

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

И. В. Витенько, А. П. Стахов

Харьков

Современное состояние техники аналого-цифрового преобразования характеризуется повышенным интересом к теории алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Некоторые основные положения этой теории содержатся в работах Карла Эйлера [1], Э. И. Гитиса и Э. Ф. Ильюшенкова [2], П. Е. Твердохлебова [3]. В настоящей статье делается попытка дать строгое определение оптимального алгоритма и включить в теорию некоторое число новых факторов, в частности, влияние динамических свойств реальных компараторов на выбор алгоритма аналого-цифрового преобразования.

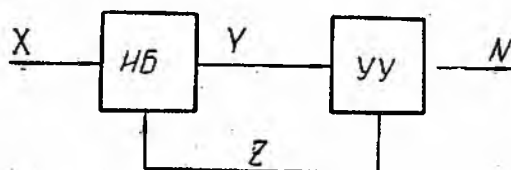


Рис. 1.

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) может быть представлен в виде двух функциональных блоков: индикаторного блока ИБ и устройства управления УУ (рис. 1).

На вход ИБ поступает преобразуемый сигнал X , принадлежащий множеству мгновенных значений преобразуемых сигналов $[X_{\min}, X_{\max}]$ ($X_{\min}, X_{\max}$ — минимальное и максимальное значения сигнала X). В начальный момент существует некоторая неопределенность относительного значения сигнала X . УУ управляет работой ИБ. Цель процесса управления ИБ, протекающего в АЦП, — за конечное число опытов (ходов) уменьшить исходную неопределенность до требуемого значения. Уменьшение неопределенности или энтропии X связано с получением информации относительно X в результате опытов. Устройством, извлекающим информацию о величине X в каждом опыте, является ИБ.

Каждый опыт — это формирование с выхода УУ некоторых эталонных сигналов Z , управляющих работой ИБ, и появление на выходе ИБ векторного сигнала Y , несущего в себе информацию относительно X . Каждый следующий опыт, начиная со второго, в общем случае зависит от результатов предыдущих опытов.

Для любого процесса управления характерно наличие алгоритма управления — системы формальных правил, четко определяющих процесс реализации определенной цели [4]. Под алгоритмом аналого-цифрового

преобразования будем понимать систему логических правил, положенных в основу функционирования устройства управления индикаторным блоком.

Решить задачу аналого-цифрового преобразования или задачу уменьшения энтропии X до требуемого значения можно различными путями, т. е. можно предложить много различных алгоритмов, решающих одну и ту же задачу. Интерес представляют оптимальные, т. е. наилучшие в некотором смысле алгоритмы аналого-цифрового преобразования.

Цель настоящей работы — построить некоторую теорию оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. В центре внимания предлагаемой теории находится индикаторный блок. Типы и свойства *ИБ* существенно влияют на алгоритм аналого-цифрового преобразования.

ТИПЫ И СВОЙСТВА ИНДИКАТОРНЫХ БЛОКОВ

Индикаторным блоком первого вида назовем *ИБ*, состоящий из многопороговых индикаторных элементов (МИЭ). На рис. 2 показана развертка кодового диска преобразователя «угол—код», приведенная к отрезку $[0,1]$. Преобразователь «угол—код» состоит из трех элементов.

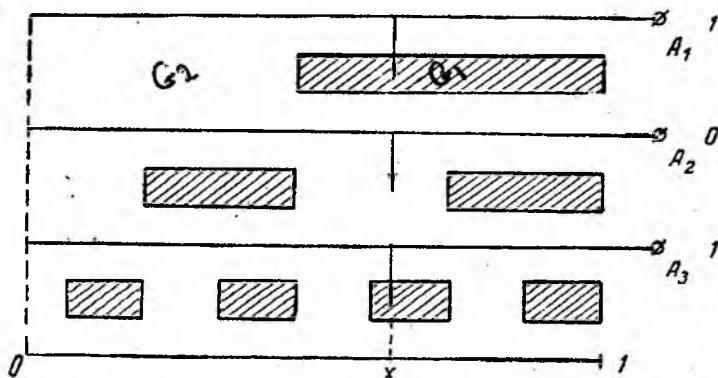


Рис. 2.

