_2) \frac{\partial z_k}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial z_k}{\partial x_2} - \sqrt{\left(-\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{m+k}} + \\ + 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь

$$a_{11} = -3; a_{12} = -2; a_{21} = 1; a_{22} = 0;$$

$$b_1 = -1, b_2 = +1$$

$$\varphi(x) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2; \Omega = \{x: |x_i| \leq 1\}.$$

Приближенное решение этого уравнения на каждом шаге будем искать в виде разложения

$$z_{2k} = a_{00}^{(k)} + a_{10}^{(k)}x_1 + a_{01}^{(k)}x_2 + a_{11}^{(k)}x_1x_2 + a_{20}^{(k)}x_1^2 + a_{02}^{(k)}x_2^2.$$

Решая уравнения (37), найдем $a_{00}^{(1)} = a_{10}^{(1)} = a_{01}^{(1)} = 0;$

$$a_{11}^{(1)} = 2; a_{20}^{(1)} = \frac{1}{2}; a_{02}^{(1)} = 2.$$

Поэтому

$$z_{21} = \frac{1}{2}x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Заметим, что в подкоренном выражении в (55) вместо $\frac{1}{k}$ стоит $\frac{1}{m+k}$

Очевидно, теория пункта 7 верна при любом натуральном m . При вычислении a_{ij}^k считается, что m достаточно велико; практически

$$\sqrt{y^2 + \frac{1}{m+k}} = |y|.$$

Второе приближение

$$z_{22} = \frac{1}{4}z_{21}.$$

Отсюда и из формулы (32) оптимальное управление приближенно

$$u(x) = -\operatorname{sign}\left(-\frac{\partial z_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial z_{22}}{\partial x_2}\right) = -\operatorname{sign}(x_1 + 2x_2).$$

Для системы, рассмотренной в а) аналогичные вычисления дают

$$u(x) = -\operatorname{sign}(5x_1 + 3x_2). \quad (56)$$

г) Эту же систему решим при помощи метода, изложенного в пункте 10, считая, что на управлении u ограничений не наложено. Тогда управление $u(x)$ будем искать в виде

$$u(x) = k_1x_1 + k_2x_2.$$

Приближенные значения k_1, k_2 , минимизирующие максимальный и максимизирующие минимальный корни уравнения (50), $k_1 = 5$ $k_2 = -2$.

При этом функция $V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 b_{ii}x_i^2$ остается определенно положительной.

Следовательно, согласно пункту 10, управление

$$u(x) = -5x_1 - 2x_2 \quad (57)$$

является приближенно оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. «Автоматика и телемеханика», т. XVI, № 2, 1955.
2. Л. С. Понтрягин и др. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
3. А. М. Лётов. Аналитическое конструирование регуляторов, I—IV. «Автоматика и телемеханика», т. XXI, № 4—6, 1960; № 4, 1961.

4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 4. Гостехиздат, 1949.
 5. А. Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. «Математический сборник», т. 61, № 1, 1960.
 6. Р. Беллман. Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
 7. В. Ф. Кротов. Приближенный синтез оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», т. 25, № 11, 1964.
 8. П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частыми производными. Гостехиздат, 1947.
 9. Р. И. Чертков. Методы Якоби в динамике твердого тела. Судпромгиз, 1960.
 10. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
 11. Л. Хермандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. Изд-во иностр. лит-ры, 1959.
 12. И. П. Лыткин. Об одной задаче оптимального управления. «Автоматика», № 1, 1966.
 13. Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1953.
 14. А. А. Волков и др. Моделирование газодинамических процессов объектов проветривания шахт. «Горные машины и автоматика». ЦНИИТЭИ Угля, № 8, 1965.
 15. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
-