УДК 621.396.67

В. В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук, *В. Ю. РАДЧЕНКО*

ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК В АНТЕННЕ НА ЕЕ ПРЕДЕЛЬНЫЙ КНД. ЧАСТЬ 2

При практической реализации сверхнаправленных антенн с оптимальным АФР, полученным при решении детерминированной задачи синтеза, наиболее неприятным является чрезвычайная чувствительность оптимальной ДН к случайным ошибкам в амплитудно-фазовом распределении. Для ее оценки обычно используют такой параметр, как чувствительность ДН к случайным ошибкам

$$S = \frac{\int\limits_{-1}^{1} |A_0(x)|^2 dx}{\left|\int\limits_{-1}^{1} A_0(x)\, dx\right|^2} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_0(u)|^2 du}{|f_0(0)|^2}.$$

Он был впервые введен в работе [1] применительно к антенным решеткам. Этот параметр зависит только от характера АФР и указывает, насколько сильно искажается оптимальная ДН по мощности при появлении случайных ошибок в распределении источников, т. е. насколько сильно отличается средняя ДН по мощности от невозмущенной ДН.

Следует отметить при этом, что формула для S, полученная в работе [1], пригодна только при условии независимости ошибок. Поэтому для линейных антенн, у которых оно не выполняется, в общем случае (при произвольных c) использовать для вычисления S приведенное соотношение нельзя. Это же относится и к антенным решеткам для случая коррелированных ошибок. Более того, *при исследовании свойств антенн с оптимальным* АФР, полученным в результате решения задачи синтеза в статистической постановке, параметр S, как он был определен в работе [1], вообще теряет смысл. В этом случае совершенно не ясно, об искажениях какой ДН и относительно чего должна идти речь, поскольку случайные ошибки здесь учтены с самого начала и полученная ДН оптимальна именно при этих ошибках. Поэтому говорить об искажении оптимальной ДН при появлении случайных ошибок в АФ бессмысленно.

Тем не менее понятие чувствительности можно сохранить и при решении задач статистического синтеза, если вкладывать в него другой смысл и соответственно иначе его определять. Целесообразно ввести понятие чувствительности параметра, по которому проводился синтез (в данном случае среднего КНД) к «чужим» ошибкам. В такой трактовке он будет определять, насколько сильно изменится параметр, по которому проводился синтез, если в процессе реализации оптимального АФР или работы антенны по каким-либо причинам изменились дисперсия α и радиус корреляции c случайных ошибок. Понятие устойчивости можно ввести для оценки устойчивости максимального среднего КНД к неточности задания параметров ошибок в качестве исходных данных для задачи синтеза в статистической постановке.

Устойчивость и чувствительность максимального среднего КНД. Довольно часто точная информация об истинных параметрах ошибок $\alpha_р$, $c_р$ отсутствует, и в качестве исходных данных при синтезе приходится задавать приближенные значения $\alpha_с$, $c_с$. Найденное в результате решения оптимальное (для ошибок с $\alpha_с$ и $c_с$) АФР реализуется на самом деле с ошибками, имеющими дисперсию $\alpha_р$ и радиус корреляции $c_р$. Получаемое в этом случае среднее значение КНД — $\bar{D}(\alpha_с, \alpha_р, c_с, c_р)$. При этом возникают следующие вопросы. Во-первых, как будет соотноситься значение $\bar{D}(\alpha_с, \alpha_р, c_с, c_р)$ с максимально возможным для данной антенны и с данными ошибками средним КНД $\bar{D}_m(\alpha_р, c_р) = \bar{D}(\alpha_р, \alpha_р, c_р, c_р)$. Во-вторых, насколько будет отличаться реально получаемый средний КНД от ожидаемого максимального $\bar{D}_m(\alpha_с, c_с) = \bar{D}(\alpha_с, \alpha_с, c_с, c_с)$ и как их разность зависит от неточности задания параметров фазовых ошибок.

Первый вопрос можно рассматривать как вопрос об устойчивости максимального среднего КНД к неточности задания в качестве исходных данных, параметров фазовых ошибок α и c. Второй — как вопрос о чувствительности получаемого максимального среднего КНД к отклонению значений дисперсии и радиуса корреляции фазовых ошибок в реализуемом АФР от задаваемых при синтезе.