Каждый элемент, в свою очередь, состоит из кодовой дорожки и считывающей щетки. На вход каждого элемента поступает сигнал $x \in [0,1]$; с выхода элемента снимается двоичный сигнал 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит ли x заштрихованному (G_1) или незаштрихованному (G_2) сектору кодовой дорожки, т. е. определяется истинность предиката $x \in G_1$.

Моделью кодовой дорожки является многопороговый индикаторный элемент (МИЭ), представляющий собой устройство с одним измерительным или воспринимающим x и m эталонным или пороговыми ($x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_m}$) входами и одним выходом Y .

Для определенности будем считать

$$x_{\alpha_1} < x_{\alpha_2} < \dots < x_{\alpha_m}.$$

Пороги разбивают отрезок $[0,1]$ на участки

$$\Delta_0 = [0, x_{\alpha_1}]; \Delta_i = [x_{\alpha_i}, x_{\alpha_{i+1}}] \quad (i = 1, 2, \dots, m-1); \Delta_{m-1} = [x_{\alpha_{m-1}}, x_{\alpha_m}]$$

$\Delta_m = [x_{\alpha_m}, 1]$. Число m будем называть пороговостью данного индикаторного элемента.

Выходной сигнал МИЭ

$$y = f(x, \bar{X}_s) = \tau + i \pmod{2}, \quad (1)$$

если $x \in \Delta_i$; $\tau \in \{0, 1\}$; $\bar{X}_s = \langle x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_m} \rangle$ — кортеж порогов.

Функцию (1) назовем индикаторной функцией.

Моделью системы на рис. 2 является ИБ первого вида. Алгоритмы аналого-цифрового преобразования, положенные в основу функционирования устройств управления ИБ первого вида, назовем индикаторными алгоритмами.

Широкое распространение в технике АЦП получили индикаторные элементы, имеющие один порог — однопороговые индикаторные элементы (ОИЭ). Физическим аналогом ОИЭ является компаратор. Ввиду широкой распространенности АЦП на компараторах выделим ИБ, состоящие из ОИЭ, в отдельную группу, называемую ИБ второго вида.

Реальные компараторы характеризуются двумя временными параметрами — временем срабатывания $\tau_{ср}$ и временем восстановления $\tau_{в}$. Всегда выполняется условие $\tau_{ср} \leq \tau_{в}$. Для простоты будем предполагать, что отношение $\frac{\tau_{в}}{\tau_{ср}}$ всегда является целым числом.

$$\frac{\tau_{в}}{\tau_{ср}} = p + 1. \quad (2)$$

Соотношение (2) является центральным в излагаемой ниже теории (i, k, s) -алгоритмов.

От величин $\tau_{в}$ и $\tau_{ср}$ зависит выбор тактовой частоты АЦП. Примем $\tau_{ср}$ за единицу относительного времени. Необходимо отметить, что в АЦП, реализующих алгоритм последовательного счета, длительность такта в относительных единицах $\tau_1 = 1$; в АЦП реализующих алгоритм поразрядного кодирования, $\tau_0 = p + 1$.

Возникают две задачи:

- 1) построение оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования для ИБ второго вида — (i, k, s) -алгоритмы.
- 2) построение теории индикаторных алгоритмов.

1. (i, k, s) -алгоритмы.

1. Математическая модель АЦП на компараторах

Однопороговый индикаторный элемент будем называть также шупом. Математическая модель АЦП на компараторах состоит в следующем. На отрезке $[0, 1]$ находится некоторая неизвестная точка. Величина ее определяется с помощью ИБ, состоящего из k шупов. В результате приложения m -го шупа к некоторой точке x_m отрезка $[0, 1]$ находим значение предиката $p \equiv x \leq x_m$. Если точка приложения шупа оказалась справа от точки x ($p = 1$), будем считать, что шуп находится в сработавшем состоянии; если $x_m < x$ ($p = 0$), шуп не срабатывает.

Отрезку $[0, 1]$ в математической модели соответствует множество мгновенных значений преобразуемых величин, точке x — преобразуемая величина, шупу — компаратор. Приложению шупа к точке x_m в реальной схеме АЦП соответствует подача на эталонный вход компаратора эталонного сигнала, соответствующего x_m .

Точки приложения шупов назовем отмеченными точками. Точки 0 и 1 всегда являются отмеченными точками. Все другие отмеченные точки возникают в результате ходов алгоритма.

