

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕЙВЛЕТОВ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯХ

Как известно, на практике существует множество важных физических явлений, которые описываются сложнейшими формулами. В связи с этим появилась актуальная задача представления сложных функций более простой – задача аппроксимации. При этом весьма желательно, чтобы аппроксимация была как можно более точной и вычислялась за малое время.

С появлением функций, а затем сигналов, возникла достаточно общая задача их однообразного представления простыми функциями или рядами таких функций – задача приближения функций. Под простой функцией понимается возможность ее простого и быстрого вычисления. Рассмотрим некоторые из них.

С открытием рядов Фурье впервые появилась возможность однообразного представления произвольных (с оговоркой) функций и сигналов с помощью набора синусоид. Ряды Фурье долгое время воспринимались как математическая абстракция. Однако с появлением радиосвязи и с созданием высокоизбирательных радиоприемных устройств выяснилось, что гармоники сложных сигналов являются объективно существующими объектами и характеризуются их спектром. Появление сигналов с явно выраженными локальными особенностями, например импульсных, цифровых, сигналов изображения и т.д., стало демонстрировать невысокую эффективность и принципиальные недостатки Фурье-анализа и синтеза. В связи с этим предпринимались неоднократные попытки применения рядов с иными базовыми функциями (например, Уолша, Хаара и др.) [1].

В частности для систем радиосвязи, где сигнал является случайным процессом, известно, что наиболее точное решение задачи приближения можно добиться посредством разложения Карунена – Лоева. Таким образом, если $y(t)$ является реализацией действительного процесса с нулевым средним и корреляционной функцией $R_y(t, \tau)$, то $y(t)$ можно представить в виде [2]

$$y(t) = \sum_k C_k \varphi_k(t), \quad (1)$$

где C_k – коэффициент; $\varphi_k(t)$ – собственная функция $R_y(t, \tau)$.

Для представления сигнала в таком виде необходимо выполнение ряда условий, которые налагаются как на сам исходный сигнал, так и на дальнейшие его преобразования (например, на корреляционную функцию). Помимо этого высокая вычислительная сложность накладывает ограничение на практическое использование данного аппарата.

В настоящее время появилась возможность минимизировать эти ограничения путем применения вейвлет-преобразования. Вейвлеты (wavelets) представляют собой довольно обширный класс функций, имеющих вид коротких волн, ограниченных во времени или в пространстве и способных к перемещению и масштабированию. Вейвлеты могут представлять абсолютно точно или приближенно произвольные функции, сигналы и изображения, что и открывает перед ними перспективы широкого применения для анализа функций, обработки сигналов и изображения.

Таким образом, целью данной работы есть определение круга конкретных задач телекоммуникаций, которые позволит решить применение аппарата вейвлет-преобразования.

Идея вейвлет-преобразования состоит в общепринятом представлении сигнала $y(t)$ в виде взвешенной суммы (1) простых составляющих – базисных функций $\varphi_k(t)$, помножен-

ных на коэффициенты C_k . Поскольку базисные функции предполагаются заданными как функции вполне определенного вида, то коэффициенты C_k содержат информацию о конкретном сигнале. Таким образом, можно говорить о возможности представления произвольных сигналов на основе рядов (1) с различными базисными функциями. В отличие от базисных функций, представленных в виде комплексной экспоненты $\exp(itk) = \cos(tk) + i \sin(tk)$, которые предельно локализованы в частотной области, но очень плохо локализованы во временной области, или неких импульсных базисных функций (например, функции Кроненкера), которые четко локализованы во временной области, но не несут никакой информации о частоте сигнала, вейвлеты занимают промежуточное положение. Они хорошо локализованы как в частотной, так и во временной областях и способны адаптироваться к локальным изменениям сигналов посредством свойства масштабирования и сдвигов.

Вейвлеты могут быть ортогональными, полуортогональными, биортогональными. Эти функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными. Различают вейвлеты с компактной областью определения и не имеющие таковой. Некоторые функции имеют аналитическое выражение, другие – быстрый алгоритм вычисления связанного с ними вейвлет-преобразования. Вейвлеты различаются также степенью гладкости [3].

