

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ α -СТІЙКИХ РОЗПОДІЛІВ

Мережкін Д.Г., Соболев В.І.

Науковий керівник – доц., к.т.н. Кіріченко Л.О.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Леніна, 14, каф. ПМ, тел. 8 (057) 702 14 36)

E-mail: merdenis@mail.ru

Analysis of time series with heavy tails of distributions is carried out.. It is shown that models of such series may appear stable processes. We obtain estimates of model parameters on the sample data.

В останні роки більшість проведених досліджень виявили цілий ряд специфічних особливостей часових рядів, породжених інформаційними потоками даних, такими як, наприклад, телекомунікаційні трафіки і фінансові ряди. Для їх моделювання застосовують випадкові процеси, які засновані на стійких випадкових величини.

Випадкова величина X називається α -стійкою, якщо для будь-яких двох додатних чисел a, b знайдуться додатні числа c, d такі, що

$$\text{Law}(aX_1 + bX_2) = \text{Law}(cX + d), \quad (1)$$

де $\text{Law}(\cdot)$ позначає закон розподілу, X_1 і X_2 – незалежні випадкові величини та $\text{Law}(X_1) = \text{Law}(X_2) = \text{Law}(X)$. Якщо виконується (1), то існує таке $\alpha \in (0, 2]$, не залежне від a і b , що для величини c в (1) виконується рівність

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha. \quad (2)$$

В загальному випадку для α -стійких розподілів в явному виді може бути записана тільки характеристична функція $\varphi(t) = M[e^{itX}]$. Характеристична функція стійкої випадкової величини $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ з параметрами $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ и $\mu \in R$ має вид:

$$\ln \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \left(1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|\right) + i\mu t, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Параметр α називається індексом стійкості, або характеристичним показником і визначає, наскільки виражений «важкий хвіст» розподілу. Параметр зміщення β задає степінь асиметричності розподілу: при $\beta = 0$ розподіл симетричний. Величина σ (масштабний параметр) виражає степінь розкиду значень відносно середнього значення, а μ при $\alpha > 1$ дорівнює математичному очікуванню X .

Параметр α відповідає за характер спадання хвостів розподілів. При $0 < \alpha < 2$ випадкові величини мають нескінченну дисперсію, а при $0 < \alpha \leq 1$ ще й мають нескінченне середнє. На відміну від розподілів з «легкими хвостами», такими як експоненціальне чи гауссівське, які мають експоненціальне спадання хвоста, випадкові величини з «важким хвостом»

мають хвости, спадаючими за степеневим (гіперболічним) законом. Основна властивість випадкової величини, розподіленої з «важким хвостом», є в тому, що вона є дуже мінливою. Іншими словами, її вибірка представляє собою в основному відносно невеликі значення, проте також містить і достатню кількість дуже великих значень

Існує декілька методів оцінювання параметрів стійких розподілів за вибірковими даними. Одним з найбільш популярних є непараметричний метод Хілла [1], що дозволяє оцінити ступінь важкості хвоста α . В цьому випадку для вибірки, яка містить n значень, обчислюється функція

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}},$$

де $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ - порядкові вибіркові статистики. Якщо $n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty, \frac{k}{n} \rightarrow 0$, то величина $H_{k,n} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.

Принципово іншим підходом, є метод, заснований на оцінюванні характеристичної функції [2]:

$$\phi(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Exp}(it x_j),$$

де $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - вибіркові значення випадкової величини. Метод містить кілька ітерацій, кожна ітерація складається з побудови регресійних залежностей, отриманих на основі властивостей вибіркової характеристичної функції.

У представлений роботі було проведено оцінювання параметрів стійких випадкових величин по модельним даним описаними вище методами. При моделюванні варіювалися параметри розподілів, а також розміри вибірок. Досліджено переваги і недоліки кожного методу, розроблено практичні рекомендації їх застосування.

Крім того, в роботі проведені дослідження з оцінювання параметрів стійкості реальних інформаційних процесів, таких як телекомунікаційні трафіки та фінансові часові ряди.

Перелік джерел

1. Hill B. M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution / B. M. Hill // *Annals of Statistics*. -1975. –V.3 – P.1163-1174.
2. Koutrouvelis I. A. Regression-type estimation of the parameters of stable laws / I. A. Koutrouvelis // *Journal of the American Statistical Association*. - 1980. –V.75 - P.918-928.