Отрезок $[a, b]$ с $[0, 1]$ назовем отмеченным отрезком, если его концы

a и b являются отмеченными точками, и других отмеченных точек на данном отрезке нет.

Ходом алгоритма называется следующая совокупность действий:

- а) расположение щупов на отрезке $[0, 1]$;
- б) выделение отмеченного отрезка, содержащего x , на основании информации со щупов.

Если точка x_m была отмеченной до l -го хода, то она остается отмеченной и после него. Обратная величина от длины отмеченного отрезка, содержащего x на m -ом ходе алгоритма, называется точностью замера на m -ом ходе. На движения щупов по отрезку $[0, 1]$ могут накладываться различные условия s , вытекающие, например, из соотношения [2].

(i, k, s) -алгоритмом называется детерминированный алгоритм, состоящий из i ходов и имеющий в своем распоряжении k щупов, движение которых подчиняется условию s .

Построенная модель АЦП свела задачу аналого-цифрового преобразования к задаче детерминированного одномерного поиска точки x на отрезке $[0, 1]$ с помощью ИБ из k щупов за i ходов. В этом — отличие предлагаемой модели от моделей АЦП, предложенных в работах [1—3].

В результате применения (i, k, s) -алгоритма к отрезку $[0, 1]$ на i -ом ходе получаем отмеченный отрезок, содержащий x , $\Delta_i(x)$. Каждому (i, k, s) -алгоритму можно поставить в соответствие множество отмеченных отрезков $\Delta_i(x)$. Рассмотрим не все возможные отмеченные отрезки $\Delta_i(x)$, а лишь самые большие из них — $\max \Delta_i(x)$.

Величину, обратную $\max \Delta_i(x)$, назовем (i, k) -точностью алгоритма. При заданном s (i, k) -точность алгоритма является некоторой функцией от i и k . Обозначим эту функцию $\varphi(i, k)$.

Оптимальным (i, k, s) -алгоритмом называется такой, (i, k) -точность которого больше или равна (i, k) -точности любого другого (i, k, s) -алгоритма.

2. $(i, k, 0)$ -алгоритмы

Пусть в выражении (2) $p = 0$. В этом случае сработавшие и не сработавшие щупы совершенно равноценны и на каждом ходе могут прикладываться к любой точке отрезка $[0, 1]$. Будем считать, что на движение щупов никаких ограничений не накладывается ($s = 0$). Такие алгоритмы назовем $(i, k, 0)$ -алгоритмами.

Теорема 1. Существует единственный оптимальный $(i, k, 0)$ -алгоритм, реализующий на отрезке $[0, 1]$ (i, k) -точность, равную $\varphi(i, k) = (k + 1)^{-i}$.

Оптимальный $(i, k, 0)$ -алгоритм назовем $A(i, k, 0)$ -алгоритмом.

Формальное правило, положенное в основу действия $A(i, k, 0)$ -алгоритма состоит в том, что на каждом ходе отмеченный отрезок, содержащий x на предыдущем ходе, делится k щупами на $k + 1$ равных частей и выделяется новый отмеченный отрезок.

При $i = 1$ ($\varphi(1, k) = k + 1$) $A(i, k, 0)$ -алгоритм превращается в алгоритм считывания: при $k = 1$ ($\varphi(i, 1) = 2^i$) $A(i, k, 0)$ -алгоритм превращается в алгоритм поразрядного кодирования.

3. $(i, k, 1)$ -алгоритмы

Пусть в выражении (2) $p \geq i$. В этом случае щуп, оказавшийся справа от точки x , срабатывает, время его восстановления длится больше, чем весь процесс преобразования. Таким образом сработавший щуп выбывает из игры; в процессе преобразования принимают участие только

щупы, находящиеся слева от точки x . О движении щупов по отрезку $[0, 1]$ в этом случае можно говорить, что щупы движутся только в одном направлении — от точки 0 к точке 1. Обозначим это условие через $s = 1$, а класс алгоритмов при $s = 1$ назовем классом $(i, k, 1)$ -алгоритмов.