Выбор конкретного вейвлета зависит от анализируемого сигнала и от решаемой проблемы. Свойство регулярности, число нулевых моментов, число вейвлет-коэффициентов и т.д. являются критериями для выбора конкретного вейвлета, не говоря уже о требуемых вычислительных затратах. Иногда для выбора используется так называемый функционал информационной ценности. Пытаются минимизировать его и таким способом отобразить оптимальный базис. В частности, рассматривается энтропийный критерий вероятностного распределения вейвлет-коэффициентов. Энтропия функции по отношению к вейвлет-базису отражает число существенных членов разложения. Она определяется как

$$\exp\left(-\sum_k |C_k|^2 \log |C_k|^2\right).$$

Если имеется набор ортонормальных базисов, то выбираем для анализа функции тот, который приводит к наименьшей энтропии [4].

В качестве примера можно рассмотреть первую производную функции Гаусса, которая порождает wave-вейвлет, выражение для которого имеет вид:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad (2)$$

графическое изображение которого представляет собой антисимметричный вейвлет (рис. 1). И вторую производную, которая порождает вейвлет «мексиканская шляпа»:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t^2 - 1) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad (3)$$

графически представленный на рис. 2.

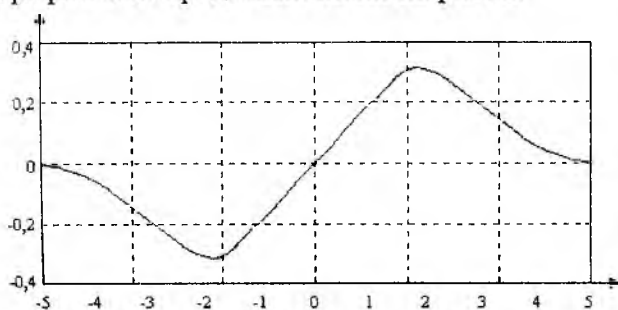


Рис. 1

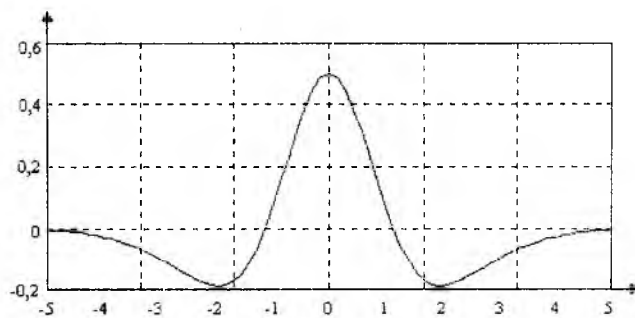


Рис. 2

Исследуем для простоты функцию $f(t) = \cos 2\pi t$ посредством базисных функций, представленных на рис. 1 и 2. Для функции (2) непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) вычисляется в соответствии с формулой:

$$\text{НВП}(a, b) = -\sqrt{2\pi} \omega^2 a^{\frac{-5}{2}} (\cos \omega b) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2a^2}\right), \quad (4)$$

где $\omega = 2\pi$ – частота косинусоиды при $f = 1\text{Гц}$.

Из (4) видно, что амплитуда преобразования убывает как при увеличении a (по степенному закону), так и при его уменьшении (по экспоненте). Большие значения a соответствуют коротким длительностям вейвлета, малые – большим длительностям. Используем теперь базисную функцию (3) и получим:

$$\text{НВП}(a, b) = -\sqrt{2\pi} \omega a^{\frac{-3}{2}} (\sin \omega b) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2a^2}\right), \quad (5)$$

откуда становится понятен фазовый сдвиг между сигналом и трансформантом как следствие появления синусной функции. Преставления вейвлет-коэффициентов изображены на рис. 3 и 4 соответственно. Из рисунков хорошо видно, что базисные функции разных видов отражают различные особенности одной функции.

