

Выводы

1. Пермутационные критерии представляют общую методологию синтеза непараметрических критериев, а не узкоспециальные статистические методы.
2. Данная методология позволяет легко синтезировать новые непараметрические критерии без привлечения каких-либо аналитических методов теории вероятностей и математической статистики. Это, в свою очередь, позволяет строить новые критерии непосредственно в процессе решения конкретной задачи и максимально полно адаптировать критерий к специфике этой задачи.
3. Синтез нового критерия сводится к выбору первичной статистики, чувствительной к отклонению от нулевой гипотезы. При этом методология синтеза пермутационных критериев автоматически обеспечивает формирование результирующей инвариантной статистики на основе выбранной первичной статистики.
4. Методология пермутационных критериев идеально подходит к задачам сравнения двух или нескольких распределений и к задачам обнаружения статистической связи произвольного вида.

Литература: 1. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика, 1983. 518 с. 2. Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики. М.: Знание, 1978. 64с. 3. Siegel S., Castellan N.J. Nonparametric statistics for the behavioral sciences. New York: McGraw-Hill. 1988. 399 p. 4. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. М.: Мир, 1978. 560с. 5. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. 408 с. 6. Good P.I. Resampling methods: a practical guide to data analysis. Boston: Birkhauser, 1999. 269 p. 7. Davison A.C., Hinkley D.V. Bootstrap methods and their application. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 582 p. 8. Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике. Современный подход. М.: Финансы и статистика, 1982. 198 с. 9. Елисеева И.И., Рукавишников В.О. Группировка, корреляция, распознавание образов (Статистические методы классификации и измерения связей). М.: Статистика, 1977. 144 с.

Поступила в редколлегию 18.02.2002

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Костенко П.Ю.

Колядин Владимир Леонидович, канд. техн. наук, докторант кафедры авиационно-космических радиотехнических систем Национального аэрокосмического университета "ХАИ". Научные интересы: неклассические методы анализа данных, включая обработку сигналов и изображений. Увлечения и хобби: история и методология науки, теннис. Адрес: Украина, 61129, Харьков, пр. Тракторостроителей, 162-Г, кв.128, тел.14-81-44.

УДК 517.9+538

ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕШЕТКИ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается точное аналитическое решение задачи об электромагнитном поле в решетке из плоских волноводов с диэлектрической пластиной. Для определения амплитудных коэффициентов применяется метод суммирования рядов по выборочным значениям.

1. Введение

Аналитические методы решения граничных задач занимают особое место в электродинамике. Полученные с их помощью результаты представляют интерес, поскольку являются основой для последующих численных расчетов. В связи с этим изучение и развитие методов решения граничных задач, допускающих построение строгого аналитического решения, остается актуальным во всех научных направлениях.

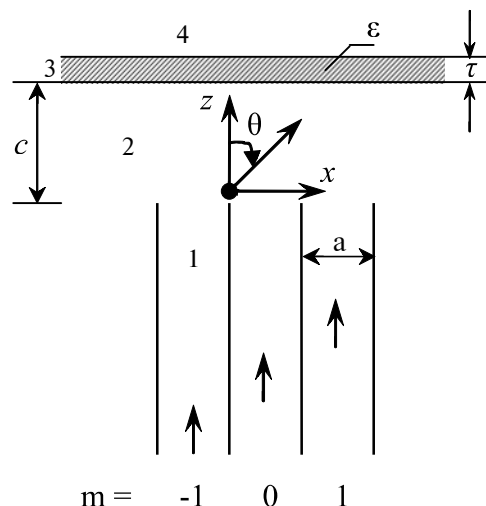
Большинство методов, используемых при расчете фазированных антенных решеток, основывается на классической теории [1,2], аналитических выводах [3-5], численных и экспериментальных результатах. Аналитические методы часто являются приближенными, а построенные на их основе численные — предполагают наличие временных затрат, связанных с вычислительной сложностью и повышением точности расчетов.

Таким образом, существует необходимость в разработке и развитии эффективных аналитических методов решения граничных задач, позволяющих строить точное решение, удобное для численного анализа.

Цель работы — получить аналитически выражения для амплитудных коэффициентов электромагнитного поля с использованием метода суммирования рядов по выборочным значениям.

2. Постановка и геометрия задачи

Рассматривается бесконечная периодическая система плоских волноводов, стенки которых считаются бесконечно тонкими, идеально проводящими, с расположенной над ней диэлектрической пластиной (рисунок) [1].