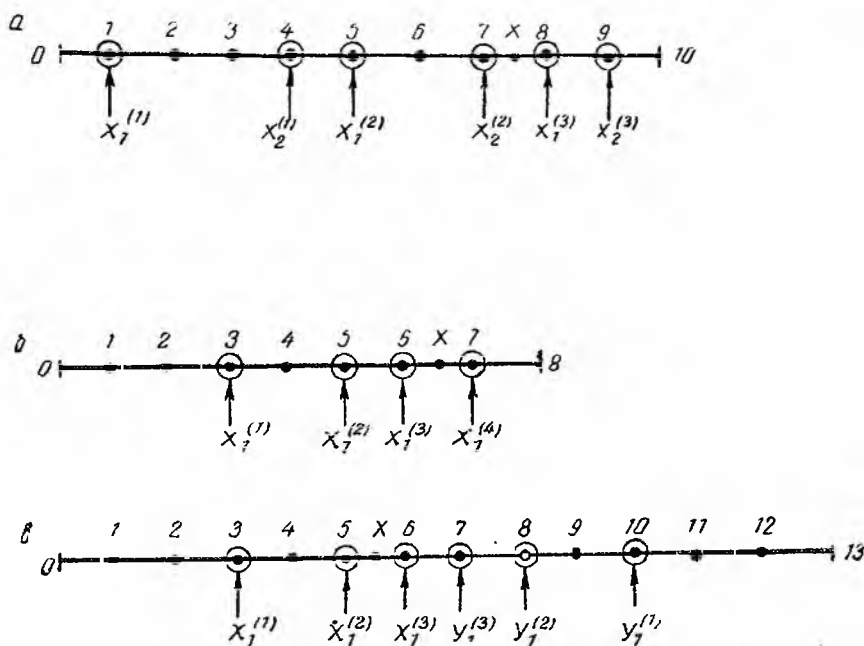


Рис. 3.

Теорема 2. Существует единственный оптимальный $(i, k, 1)$ -алгоритм, реализующий на отрезке $[0, 1]$ (i, k) -точность, равную

$$\varphi(i, k) = C_{i+k}^k = C_{k+i}^i,$$

где C_m^n — число комбинаций из m по n .

Оптимальный $(i, k, 1)$ -алгоритм назовем $A(i, k, 1)$ -алгоритмом. При $i = 1$ ($C_{k+1}^1 = k + 1$) $A(i, k, 1)$ -алгоритм превращается в алгоритм счисления; при $k = 1$ ($C_{i+1}^1 = i + 1$) — в алгоритм последовательного счета.

Пример 1. $A(3, 2, 1)$ -алгоритм действует на отрезке $[0, 10]$ и его делит на $\varphi(3, 2) = C_{3+2}^2 = 10$ равных частей (рис. 3, а).

1-й ход: $x_1^{(1)} = 1$; $x_2^{(1)} = 4$.

2-й ход: а) если $x \in [0, 1]$, то (i, k) -точность достигнута;

б) если $x \in [1, 4]$, то действуя на отрезке $[1, 4]$ щупом x_1 , за оставшиеся два хода ($x_1^{(2)} = 2$; $x_1^{(3)} = 3$) достигнем $\varphi(i, k) = 10$.

в) если $x \in [4, 10]$, то $x_1^{(2)} = 5$; $x_2^{(2)} = 7$.

3-й ход: а) если $x \in [5, 7]$, то $x_1^{(3)} = 6$;

б) если $x \in [7, 10]$, то $x_1^{(3)} = 8$; $x_2^{(3)} = 9$.

На рис. 3 показано действие $A(3, 2, 1)$ -алгоритма, когда $x \in [7, 10]$.

4. $(i, k, 1)$ -алгоритмы с «отдыхающими» щупами

Пусть в выражении (2) $0 < p < i$ (p — целое число). В этом случае сработавший щуп может восстановиться раньше, чем закончится процесс преобразования, и следовательно, может принять участие в работе.

Рассматривается класс (i, k, s) -алгоритмов, удовлетворяющих следующему условию:

1) Щупы движутся в направлении от точки 0 к точке 1;

2) Если m -й щуп ($m = 1, 2, \dots, k$) на j -ом ходе сработал, он возвращается в точку, лежащую слева от x , для «отдыха» (восстановления) и его можно прикладывать к отрезку $[0, 1]$ только через p ходов.

Алгоритмы, удовлетворяющие сформулированным условиям, назовем $(i, k, 1)$ -алгоритмами с «отдыхающими» щупами.