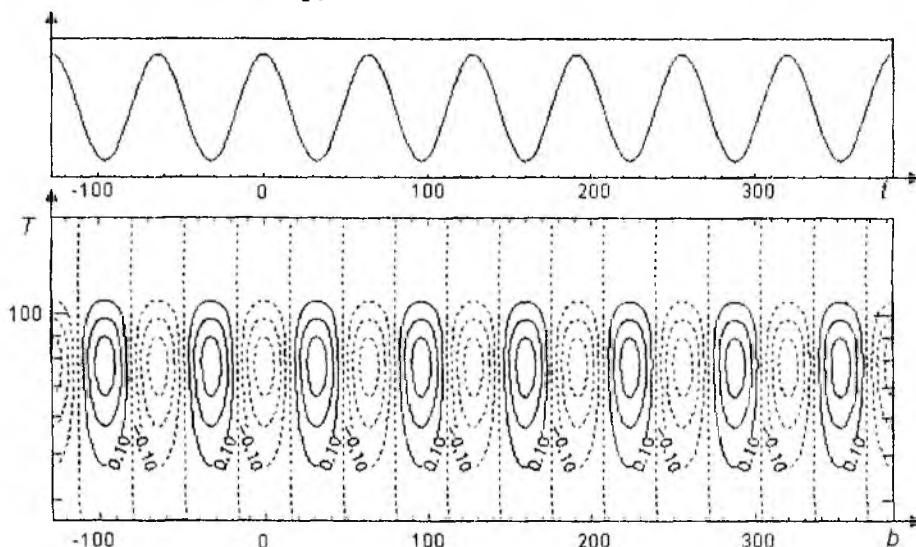


Рис. 3

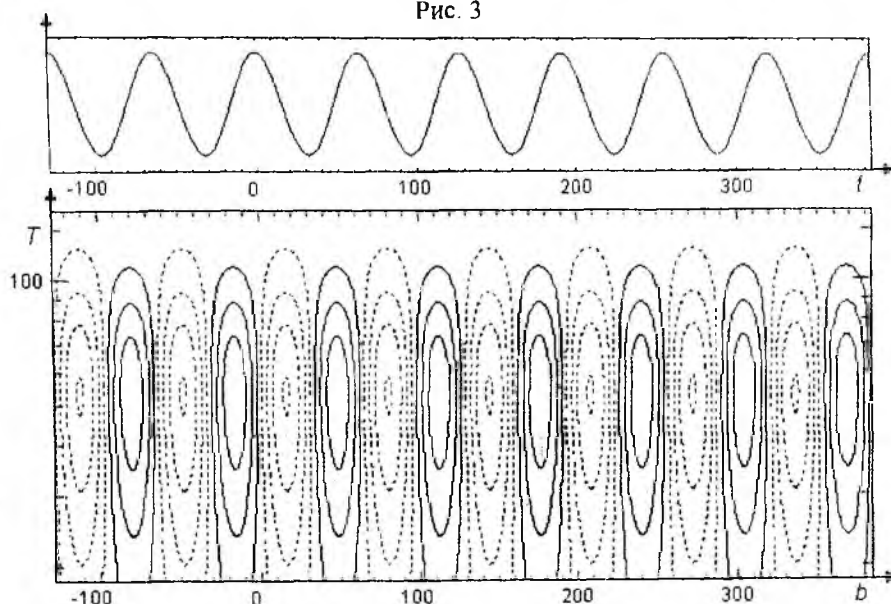


Рис. 4

Непрерывные вейвлеты допускают несколько более наглядное и зрелищное представление результатов анализа данного сигнала в виде локальных максимумов и графиков вейвлет-коэффициентов при непрерывных переменных. Однако обычно используемые базисы на основе непрерывных вейвлетов не являются, строго говоря, ортонормированными. В то же время с дискретными вейвлетами таких проблем не возникает. В силу этого дискретные вейвлеты приводят к более точному преобразованию и представлению сигнала и в особенности к его обратному восстановлению. Более того, они лучше подходят для теории и практики передачи информации.

Дискретные вейвлеты выглядят несколько необычно, потому что они не могут быть записаны в аналитической форме или же представлены в виде решений каких-то дифференциальных уравнений, а характеризуются набором численных коэффициентов в некоторых функциональных уравнениях, содержащих изменение масштаба и сдвиг аргументов. Вейвлет-базис задается с помощью итерационного алгоритма с изменением масштаба и сдвигом единственной функции. Это приводит к исключительно важной процедуре многомасштабного анализа, который в свою очередь делает возможными быстрые численные расчеты локальных характеристик на разных масштабах. Каждая шкала содержит независимую неперекрывающуюся информацию о сигнале в виде вейвлет-коэффициентов, которые легко вычисляются с помощью итерационной процедуры, известной под названием быстрого вейвлет-преобразования. В совокупности они решают проблему полного анализа сигнала и соответственно существенно упрощают диагноз вызвавшего его процесса.