Устойчивость к $\Delta\alpha=\alpha_р-\alpha_с$ можно, ограничиваясь членами второго порядка малости по $\Delta\alpha$, характеризовать следующим выражением [2]:

$$\bar{D}(\alpha_с,\ \alpha_р,\ c_р,\ c_р)-\bar{D}_m(\alpha_р,\ c_р)=-(\Delta\alpha)^2 2a\,T_1(a,\ c_р)\sum_{n=0}^{N} a_{n0}^2\lambda_n, \qquad (1)$$

где

$$a_{n0}=\psi_n(a,\ 0)/\lambda_n;$$

$$T_1(a,\ c)=\frac{\left\{\sum_{n=0}^{N} a_{n0}^2\lambda_n \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\lambda_n}\left[\sum_{t=0}^{N} a_{t0}J_{nt}^{(1)}(a,\ c)\right]^2-\left[\sum_{n,t=0}^{N} a_{n0}a_{t0}J_{nt}^{(1)}(a,\ c)\right]^2\right.}{\left[\sum_{n=0}^{N} a_{n0}^2\lambda_n\right]^2}>0.$$

Положительность $T_1(a,\ c)$ нетрудно показать, если воспользоваться неравенством Коши — Буняковского [2].

Таблица 1

$\alpha_р$	$\alpha_с$				
	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
10^{-3}	0,454	1,340	1,644	1,545	1,383
10^{-2}	0,057	0,372	1,167	1,464	1,367

Из (1) видно, что неточное задание дисперсии $\alpha_с$ при синтезе на максимум среднего КНД всегда приводит к проигрышу в среднем КНД по сравнению с максимально возможным для данной антенны и с данными ошибками. Этот проигрыш сравнительно невелик, так как имеет второй порядок малости по $\Delta\alpha$. Приведенные в табл. 1 значения $\bar{D}(\alpha_с,\ \alpha_р)/D_0$ для антенны с $L=3\lambda$ и при радиусе корреляции ошибок $c_с=c_р=2{,}0$, полученные в результате точных численных расчетов, подтверждают этот вывод. Видно, что максимальное среднее КНД достаточно устойчиво относительно $\Delta\alpha$. Так, при $\Delta\alpha/\alpha_р=30$ % и $\alpha_р=10^{-3}$ (что соответствует $\Delta\varphi=1{,}8°$)

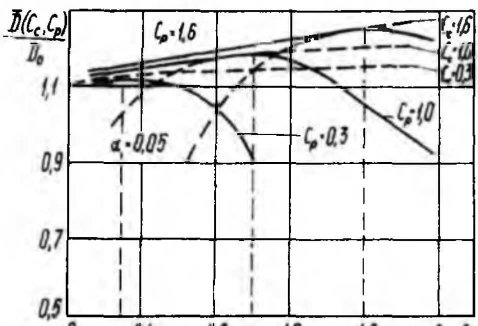

Рис. 1

$\Delta\overline{D}_m/D_m \leqslant 8$ %. Устойчивость увеличивается при снижении степени сверхнаправленности независимо от причины, по которой она уменьшилась: за счет дисперсии ошибок α или радиуса корреляции их c. Согласно расчетам для $\alpha_p = 0{,}2$ при $\Delta\alpha/\alpha_p = 30$ % проигрыш в КНД $\Delta\overline{D}_m/\overline{D}_m$ не превышает 2 %. Следует отметить, что устойчивость $\overline{D}_m$ меньше, т. е. проигрыш в $\overline{D}_m$ больше, если уровень ошибок (их дисперсия) при синтезе задается таким образом, что $\alpha_c < \alpha_p$, по сравнению со случаем, когда $\alpha_c > \alpha_p$. Поэтому, если точное значение дисперсии ошибок неизвестно, то при решении задачи синтеза предпочтительнее задавать значение величины α_c заведомо большее, чем α_p.

Аналитическая оценка устойчивости $\overline{D}_m$ по отношению к неточности задания радиуса корреляции c затруднительна. Как показывают численные расчеты, результаты которых приведены в виде графических зависимостей на рис. 1 (сплошные кривые), и в данном случае отклонение c_c от точного значения c_p слабо влияет на значение $\overline{D}_m$. Так, для антенны с $L = 3\lambda$ и фазовыми ошибками с дисперсией $\alpha_c = \alpha_p = 0{,}05$ и $c_p = 0{,}3$ отклонение $\Delta c = \pm(c_c - c_p) = \pm 0{,}2$ дает $\Delta\overline{D}_m/\overline{D}_m \leqslant 1{,}5$ %.