Итак, перед s -м ходом m -му щупу ($m = 1, 2, \dots, k$) соответствует число $p_m(s)$ ($0 \leq p_m(s) \leq p$). На s -м ходе к отрезку $[0, 1]$ прикладываются только те щупы, для которых

$$p_m(s) = 0.$$

Функция $p_m(s)$ обладает следующими свойствами:

а) если m -й щуп на s -м ходе находится на «отдыхе»,

$$p_m(s+1) = p_m(s) - 1;$$

б) если m -й щуп на s -м ходе был приложен к отрезку $[0, 1]$ ($p_m(s) = 0$) и не сработал, то

$$p_m(s+1) = p_m(s) = 0;$$

в) если m -й щуп на s -м ходе сработал, то $p_m(s+1) = p$.

Порядок щупов не играет роли, поэтому для определенности перед s -м ходом будем нумеровать щупы, чтобы

$$p_1(s) \leq p_2(s) \leq \dots \leq p_k(s) \quad (3)$$

для $s = 1, 2, \dots, i$.

Назовем $(i; p_1, p_2, \dots, p_k)$ -алгоритмом алгоритм с «отдыхающими» щупами, который состоит из i ходов, имеет в своем распоряжении k щупов и m -й щуп на первом ходе находится в состоянии $p_m(1) = p_m$. Щупы пронумерованы таким образом, что выполняется условие (3).

Теорема 3. Существует единственный оптимальный $(i; p_1, p_2, \dots, p_k)$ -алгоритм, реализующий на отрезке $[0, 1]$ (i, k) -точность, определяемую следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} \varphi_p(i; p_1, p_2, \dots, p_k) = & \\ = \varphi_p(i-1; p_{i+1}-1, p_{i+2}-1, \dots, p_k-1, \underbrace{p, p, \dots, p}_{t \text{ раз}}) + & \\ + \varphi_p(i-1, 0, p_{i+1}-1, p_{i+2}-1, \dots, p_k-1, \underbrace{p, p, \dots, p}_{t-1 \text{ раз}}) + & \\ + \varphi_p(i-1, 0, 0, p_{i+1}-1, p_{i+2}-1, \dots, p_k-1, \underbrace{p, p, \dots, p}_{t-2 \text{ раз}}) + & \\ + \varphi_p(i-1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{t \text{ раз}}, p_{i+1}-1, p_{i+2}-1, \dots, p_k-1) & \end{aligned}$$

и соотношением

$$\varphi_p(1; p_1, p_2, \dots, p_t, p_{t+1}, \dots, p_k) = t + 1;$$

$$(p_1 = p_2 = \dots = p_t = 0, p_{t+1} \neq 0).$$

Оптимальный $(i; p_1, p_2, \dots, p_k)$ -алгоритм назовем $A_p(i; p_1, p_2, \dots, p_k)$ алгоритмом.

Доказано, что при $p = 0$, оптимальный алгоритм с отдыхающими щупами превращается в $A(i, k, 0)$ -алгоритм; при $p \geq i$ — в $A(i, k, 1)$ -алгоритм.

Большой практический интерес представляет $A_p(i, p_1)$ -алгоритм — алгоритм с одним «отдыхающим» щупом.

(i, k) -точность $A_p(i, p_1)$ -алгоритма при $p_1 = 0$ определяется рекуррентной формулой

$$\varphi_p(i; 0) = \varphi_p(i - p - 1, 0) + \varphi_p(i - 1, 0)$$

и соотношениями

$$\varphi_p(1, 0) = 2; \varphi_p(0, 0) = 1. \quad (4)$$

При $p = 0$ $A_p(i, p_1)$ -алгоритм превращается в алгоритм поразрядного кодирования; при $p \geq i$ — в алгоритм последовательного счета.

При $p = 1$

$$\varphi_1(1; 0) = \varphi_1(i - 2; 0) + \varphi_1(i - 1, 0). \quad (5)$$

Интересно отметить, что последовательность (5) представляет собой ни что иное, как ряд Фибоначчи [5], а $A_1(i; 0)$ -алгоритм напоминает стратегию поиска экстремума функции по методу Фибоначчи [6].

Пример 2. $A_1(4; 0)$ -алгоритм действует на отрезке $[0, 8]$ и делит его на $\varphi_1(4; 0) = 8$ равных частей (рис. 3, б).

1-й ход: $x_1^{(1)} = 3$.