Все волноводы синфазно возбуждаются волной $TE_{1,0}$. Падающее поле в m -м волноводе имеет вид:

$$E_{y(\text{пад})}(x, z) = \varphi_{\text{пад}}(x, z) =$$

$$= \sin \left[\frac{\pi}{a} (x - ma) \right] e^{-\omega_l z} e^{i u}, \quad (1)$$

$$ma < x < (m+1)a, \quad z < 0,$$

где $\omega_n = [(\pi n/a)^2 - k^2]^{1/2}$, $u = ka \sin \theta_0$, θ_0 — направление излучения главной пространственной гармоники в области $z > c + \tau$, a — расстояние между плоскостями.

Требуется найти рассеянное поле внутри волноводов и в свободном пространстве.

3. Решение задачи

Для получения решения структура условно разбивается на четыре части: 1 — области между плоскими волноводами; 2 — область между волноводами и диэлектрической пластиной; 3 — область диэлектрической пластины; 4 — область вне пластины. В каждой из них поля представляются определенным образом. Затем применяется метод сшивания (метод частичных областей). Известным способом задача сводится к определению амплитуд электромагнитного поля, которые находятся в результате решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

3.1. Представление неизвестных полей

В m -м волноводе отраженное поле ищем в виде

$$\Phi_{\text{отр}}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left[\frac{\pi n}{a} (x - ma) \right] e^{+\omega_n z} e^{i u}, \quad (2)$$

$$z < 0, \quad ma < x < (m+1)a.$$

Согласно теореме Флоке [2] поля в свободном пространстве можно представить в виде суперпозиции пространственных гармоник:

$$\Phi_{\text{своб}}(x, z) = \begin{cases} \Phi_2(x, z), & 0 < z < c, \\ \Phi_3(x, z), & c < z < c + \tau, \\ \Phi_4(x, z), & z > c + \tau, \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где } \Phi_2 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [B_p e^{-\Omega_p z} + C_p e^{\Omega_p z}] e^{i \alpha_p x}, \quad (4)$$

$$\Phi_3 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [D_p e^{-\Omega'_p z} + E_p e^{\Omega'_p z}] e^{i \alpha_p x}, \quad (5)$$

$$\Phi_4 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} F_p e^{-\Omega_p z} e^{i \alpha_p x}, \quad (6)$$

$$\alpha_p = (2\pi p + u)/a, \quad \Omega_p = (\alpha_p^2 - k^2)^{1/2},$$

$$\Omega'_p = (\alpha_p^2 - k'^2)^{1/2}, \quad k' = k\sqrt{\varepsilon} = 2\pi/\lambda',$$

ε — диэлектрическая проницаемость пластины; λ' — длина волны в диэлектрике.

3.2. Выполнение граничных условий

Неизвестные коэффициенты $\{A_n\}$, $\{B_p\}$, $\{C_p\}$, $\{D_p\}$, $\{E_p\}$ и $\{F_p\}$ определяются из условия сшивания касательных составляющих полей E_y и H_x на граничных поверхностях $z=0$, $z=c$ и $z=c+\tau$.

Используя условие непрерывности касательных составляющих поля, получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений [1]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega_q - \omega_n} - \frac{\rho_q}{\Omega_q + \omega_n} \right) A'_n = \frac{1}{\Omega_q + \omega_l} - \frac{\rho_q}{\Omega_q - \omega_l}, \quad (7)$$

$$q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\text{где } A'_n = n A_n [(-1)^n e^{i u} - 1] / (1 + e^{-i u}), \quad (8)$$

$$\rho_q = e^{-2\Omega_q c} \frac{(\Omega_q^2 - \Omega'_q{}^2)(e^{\Omega'_q \tau} - e^{-\Omega'_q \tau})}{(\Omega_q + \Omega'_q)^2 e^{\Omega'_q \tau} - (\Omega_q - \Omega'_q)^2 e^{-\Omega'_q \tau}}. \quad (9)$$

Величина $\rho_q e^{2\Omega_q c}$ определяет коэффициент отражения пространственных гармоник $TE_{q,0}$ от поверхности диэлектрической пластины. Коэффициент прохождения для тонких пленок приведен в [8].