Таким образом, умеренно сверхнаправленное решение при синтезе антенны с максимальным средним КНД в статистической постановке оказывается устойчивым по отношению к неточности задания параметров ошибок.

Чувствительность максимального среднего КНД к неточности реализации уровня ошибок описывается выражением [2], записанным с точностью до первых степеней малости по $\Delta\alpha$:

$$\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p, c_c, c_p) - \overline{D}_m(\alpha_c, c_c) = -(\Delta\alpha)\, 2a \sum_{n,t=0}^{N} a_{n0} a_{t0} J_{nt}^{(1)}(a, c_c) \cdot$$

$$\left[1 - \alpha_c \frac{\sum\limits_{n,t=0}^{N} a_{n0} t_{t1} J_{nt}^{(1)}(a, c_c) - \sum\limits_{n,t=0}^{N} a_{n0} a_{t0} J_{nt}^{(2)}(a, c_c)}{\sum\limits_{n,t=0}^{N} a_{n0} a_{t0} J_{nt}^{(1)}(a, c_c)} \right]. \qquad (2)$$

Согласно численным исследованиям числитель дроби, стоящей в квадратной скобке, всегда положителен. Отсюда следует, что если $\Delta\alpha > 0$, т. е. $\alpha_p < \alpha_c$, то $\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p) > \overline{D}_m(\alpha_c, \alpha_c)$, а если $\Delta\alpha < 0$, то $\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p) < \overline{D}_m(\alpha_c, \alpha_c)$. Следовательно, реализация АФР с фазовыми ошибками, меньшиими по сравнению с теми, при которых проводился синтез, приводит к увеличению, а реализация с большими ошибками — к снижению реально получаемого среднего КНД по сравнению с ожидаемым значением. Это подтверждается результатами численных расчетов для антенны с $L = 3\lambda$ и $c = 2{,}0$, приведенными в табл. 2.

Характерно, что в данном случае отклонение среднего КНД от максимального $\overline{D}_m(\alpha_c, \alpha_c)$ пропорционально $\Delta\alpha$, в то время как

Таблица 2

α_c	α_p				
	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
10^{-3}	1,721	1,714	1,644	1,167	0,303
10^{-2}	1,555	1,554	1,545	1,464	0,967

при изучении устойчивости было получено, что отклонение среднего КНД от максимального $\overline{D}_m(\alpha_p, \alpha_p)$ пропорционально $(\Delta\alpha)^2$.

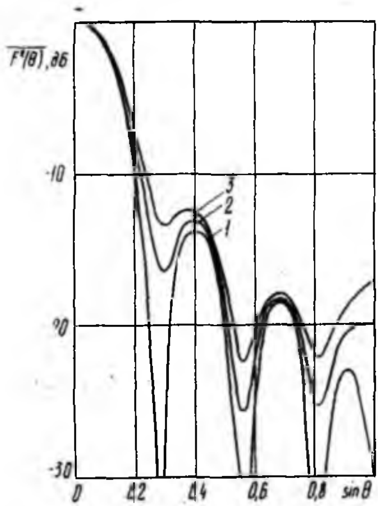

Рис. 2

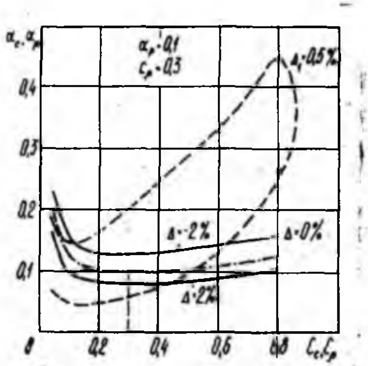

Рис. 3

Следствием этого является различный характер зависимости $\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p)$ от α_c при α_p=const и от α_p при α_c=const. В первом случае имеется явно выраженный максимум при $\alpha_c=\alpha_p$, во втором характер изменения $\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p)$ — монотонный. Указанное различие хорошо видно при сравнении результатов, приведенных в табл. 1, 2.