2-й ход: а) если $x \in [0, 3]$, то щуп срабатывает и на 1-м ходе переходит в состояние $p_1(2) = 1$. На 2-м ходе щуп «отдыхает» и переходит в состояние $p_1(3) = 0$. За оставшиеся два хода точность $\varphi_1(4; 0) = 8$ будет достигнута, если будем действовать на отрезке $[0, 3]$ алгоритмом последовательного счета;

б) если $x \in [3, 8]$, то $x_1^{(2)} = 5$.

3-й ход: а) если $x \in [5, 8]$, то оптимальная точность будет достигнута, действуя на отрезке $[5, 8]$ алгоритмом последовательного счета ($x_1^{(3)} = 6$; $x_1^{(4)} = 7$);

б) если $x \in [3, 5]$, то на третьем ходе щуп «отдыхает», на четвертом прикладывается к точке $x_1^{(4)} = 4$.

На рис. 3, б показано действие $A_1(4; 0)$ -алгоритма, когда $x \in [6, 8]$.

Длительность одного хода в алгоритме с «отдыхающими» щупами равна $\tau = 1$, поэтому длительность всего процесса преобразования в $A_1(4; 0)$ -алгоритме равна $4\tau = 4$. При $p = 1$ за это же время может быть сделано только два хода алгоритма поразрядного кодирования и будет достигнута точность $T = 2^2 = 4$, в два раза меньшая $\varphi_1(4, 0) = 8$, т. е. алгоритм с одним «отдыхающим» щупом при $p > 0$ значительно эффективнее алгоритма поразрядного кодирования.

5. $(i, k_1, k_2, 1)$ -алгоритмы

В $(i, k_1, k_2, 1)$ -алгоритмах все щупы разбиваются на две группы из k_1 и k_2 щупов. Щупы первой группы (k_1) движутся в направлении от точки 0 к точке 1; второй (k_2) — от точки 1 к точке 0.

Теорема 4. Существует единственный оптимальный $(i, k_1, k_2, 1)$ -алгоритм, реализующий на отрезке $[0, 1]$ (i, k) -точность, определяемую следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} \varphi(i, k_1, k_2) = & \varphi(i - 1, k_1, k_2) + \varphi(i, k_1 - 1, k_2) + \\ & + \varphi(i, k_1, k_2 - 1) - [\varphi(i, k_1 - 1, k_2 - 1) + \varphi(i - 1, k_1 - 1, k_2 - 1)] \end{aligned}$$

и соотношениями

$$\varphi(1, k_1, k_2) = k_1 + k_2 + 1; \quad \varphi(i, 0, k_2) = C_{i+k_2}^i; \quad \varphi(i, k_1, 0) = C_{i+k_1}^i.$$

Для важного практического случая $k_1 = k_2 = 1$ получена формула

$$\varphi(i, 1, 1) = (i+1)i + 1.$$

Пример 3. А(3, 1, 1, 1)-алгоритм действует на отрезке [0, 13] и делит его на $\varphi(3, 1, 1) = 13$ равных частей. На рис. 3, в показано действие алгоритма, когда $x \in [5, 8] \cdot x_1, y_1$ — точки приложения левого и правого щупа.

6. $(i, k, 2)$ -алгоритмы

$(i, k, 2)$ -алгоритмы являются подклассом $(i, k, 1)$ -алгоритмов, в которых щупы образуют k -линейку (расстояние между щупами в процессе движения не меняется), движущуюся в одном направлении от точки O к точке I .

Доказано, что оптимальные $(i, k, 2)$ -алгоритмы находятся в классе регулярных $(i, k, 2)$ -алгоритмов, использующих регулярную k -линейку:

$$x_1 = h = \frac{1}{T};$$

$$x_2 - x_1 = l_1 x_1;$$

$$x_3 - x_2 = l_2 x_2 + x_2 - x_1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_k - x_{k-1} = l_{k-1} x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2};$$

$$1 - x_k = l_k x_k + x_k - x_{k-1};$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_k = i;$$

$l_1, l_2, \dots, l_k$ — целые неотрицательные числа;

T — точность алгоритма.

Число регулярных алгоритмов конечно и равно числу целых неотрицательных решений Диофантова уравнения $l_1 + l_2 + \dots + l_k = i$, равного C_{i+k-1}^i . Поэтому задача нахождения оптимального регулярного алгоритма решается перебором C_{i+k-1}^i случаев.

