Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова
Національний технічний університет України «КПІ»

ШІСТНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

14–15 травня 2015 р., Київ

МАТЕРІАЛИ КОНФЕРЕНЦІЇ

I

Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ИМПЕДАНСНЫХ КОНИЧЕСКИХ РЕШЁТКАХ

В. А. Дорошенко, А. А. Стрельницкий, А. Е. Стрельницкий, А. М. Титаренко

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

alex.strelnytskyi@gmail.com

Введение. Решение в строгой постановке модельных задач дифракции волн на экранах зачастую сводится к решению соответствующих краевых задач математической физики для волнового уравнения [1]. В случае дифракции монохроматических электромагнитных волн на импеденсных (неидеально проводящих) конических решётках посредством введения скалярных функций (функция Грина, потенциал Дебая) решение электродинамической задачи сводится к решению третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Формулировка краевой задачи. Рассматриваемая импедансная коническая решётка Σ представляет собой полубесконечный круговой конус с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями и углом раствора 2γ (рис. 1) (d — ширина щелей, $l = 2\pi/N$ — период решетки).

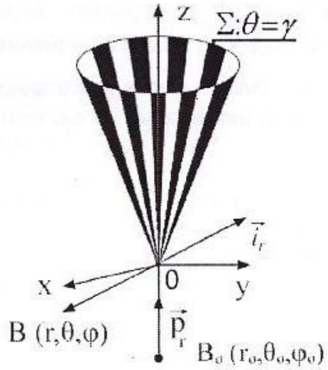

Рис. 1. Коническая решётка

Требуется найти скалярный потенциал u, который удовлетворяет:

1) уравнению Гельмгольца всюду вне конических лент решётки источника

$$\Delta u - q^2 u = 0,\ q > 0;$$

2) краевому условию на лентах решетки Σ

$$\left(\xi u + \zeta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \xi(r,\varphi)\cdot\zeta(r,\varphi) \neq 0;$$

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к решетке;

3) условию ограниченности энергии

$$\int_D \left(|u|^2 + |\nabla u|^2\right) dV < \infty;$$

4) условию на бесконечности.

Выполнимость условий 2)—4) обеспечивает единственность решения поставленной задачи. Во введенной сферической системе координат r,θ,φ с началом в вершине конуса ($r = 0$) краевое условие 2) записывается в виде

$$\left(\xi u + \zeta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,+\infty), \theta = \gamma, \varphi \in L\right\},$$

$$L = \bigcup_{s=1}^{N} L_s, L_s = \left((s-1)l + d/2, sl - d/2\right), CL = [0,2\pi] \setminus L,$$

В предположении, что $\xi = \frac{1}{r}\bar{\xi}$, $\bar{\xi} \in \mathbb{C}$, $\zeta = \bar{\zeta}$, $\bar{\zeta} \in \mathbb{C}$; или $\hat{\zeta} = \tilde{\zeta}\cdot r$, $\tilde{\zeta} \in \mathbb{C}$, $\hat{\xi} = \tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{C}$, условие (1) принимаст вид

$$\left(\bar{\xi}\cdot u + \bar{\zeta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\Big|_{\Sigma} = 0,$$

Искомый потенциал u представим в виде

$$u = u_0 + u_1,$$

где

$$u_0 = \exp\left(-q\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|\right)/4\pi r_0\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|$$

соответствует полю источника (первичное поле), а потенциал u_1 обусловлен наличием решетки. Для решения задачи используем пару интегральных преобразований Конторовича — Лебедева, с помощью которых потенциал u_1 ищем в виде интеграла Конторовича — Лебедева

$$u_1 = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \tau\, sh\pi\tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{m\tau} U_{m\tau}^{(1)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau,$$

$$U_{m,i\tau}^{(1)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n+m_0}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta)}{\frac{d}{d\theta}P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\gamma}} e^{i(nN+m)\varphi}, 0 < \theta < \gamma \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{m,n+m_0}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)}{\frac{d}{d\theta}P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos\theta)\Big|_{\theta=\gamma}} e^{i(nN+m)\varphi}, \gamma < \theta < \pi. \end{cases}$$

$b_{m\tau}$ — известные коэффициенты, $K_{i\tau}(qr)$ — функция Макдональда, $P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos\theta)$ — функция Лежандра 1-го рода.

Сингулярное интегральное уравнение. Для определения неизвестных коэффициентов $x_{m,n+m_0}$ и $y_{m,n+m_0}$ воспользуемся краевым условием, а также условием сопряжения в щелях, и получаем такие функциональные уравнения

$$\begin{aligned} &\tilde{\xi}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N(n+\nu)}\cdot\frac{|n|}{n}(1 - \breve{\varepsilon}_n^{*(1)}) z_n e^{in\psi} - \\ &-\tilde{\zeta}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu)\cdot\frac{|n|}{n}(1 - \breve{\delta}_n^{*(1)}) z_n e^{in\psi} = \bar{\xi}\cdot\hat{g}^*(\psi), \end{aligned} \qquad \psi \in S \qquad (2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n e^{in\psi} = 0, \qquad \psi \in CS, \tag{3}$$

$$d = l - \alpha,\ z_n = (-1)^n \left(y_{m,n} - x_{m,n}\right),$$

$$\psi = N\varphi - \frac{|\varphi|}{\varphi}\pi, S: |\psi| < \alpha\pi/l, CS: \alpha\pi/l < |\psi| \le \pi,$$