Множитель при $\Delta\alpha$ в выражении (2) можно рассматривать как чувствительность максимального среднего КНД к «чужим» ошибкам реализации, т. е. к разнице между уровнем ошибок, для которого проводился синтез, и уровнем, с которым АФР реализуется. Видно, что чувствительность тем больше, чем меньше α_c, поскольку с уменьшением α_c растет как значение выражения в квадратной скобке, так и количество членов N в сумме, а следовательно, и размер самой суммы, стоящей перед квадратной скобкой. Наибольшее ее значение достигается при $\alpha_c=0$, и оно соответствует чувствительности максимального КНД, получаемого при детерминированном синтезе без ограничений. Учет ошибок при статистическом синтезе значительно уменьшает чувствительность, Так, изображенные на рис. 2 средние ДН по мощности незначительно отличаются от оптимальной при $\Delta\alpha=\pm 0{,}1$ и $c_c=c_c=0{,}8$. Уровень первого бокового лепестка меняется не более чем на 0,5 дБ, ширина ДН на уровне 3 дБ практически одинакова. Наибольшее различие у ДН в области боковых лепестков.

Чувствительность к отклонению радиуса корреляции исследовалась численно. Некоторые результаты в виде зависимости $\overline{D}(c_c, c_p)$ от c_p показаны на рис. 1 (штриховые кривые) для антенны длиной 3λ и при $\alpha=0{,}05$. Из них следует, что при малых Δc разность $\overline{D}(c_c, c_p)-\overline{D}_m(c_c, c_c)$ зависит от Δc приблизительно по линейному закону.

В общем случае, когда при синтезе одновременно неточно задаются α_c и c_c или же при реализации АФР «чужие» ошибки также отличаются по обоим параметрам от заданных, представление о степени устойчивости и чувствительности $\overline{D}_m$ дают величины двухмерных областей α и c, в пределах которых $\Delta\overline{D}_m$ не превышает определенной величины. Соответствующие области показаны на рис. 3.

На рис. 3 через Δ обозначена $[\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p, c_c, c_p)-\overline{D}_m(\alpha_c, c_c)]/\overline{D}_m(\alpha_c, c_c)$, а через Δ_1 — $[\overline{D}(\alpha_c, \alpha_p, c_c, c_p)-\overline{D}_m(\alpha_p, c_p)]/\overline{D}_m(\alpha_p, c_p)$. Штриховой кривой ограничена область «устойчивости» к неточности задания параметров ошибок при синтезе, т. е. область значений параметров α_c и c_c, при которых $\Delta_1 \leqslant -0{,}5$ %. При этом ошибки, с которыми АФР будет реализовываться, имеют $\alpha_p=0{,}1$ и $c_p=$ $=0{,}3$. Сплошные кривые ограничивают область слабой чувствительности $\overline{D}_m$ — область значений α_p и c_p, при которых $|\Delta| \leqslant 2$ %. Видно, что максимальный средний КНД более устойчив и менее чувствителен к отклонению радиуса корреляции от точного его значения, чем к отклонению дисперсии.

Случайные ошибки и регуляризация. Выше было показано, что решение задачи синтеза антенны с максимальным КНД в статистической постановке оказалось устойчивым по отношению к неточности задания данных о статистике случайных ошибок (их дисперсии и радиусу корреляции), а также мало чувствительным к «чужим» ошибкам. Это позволяет говоригь о том, что учет случайных ошибок на этапе постановки задачи синтеза приводит к регуляризации ее решения как некорректной задачи математической физики.

Чтобы более детально понять роль случайных ошибок в регуляризации задачи синтеза антенны с максимальным средним КНД и установить взаимосвязь параметра регуляризации со статистикой ошибок, рассмотрим уравнение (11) из работы [2] относительно оптимального АФР.

$$\left[V-\alpha\,\frac{Q}{\mu_m}\right]\boldsymbol{a}\rangle=\boldsymbol{w}\rangle.$$

Воспользовавшись тем, что $V=B_0+\alpha B_1$, запишем его в следующем виде:

$$\left[\boldsymbol{B}_0+\alpha\left(\boldsymbol{B}_1-\frac{\boldsymbol{Q}}{\mu_m}\right)\right]\boldsymbol{a}\rangle=\boldsymbol{w}\rangle. \qquad (3)$$