7. $(i, k, 3)$ -алгоритмы

Из определения регулярной линейки следует, что в общем случае длина j -ой подлинейки к длине $j-1$ подлинейки не находятся в целочисленном отношении, что создает определенные трудности при практической реализации $(i, k, 2)$ -алгоритмов. Этому недостатка лишены $(i, k, 3)$ -алгоритмы которые являются подклассом $(i, k, 2)$ -алгоритмов, использующих метрическую k -линейку вида:

$$x_1 = h = \frac{1}{T};$$

$$x_2 - x_1 = l_1 x_1;$$

$$x_3 - x_2 = l_2 x_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$1 - x_k = l_k x_k;$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_k = i.$$

Получено выражение для (i, k) -точности $T_{\text{опт}}$ оптимального $(i, k, 3)$ -алгоритма:

$$T_{\text{опт}} = (q + 1)^r q^{i-r},$$

где q — частное, а

r — остаток от деления $i + k$ на k .

8. $(i, k, 4)$ -алгоритмы

В технике АЦП получили распространение преобразователи «напряжение — код», использующие метод поразрядного кодирования и построенные в виде разомкнутых систем. Работу так называемого многоэталонного преобразователя без цепи обратной связи [7] на модели щупов можно описать следующим образом: система из k щупов производит поиск точки x на отрезке $[0, 1]$ за i ходов ($i = k$) так, что на j -ом ходе ($j = 1, 2, \dots, i$) выбрасывается только один щуп, который прикладывается к середине отмеченного отрезка, содержащего x на $j - 1$ ходе, и после j -го хода этот щуп больше не используется.

Условие, накладываемое на движение щупов, в этом случае, сформируем следующим образом: каждый щуп за время действия алгоритма может быть приложен только к одной точке отрезка $[0, 1]$. Обозначим это условие через $s = 4$.

Получаем выражение для (i, k) -точности оптимального $(i, k, 4)$ -алгоритма

$$T_{\text{опт}} = (q + 1)^r q^{i-r},$$

где q — частное;

r — остаток от деления $i + k$ на i .

II. ИНДИКАТОРНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Для МИЭ через M_0 обозначим объединение всех участков Δ_i , на которых функция (1) принимает значение 0; через M_1 — объединение всех участков Δ_i , на которых (1) принимает значение 1. Совокупность множеств M_0 и M_1 образует разбиение $R = \{M_0, M_1\}$ отрезка $[0, 1]$, реализуемое данным МИЭ. Разбиение R взаимнооднозначно определяется кортежем порогов $\bar{X}_s$. Поэтому

$$f(x, \bar{X}_s) = f(x, R).$$

ИБ, состоящий из n МИЭ, на l -ом ходе также реализует некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$:

$$R_{\text{ИБ}}^{(l)} = R_1^{(l)} \times R_2^{(l)} \times \dots \times R_n^{(l)}.$$

($R_j^{(l)}$ — разбиение j -го МИЭ на l -ом ходе).

$R_{\text{ИБ}}^{(l)}$ — произведение разбиений $R_1^{(l)}, R_2^{(l)}, \dots, R_n^{(l)}$.

Произведение разбиений

$$R_{\text{ИБ}}^{(1)} \times R_{\text{ИБ}}^{(2)} \times R_{\text{ИБ}}^{(3)} \times \dots \times R_{\text{ИБ}}^{(l)} = R_{\text{ИА}}$$

является разбиением отрезка $[0, 1]$, реализуемым индикаторным алгоритмом. $R_{\text{ИБ}}$ является наиболее полной характеристикой индикаторного алгоритма.

Для сравнения индикаторных алгоритмов вводится понятие оценки разбиения R — $q(R)$. Оценка $q(R)$ характеризует разбиение R . Если разбиение R_1 в некотором смысле лучше разбиения R_2 , то будем считать, что

$$q(R_1) > q(R_2).$$

Смысл оценки $q(R)$ уточняется в каждом конкретном случае.

Задача нахождения оптимального i -ходового алгоритма формулируется следующим образом. Среди всех m -ходовых индикаторных алгоритмов найти оптимальный алгоритм, реализующий такое разбиение $R_{ИБ}$, когда

$$q(R_{ИБ}) \geq q(R'_{ИБ}),$$

где $R'_{ИБ}$ — разбиение, реализуемое любым i -ходовым индикаторным алгоритмом.