$\hat{g}^*$, $\breve{\varepsilon}_n^{*(1)}, \breve{\delta}_n^{*(1)}$ — известные. Введем в рассмотрение функцию

$$F(\psi) = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+\nu) z_n e^{i(n+\nu)\psi},\ \psi \in [-\pi, \pi], \tag{4}$$

где

$$z_n = \frac{1}{2\pi N i(n+\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} F(\psi) e^{-i\nu\psi} e^{-in\psi} d\psi,$$

и из (2). (3) получаем сингулярное интегральное уравнение (СИУ) для определения неизвестной функции $F(\psi)$ (4)

$$\frac{1}{\pi}\tilde{\zeta}^2 \int_S \frac{F(\beta)e^{-i\nu\beta}}{\beta - \psi} d\beta + \frac{1}{\pi}\int_S \breve{K}_{m\tau}(\beta - \psi) F(\beta) e^{-i\nu\beta} d\beta = \tilde{\xi} \cdot \hat{g}^*(\psi), \psi \in S, \tag{5}$$

$$\breve{K}_{m\tau}(\phi) = \tilde{\zeta}^2 \left(\frac{1}{2} ctg \frac{\phi}{2} - \frac{1}{\phi}\right) + \frac{1}{2iN}\left(\tilde{\xi}^2 A_\tau^\nu - \tilde{\zeta}^2 \frac{1}{A_\tau^\nu}\right)\left(\frac{1}{\nu} - \frac{\pi}{\sin \pi\nu} e^{i\nu\phi}\right) +$$

$$+\frac{1}{2i}\tilde{\xi}^2 \left[\sum_{n\ne 0} \frac{1}{N^2(n+\nu)^2} \frac{|n|}{n} e^{-in\phi} - \sum_{n \ne 0} \frac{1}{N^2(n+\nu)^2} \frac{|n|}{n} \breve{\varepsilon}_n^{*(1)} e^{-in\phi}\right] + \frac{1}{2i}\tilde{\zeta}^2 \sum_{n\ne 0} \frac{|n|}{n} \delta_n^{*(1)} e^{-in\phi},$$

Полученное СИУ (5) с ядром Коши и гладкой функцией $\breve{K}_{m\tau}(\phi)$ может быть численно решено путем дискретизации и использования гауссовых квадратур [2].

Заключение. Показано, что третья краевая задача уравнения Гельмгольца для полубесконечного конуса с периодически прорезанными щелями равной ширины с помощью интегральных преобразований Конторовича — Лебедева сводится к сингулярному интегральному уравнения с ядром Коши. Используемый метод может быть использован для решения третьей и четвёртой краевых задач уравнения Гельмгольца с периодической конической структурой, на периоде которой находятся произвольное количество щелей различной ширины.

Список литературы

1. Ваганов Р. Б., Каценельбаум Б. З. Основы теории дифракции. — М.: Наука,1982. — 272 с.

2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М: ТОО «Янус», 1995. — 520 с.

ПРО КВАЗІПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

eromenko-v@rambler.ru, aliluyko@imath.kiev.ua

Об'єктом дослідження є система диференціальних рівнянь

$$\dot{\phi} = \omega,\ \varepsilon A(\phi)\ddot{x} + B(\phi)\dot{x} + C(\phi)x = f(\phi), \tag{1}$$

де $\phi \in \mathbb{R}^m$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ — частотний базис, $x \in \mathbb{R}^n$; дійсні квадратні матриці A, B, C та n-вимірний вектор f задані на m-вимірному просторі T_m; крапка означає диференціювання по незалежній змінній t, ε — малий додатний параметр. При цьому A є симетричною і вироджується на множині довільної структури. Вивчається задача про існування гладкого квазіперіодичного розв'язку системи (1) для довільної неоднорідності $f(\phi)$.

Система вигляду (1) для випадку $\phi = t \in [a, b]$ і несиметричної матриці $A(t)$ досліджувалася в [1] при певних припущеннях, одним із яких є сталість рангу матриці $A(t)$.

Визначимо скалярні функції $\beta_0(\phi, \varepsilon)$, $\alpha(\phi)$, $\beta(\phi)$ та $\alpha_0(\phi)$ наступним чином:

$$\min \left\langle \left\{ B(\phi) - \varepsilon \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi_i} + A(\phi) B^{-1}(\phi) C(\phi) \right] \right\} x, x \right\rangle \ge \beta_0(\phi, \varepsilon),$$

$$\max_{\|x\|=1} \left\langle A(\phi)x, x \right\rangle \le \alpha(\phi), \qquad \max_{\|x\|=1} \left\langle B^{-1}(\phi) C(\phi) x, x \right\rangle \le \beta(\phi),$$

$\alpha_0(\phi)$ — мінімальний корінь рівняння, яке в залежності від значення m має такий вид

$$\det\left(\sum_{i=1}^m \omega_i \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi_i} - \lambda I_n\right) = 0, \text{ якщо } m = 1,$$

$$\det\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi_i} - \lambda I_n & \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_2} - \omega_2 \frac{\partial A}{\partial \phi_1}\right) & \cdots & \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_m} - \omega_m \frac{\partial A}{\partial \phi_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_2} - \omega_2 \frac{\partial A}{\partial \phi_1}\right) & -\lambda I_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_m} - \omega_m \frac{\partial A}{\partial \phi_1}\right) & 0 & \cdots & -\lambda I_n \end{pmatrix} = 0,$$

якщо $m \ge 2$, де I_n — одинична матриця порядку n.