

УДК 517.927:517.95]:519.6

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА У АНАЛІЗІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДВОВИМІР- НОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Василишин К.В.

e-mail: kostiantyn.vasylyshyn@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Ламтюгова С.М.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

In this work, the application of the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function is proposed for the numerical analysis of the first boundary value problem for a two-dimensional heat conduction equation, in which the thermal conductivity depends on temperature and the heat sources exhibit nonlinear behavior.

Процеси перенесення тепла є фундаментальними для широкого класу прикладних задач фізики, техніки та хімічної технології. У класичних моделях коефіцієнт теплопровідності є сталим, проте у реальних середовищах це припущення часто є неприйнятним і у багатьох практично важливих випадках теплопровідність залежить від температури, а також джерела тепла мають нелінійний характер. Такі ситуації виникають у термохімічних реакторах (екзотермічні реакції), плазмових та високотемпературних процесах, задачах теплового вибуху, композитних та функціонально-градієнтних матеріалах, геофізичних процесах тощо. При цьому нелінійність моделі зазвичай приводить до принципово нових ефектів. У зв'язку з цим розробка нових та вдосконалення існуючих обчислювальних методів дослідження таких задач є актуальною науковою задачею сучасної прикладної математики.

У роботі розглядається наступна двовимірна задача нелінійної теплопровідності:

$$-\operatorname{div}(\kappa(T) \operatorname{grad} T) = F(\mathbf{x}, T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де T – температура, $\kappa(T)$ – коефіцієнт теплопровідності, $F(\mathbf{x}, T)$ – функція, що характеризує об'ємне джерело тепла, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Вважатимемо, що $T(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\kappa(T)$ – неперервна і додатна (загалом кажучи, нелінійна) функція температури T , $F(\mathbf{x}, T)$ – неперервна і додатна функція для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $T > 0$.

Нехай $\kappa(T) = G'(T)$. Тоді задачу (1), (2) можна записати у вигляді

$$-\Delta(G(T)) = F(\mathbf{x}, T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

де Δ – двовимірний оператор Лапласа.

У задачі (3), (4) зробимо заміну $v = G(T)$. Оскільки $\kappa(T)$ є неперервною і додатною функцією від T , то $G(T)$ є неперервною, додатною і монотонною функцією від T , а отже, існує обернена до неї функція $T = G^{-1}(v)$. Тоді задача (3), (4) набуде вигляду

$$-\Delta v = F(\mathbf{x}, G^{-1}(v)), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$v|_{\partial\Omega} = G(0), \quad (6)$$

Якщо $G(0) \neq 0$, то в задачі (5), (6) ще зробимо заміну $v = u + G(0)$. Тоді для функції u отримаємо задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

де позначено $f(\mathbf{x}, u) = F(\mathbf{x}, G^{-1}(u + G(0)))$.

За зроблених вище припущень функція $f(\mathbf{x}, u)$ є неперервною і додатною для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $u > 0$. Поставимо задачу відшукування додатного розв'язку задачі (7), (8). Для цього застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [1, 2].

Якщо $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$), то задача (7), (8) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \quad (9)$$

Рівняння (9) розглядатимемо у просторі $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних в $\bar{\Omega}$, і напівоупорядкуємо цей простір конусом невід'ємних неперервних функцій $\mathcal{K}_+$. За узагальнений розв'язок u^* задачі (7), (8) приймемо розв'язок рівняння (9), який належить $\mathcal{K}_+$. Якщо функція $f(\mathbf{x}, u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v , w невід'ємна функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді для розв'язання рівняння (9) можна запропонувати наступний ітераційний процес, що двобічно збігається до u^* :

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{x}, v^{(k)}, w^{(k)}) d\mathbf{s}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{x}, w^{(k)}, v^{(k)}) d\mathbf{s}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Тут початкове наближення $v_0(\mathbf{x})$, $w_0(\mathbf{x})$ – кінці сильно інваріантного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ для гетеротонного оператора

$$\mathfrak{T}(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad (12)$$

що визначається правою частиною рівняння (9). Супровідним для оператора $\mathfrak{T}$ вигляду (12) є оператор $\hat{\mathfrak{T}}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s})) d\mathbf{s}$.

Для побудови функцій $v_0(\mathbf{x})$, $w_0(\mathbf{x})$ можна скористатися рекомендаціями, наданими у [3].

Двобічна збіжність ітераційного процесу (9) – (11) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Ця збіжність до єдиного на $\langle v_0, w_0 \rangle$ додатного розв'язку рівняння (9) (а отже, і єдиного додатного розв'язку крайової задачі (7), (8)) матиме місце, наприклад, за виконання умови u_0 -псевдоувігнутості гетеротонного оператора $\mathfrak{T}$ вигляду (13).

Перевагою методу є те, що на кожній k -й ітерації для наближеного розв'язку $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$ матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки: $\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2}\|w^{(k)} - v^{(k)}\|$. Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$. Тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$, а отже, для задачі (1), (2) розв'язок $T^*(\mathbf{x}) \approx G^{-1}(u^{(k)}(\mathbf{x}) + G(0))$.

Список використаних джерел:

1. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2021. № 3 (58). С. 26–41. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-3-3
2. Ламтюгова С. М., Поляков А. О., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження методами двосторонніх наближень крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2023. № 1. С. 142–148. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.21
3. Сидоров М. В. Застосування конструктивних методів теорії R-функцій для побудови конусного відрізка при чисельній реалізації двобічних ітераційних методів. *Біоніка інтелекту*. 2017. № 2 (89). С. 43–49.