Рангом разбиения R $k(R)$ называется число непустых компонент разбиения R .

Оптимизация индикаторных алгоритмов производится по двум оценкам:

$$\begin{aligned} q(r) &= k(R); \\ q(r) &= \min \frac{1}{d(M_i)}, \end{aligned} \quad \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

где $d(m_i)$ — длина отрезка, представляющего компоненту разбиения.

Оценка $q(r)$, определяемая по (7), совпадает с понятием (i, k) -точности алгоритма. Выражение (7) обозначим также $t(R)$.

Индикаторные алгоритмы, оптимальные в смысле (6) и в смысле (7), будем называть соответственно оптимальными в смысле ранга и в смысле точности индикаторными алгоритмами.

Обозначим через $B(q)$ индикаторные блоки, ранги разбиений которых не превышают q . Последняя зависит от пороговости МИЭ, составляющих ИБ.

Теорема 5. Оптимальное в смысле ранга разбиение r отрезка $[0, 1]$, которое осуществляется с помощью индикаторного блока, состоящего из n многопороговых индикаторных элементов, имеет ранг $k(R) = 2^n$.

Теорема 6. Оптимальное в смысле точности разбиение r отрезка $[0, 1]$, которое осуществляется с помощью индикаторного блока, состоящего из n индикаторных элементов, имеет точность $t(r) = 2^n$.

Из теоремы 6 вытекает оптимальность разбиений, реализуемых кодовыми дисками преобразователей «угол — код», построенных на основе обыкновенного двоичного кода и кода Грея.

Теорема 7. Оптимальный в смысле точности i -ходовый индикаторный алгоритм управления блоком $B(q)$ реализует на отрезке $[0, 1]$ разбиение точности $t(r) = q^i$.

Величина q зависит от пороговости индикаторных элементов, составляющих ИБ. Теоремы 5 и 6 доказаны при условии, что на величину q никаких ограничений не накладывается. В этом случае, согласно теореме 5, $q = 2^n$, откуда $t(r) = 2^{ni}$.

$A(i, n, 0)$ -алгоритм, найденный выше, реализует точность $t(r) = \varphi(i; n) = (n+1)^i$, т. е. индикаторный алгоритм без ограничений на пороговость является значительно более эффективным алгоритмом.

Теоремы 5, 6, 7 имеют теоретический смысл предельных теорем, дающих выражение для предельной точности разбиений, реализуемых индикаторными блоками и индикаторными алгоритмами.

Практический смысл индикаторной модели АЦП зависит прежде всего от решения основной физической задачи — разработки электрического аналога многопорогового индикаторного элемента.

Можно предположить, что основной характеристикой МИЭ является пороговость, а увеличение пороговости — основная трудность при физической реализации МИЭ. С этой точки зрения большой практический интерес представляет решение задачи минимизации пороговости при синтезе ИБ.

ВЫВОДЫ

1. Построена математическая модель АЦП. Основным понятием этой модели является понятие ИБ. На языке модели задача аналогоцифрового преобразования сформулирована как задача одномерного поиска неизвестной точки x на отрезке $[0,1]$.

Это позволило:

а) строго математически сформулировать проблему оптимальности алгоритмов аналого-цифрового преобразования;

б) систематизировать с новой точки зрения известные алгоритмы аналого-цифрового преобразования;

в) получить новые оптимальные алгоритмы аналого-цифрового преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Euler. Neue Prinzipien zur Analog — Digital — Umwandlung und derer optimale Auslegung, «Frequenz», 1963, 17, № 10.

2. Э. И. Гитис, Э. Ф. Ильющенко. Алгоритмическое описание процессов аналого-цифрового преобразования. Ж. «Вопросы радиоэлектроники», серия XII (общетехническая), № 27, 1964.

3. П. Е. Твердохлеб. О наборе элементов идеализированных моделей цифраторов. «Автоматика», 1965, № 2.

4. А. И. Китов. Программирование информационно-логических задач. Изд-во «Советское радио», 1967.

5. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи. Изд-во «Наука», 1964.

6. Д. Дж. Уайлд. Методы поиска экстремума. Изд-во «Наука», 1967.

7. Э. И. Гитис. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. Госэнергоиздат, 1961.