Вейвлет-преобразование применяется для анализа сложных данных. Отображение данных в масштабно-временную (частотную) плоскости позволяет «высветлить» различные свойства сложного сигнала, невидимые при обычном представлении. Такое возможно благодаря большой избыточности преобразования, которая в общем может быть устранена при дальнейшей обработке на основе двух основных подходов (и бесчисленного числа их вариаций). Во-первых, на вейвлетной плоскости могут оставаться лишь только интересующие нас свойства сигнала, а остальное – удаляться. Другой подход является статистическим и заключается в вычислении распределений и моментов. Общий принцип построения базиса вейвлет-преобразования состоит в использовании масштабного преобразования и смещения. Любой из наиболее часто применяемых вейвлетов порождает полную ортонормированную систему функций с конечным носителем, построенных с использованием масштабного преобразования и сдвигов. Именно за счет изменения масштабов вейвлеты способны выявить различие в характеристиках на разных шкалах, а путем сдвига проанализировать свойства сигналов в разных точках на всем изучаемом интервале. В силу свойств полноты этой системы возможно сделать обратное преобразование. На рис. 5 приведен график синусоиды с разрывами, сигнала с шумом на ее основе и его спектрограммы. При построении вейвлет-спектрограммы использовался вейвлет sym4 .

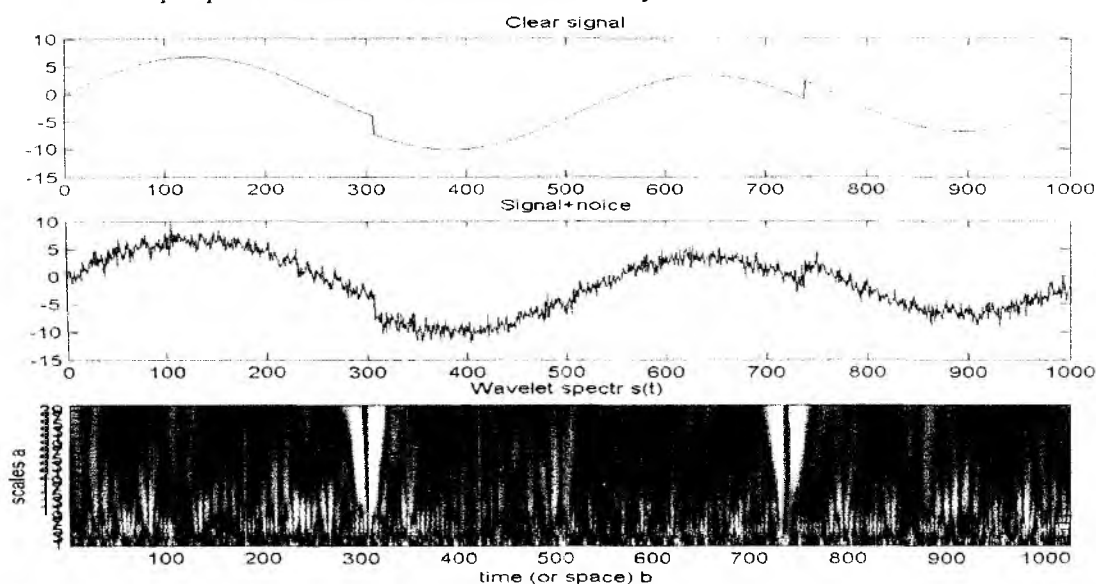


Рис. 5

Таким образом, применение данного математического аппарата позволит решить эффективно конкретные задачи в телекоммуникации, такие как:

- частотная коррекция сигнала;
- выделение спектральных компонентов;
- выявление частотных особенностей и времени их появления;
- очистка сигнала от шума;
- коррекция опорного вектора при условиях постоянного присутствия полезного сигнала;
- кодирования пользователей в системах с многостанционным доступом;
- обработка изображения и др.

Несмотря на очень активные исследования и полученные впечатляющие результаты, разнообразие подходов при вейвлет-анализе наводит на мысль, что эти исследования еще не вошли в завершающую стадию.

Список литературы: 1. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М: «Солон-Р», 2002. 408 с. 2. Кеннеди Р. Каналы связи с замираниями и рассеянием: Пер. с англ. / Под ред. И.А. Овсеевича. М: Сов. радио, 1973. 304 с. 3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. С.-Петербург: ВУС, 1999. 208 с. 4. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. 2001. Т. 171, № 5. С. 465 – 501.

Харьковский национальный
университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 03.04.2004