3.3. Выбор метода решения системы

Рассматриваемая решетка относится к структурам со специфической геометрией Винера-Хопфа [1, 5, 6]. Они представляют собой сочленение нескольких полубесконечных подобластей, которые принадлежат к области, служащей координатной поверхностью в системе координат с разделяющимися переменными. Применение метода сшивания решений к таким структурам приводит к бесконечной системе уравнений вида (7) относительно неизвестных коэффициентов $\{A_n\}$, которая в общем случае не может быть решена точно. Известные методы (разложения определителя и вычетов) позволяют получить либо решение системы в виде ряда, либо асимптотическое выражение [1]. Для многих практически важных задач главные члены найденного решения дают достаточно точный результат и могут считаться хорошими приближениями.

Метод разложения определителя [1] состоит в обобщении метода прямого обращения [1]. Определение коэффициентов основано на применении правила Крамера. Каждый столбец определителя матрицы системы образован суммой двух слагаемых, что позволяет представить детерминант в виде разложения в ряд. Матрица системы может быть выражена в виде суммы двух матриц. Одна из них совпадает с матрицей системы, полученной для структуры в отсутствие диэлектрической пластины, т.е. при $\varepsilon=1$ и $\rho_q=0$. Ее определитель представляется в виде бесконечных произведений.

По индукции можно получить разложение для основного определителя, включающее ряды с суммированием от $-\infty$ до ∞ . В общем случае в рядах необходимо учитывать 2^{2N+1} слагаемых, где N определяется из условия, что ρ_N и ρ_{-N} будут меньше некоторой наперед заданной величины. Пренебрежение величинами $\{\rho_q\}$ при $|q| > N$ объясняется тем, что взаимодействие с диэлектрической пластиной всех, кроме первых $(2N+1)$ пространственных гармоник, исчезающе мало из-за скользящего падения их на экран. Коэффициенты $\{A_n\}$ находятся с помощью правила Крамера, где определители считаются уже известными.

Вычисление сумм рядов достаточно трудоемко и эффективным является модифицированный метод вычетов (ММВ), в котором снимаются указанные ограничения [1]. Основным этапом в нем, как и в обычном методе вычетов, для получения решения является построение аналитической функции $f(w)$, удовлетворяющей определенным условиям. В результате задача снова сводится к бесконечной системе уравнений, решение которой сходится быстрее решения исходной системы. ММВ учитывает условие на ребре, из которого находится асимптотика $\{\Omega_m\}$. Далее применяется метод последовательных приближений (МПП). Обычно ограничиваются получением приближенного решения с помощью МПП [1], либо на его основе проводят численные расчеты.

Кроме МПП, используются также матричные методы [4], основанные на линейных алгебраических операциях.

Существует, однако, определенный класс граничных задач, для которых бесконечные системы допускают точное решение. Расширить его позволяет метод разложения функций в ряды по выборочным значениям, который основывается на следующей теореме и следствиях из нее [7].

Рассмотрим некоторый класс A функций, определенных на множестве T . Будем считать, что функция $f \in A$ может быть разложена в ряд по выборочным значениям в точках $t_i \in T$, если существует набор выборочных функций $\psi_i(s, t_i)$, таких, что:

1) $\psi_i(s, t_i) \in A$,

2) $\psi_i(t_i, t_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$

3) для любой функции $f \in A$ ряд

$$f(s) = \sum_i f(t_i) \psi_i(s, t_i)$$

сходится равномерно для $s \in T$.

Теорема. Пусть имеется абстрактное гильбертово пространство H с воспроизводящим ядром $K(s, t)$ (ГПВЯ), определенным на множестве T . Пусть $\{\varphi_i(s, t_i)\}$, $t_i \in T$ — полная ортонормированная система в H . Если существуют ненулевые вещественные постоянные c_i такие, что

$$\varphi_i(s, t_i) = c_i K(s, t_i), \quad |K(t, t)| \leq c_i < \infty, \quad t \in T,$$

то разложение по полной ортонормированной системе для любой $f \in A$, имеющее вид

$$f(s) = \sum a_i \varphi_i(s, t_i), \quad s \in T, \quad a_i = (f, \varphi_i),$$

является рядом по выборочным значениям.