Это уравнение справедливо при любых α и c. Элементы матриц $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{Q}$ зависят от дисперсии α и радиуса корреляции c. Наиболее простой вид они приобретают для малых α и c [2]. В этом случае матрицы $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{Q}$ можно считать диагональными с элементами $J_{nn}^{(1)}(a, c)$ и $I_{nn}^{(1)}(a, c, 0)$, причем $J_{nn}^{(1)}(a, c) = 2aI_{nn}^{(1)}(a, c, 0)$. Введем матрицу $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{Q}/\mu_m$ с элементами $J_{nn}^{(1)}(a, c)[1-1/D_m]$. Тогда (3) примет вид $[B_0+\alpha\boldsymbol{B}_2]\,\boldsymbol{a}>=w>$ **(4).** В отсутствие ошибок, т. е. при $\alpha=0$, оно переходит в известное уравнение для решения задачи детерминированного синтеза $\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{a}>=\boldsymbol{w}>$ **(5),** которая относится к некорректным задачам математической физики и дает неустойчивое решение. Для получения устойчивого решения можно, например, ограничить число гармоник в разложении искомого АФР или ввести дополнительную информацию о решении, т. е. наложить дополнительные ограничения. В детерминированной теории синтеза антенн ограничения обычно накладываются на норму тока, добротность, чувствительность к случайным ошибкам и т. п. При наличии указанных ограничений вместо (5) получается следующее уравнение: $[\boldsymbol{B}_0+p\boldsymbol{A}]\boldsymbol{a}>=\boldsymbol{w}>$ **(6),** где р — параметр регуляризации; $\boldsymbol{A}$ — диагональная матрица, которая в частных случаях может быть единичной.

Параметр p, содержащий неопределенный множитель Лагранжа, определяется из условия выполнения ограничений задачи. Последнее приводит к необходимости решения нелинейного уравнения. Параметр p изменяет в требуемой по условиям ограничений мере элементы главной диагонали матрицы и улучшает ее обусловленность. Однако при этом остается неясным вопрос о целесообразном выборе вида функции ограничений (нормы токов, добротности и т. д.), ее допустимом значении, возникают сложности в нахождении множителя Лагранжа и соответственно параметра p.

Физический обоснованный учет случайных ошибок на этапе постановки задачи приводит к уравнению (4), которое аналогично (6). При этом α играет роль параметра регуляризации, а $\boldsymbol{B}_2$ — роль стабилизирующего функционала, который зависит от радиуса корреляции ошибок.

Аналитически регуляризующее воздействие ошибок проявляется путем существенного подавления высших (реактивных) гармоник в разложении АФР и фактически к обрыванию ряда для АФР, так как, начиная с некоторого $n\geqslant N_m$, все амплитуды b_n пренебрежимо малы [3].

Указанное «ограничительное» воздействие ошибок можно использовать для упрощения процедуры вычислений при синтезе. При известных параметрах ошибок α и c можно сразу указать максимальное число членов ряда в разложении синтезируемого оптимального АФР, которое имеет смысл учитывать. Это максимальное N_m можно найти из условия

$$\alpha \frac{J_{N_m N_m}(a, c)}{\lambda_{N_m}} \geqslant 10 \qquad (7)$$

или для $c \ll 1$

$$\alpha \frac{ac}{\lambda_{N_m} \sqrt{\pi}} \geqslant 10.$$

С помощью (7) можно также определить те значения α и c, при которых следует ограничиться тем или иным значением N_m.

В работе изучено влияние случайных фазовых ошибок в амплитудно-фазовом распределении антенны на предельное значение ее среднего КНД. Исследование проводилось применительно к линейной непрерывной антенне нормального излучения со случайными фазовыми ошибками. Рассмотрена задача синтеза антенны с максимальным КНД. Случайные ошибки в распределении источников учитывались с самого начала — на этапе постановки задачи синтеза. Показано, что случайные ошибки существенно ослабляют явление сверхнаправленности по КНД, регуляризуют решение задачи синтеза. Изучены зависимости значения максимального среднего КНД от параметров случайных ошибок и от длины антенны, выявлены отличия от случая детерминированчого синтеза. Установлено, как зависит регуляризующее действие случайных ошибок от их дисперсии и радиуса корреляции. Проведено сравнение «естественной» регуляризации, обусловленной неизбежно присутствующими в антенне случайными ошибками, с регуляризацией, обеспечиваемой теми или иными ограничениями в детерминированной теории синтеза.

Список литературы: 1. *Gilbert E. N., Morgan S. P.* Optimum design of directive antenna array subject to random varions//Bell. Syst. Techn. J. 1955. 34, N 3. P. 637—663. 2. *Сверхнаправленность* в статистической теории антенн/Я. С. Шифрин, В. В. Должиков, В. Ю. Радченко. К., 1988. 140 с. Деп. в УкрНИИНТИ 05.01.88, № 86-Ук88. 3. *Должиков В. В., Радченко В. Ю.* Влияние случайных ошибок в антенне на ее предельный КНД. Часть 1//См. статью в настоящем сборнике.

Поступила в редколлегию 11.07.89