Следствие [7]. В ГПВЯ H любая функция $f \in H$ разлагается в ряд по выборкам

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \frac{2i}{s+i} \frac{\sin \pi(s-i)}{\pi(s-i)}, \quad 0 < s < \infty. \quad (10)$$

3.4. Определение неизвестных коэффициентов

Перепишем систему (7) относительно неизвестных коэффициентов $\{A_n\}$ при $q = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\Omega_0 - \omega_n)a} - \frac{\rho_0}{(\Omega_0 + \omega_n)a} \right] A'_n = \\ = \frac{1}{(\Omega_0 + \omega_1)a} - \frac{\rho_0}{(\Omega_0 - \omega_1)a}. \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем общий член ряда в (11) при помощи представления (8):

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{(\Omega_0 - \omega_n)a} - \frac{\rho_0}{(\Omega_0 + \omega_n)a} \right] A'_n = \\ = \frac{(\Omega_0 + \omega_n)a - \rho_0(\Omega_0 - \omega_n)a}{(\Omega_0^2 - \omega_n^2)a^2} \times \\ \times n A_n [(-1)^n e^{iu} - 1] / (1 + e^{-iu}). \end{aligned} \quad (12)$$

Разложим знаменатель в правой части (12) на множители с учетом выражений для Ω_0 и ω_n :

$$(\Omega_0^2 - \omega_n^2)a^2 = \pi^2 [(u/\pi - n)(u/\pi + n)]. \quad (13)$$

После выполненных преобразований общий член ряда имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{(\Omega_0 - \omega_n)a} - \frac{\rho_0}{(\Omega_0 + \omega_n)a} \right] A'_n = \\ = \frac{(\Omega_0 + \omega_n)a - \rho_0(\Omega_0 - \omega_n)a}{\pi^2 \left(\frac{u}{\pi} + n \right) \left(\frac{u}{\pi} - n \right)} \times \end{aligned}$$

$$\times nA_n[(-1)^n e^{iu} - 1]/(1 + e^{-iu}). \quad (14)$$

Будем искать коэффициенты $\{A_n\}$ в форме:

$$A_n = A \frac{2\pi(1 + e^{-iu})}{(\cos \pi n)e^{iu} - 1}. \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), выделим в общем члене ряда (11) воспроизводящее ядро и просуммируем левую часть системы (7) при помощи (10). После указанных преобразований получим выражение для множителя A из (15):

$$A = \frac{\sin u}{2 \cos u \sqrt{u^2 - (ka)^2}} \times \left[\frac{1}{(\Omega_0 + \omega_1)a} - \frac{\rho_0}{(\Omega_0 - \omega_1)a} \right]. \quad (16)$$

Теперь с учетом (16) и (15) получим прямую формулу для определения искомых коэффициентов $\{A_n\}$:

$$A_n = \frac{\pi(1 + e^{-iu})}{[(\cos \pi n)e^{iu} - 1]} \frac{\sin u}{\cos u \sqrt{u^2 - (ka)^2}} \times \left(\frac{1}{a(\Omega_0 + \omega_1)} - \frac{\rho_0}{a(\Omega_0 - \omega_1)} \right). \quad (17)$$

Имея в явном виде выражение для коэффициентов $\{A_n\}$ в форме (17) и используя граничные условия для касательных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела $z = 0$, $z = c$, $z = c + \tau$ с учетом коэффициента отражения $\rho_q e^{2\Omega_q c}$, при необходимости можно найти амплитудные множители $\{B_p\}$, $\{C_p\}$, $\{D_p\}$, $\{E_p\}$ и $\{F_p\}$.

4. Сопоставление методов и выводы

Таким образом, получено точное аналитическое решение задачи о рассеянном поле в решетке из плоских волноводов с диэлектрической пластиной.

Сформулированная задача решена методом сшивания с применением гармоник Флоке, как и в [1,2], но в сочетании с методом суммирования рядов по выборочным значениям в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром. Применение последнего при вычислении рядов, встречающихся в процессе решения задачи, позволило получить решение бесконечных систем уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов электромагнитного поля. Для амплитудного множителя $\{A_n\}$ удалось получить явное представление в терминах элементарных функций.

Описанный в [1] подход к исследованию системы (7) объединяет метод прямого обращения матрицы и разложения детерминантов определенного типа в ряды. Решение, полученное таким способом, имеет вид бесконечного ряда и удобно для вычисления коэффициентов отражения при условии достаточно быстрого убывания $\{\rho_q\}$ с ростом $|q|$. В этом случае бесконечные ряды заменяются конечными суммами, учитывающими малое число членов.

Литература: 1. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 328с. 2. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 455с. 3. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288с. 4. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. К.: Наук. думка, 1984. 296с. 5. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280с. 6. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 280с. 7. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256с. 8. Борн М. Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1979. 856с.

Поступила в редколлегию 12.05.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Чурюмов Г.И.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.