

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПРИБОРАХ М-типа

В практике применения машинного эксперимента при изучении физики электронных процессов в сверхвысокочастотных приборах особое место занимает анализ точности вычисления результатов. Главная цель подобных исследований состоит в том, чтобы свести к минимуму ошибки решения исходных систем дифференциальных уравнений, лежащих в основе используемых моделей и получить физически достоверные результаты.

В данной статье на основе анализа траекторий движения частиц рассмотрены возможные области применения различных форм записи уравнений движения, представленных относительно разных независимых переменных. Системы уравнений, записанные соответственно в прямоугольной и цилиндрической системах координат, даны в Приложении. Принципиальное отличие в их записи состоит в том, что уравнения (П.2) и (П.4) позволяют определить траектории частиц в форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0), \quad (1)$$

а для уравнений (П.1) и (П.3) в качестве независимой переменной выбирается продольная координата e_1 , а время t становится функцией, $t = t(e_1, \vec{r}_0, t_0)$, где \vec{r}_0 и t_0 координата и время влета. В этом случае решение уравнения движения примет вид

$$\vec{r} = \vec{r}(e_1, \vec{r}_0, t_0). \quad (2)$$

Традиционно сложилось так, что запись решения в форме (1) применяется, когда рассматривается поведение частиц во времени в системах, обладающих абсолютной неустойчивостью (генераторах). Случай (2) используется при анализе движения частиц в пространстве конвективно неустойчивых систем (усилителей).

Анализ вычислительной точности обоих подходов показывает, что системы (П.1) и (П.3) имеют особенность решения, связанную с тем, что их правые части обращаются в бесконечность, когда значение продольной (или азимутальной) нормированной составляющей скорости частиц становится равным -1 . Иначе говоря, когда продольная компонента скорости в лабораторной системе координат равна нулю. Из-за наличия упомянутой особой точки невозможно решить систему уравнений движения, поэтому данный факт необходимо учитывать на этапе численной реализации. Для этого составляется специальная схема, позволяющая вести численное интегрирование в области, ограничивающей особую точку. Так,

для частицы, обладающей составляющей скорости $U_z = -1$ в прямоугольной системе координат или $\Theta = -1$ в цилиндрической (либо в непосредственной близости от этого значения) принудительно задается ближайшее от -1 значение, при котором отсутствует неустойчивость. Такими значениями, которые найдены в результате тестовых расчетов, являются:

в прямоугольной системе координат

$$\begin{aligned} \text{при } -1,0 \leq U_z \leq -0,99 \quad U_z &= -0,99; \\ -1,01 \leq U_z \leq -1,0 \quad U_z &= -1,01; \end{aligned}$$

в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \text{при } -1,0 \leq \theta \leq -0,975 \quad \theta &= -0,975; \\ -1,025 \leq \theta \leq -1,0 \quad \theta &= -1,025. \end{aligned}$$

Расчеты проводят пренебрегая расталкивающим действием кулоновских сил, так как в данном случае практический интерес представляет лишь анализ точности вычислений уравнений движения.

В качестве численного метода решения используют метод Рунге-Кутты четвертого порядка при соответствующих начальных условиях. Шаг интегрирования выбирают одинаковым и равным $1/12 T_c$, где T_c — циклотронный период. При использовании формы (1) для уменьшения погрешности счета при $U_z \leq -0,5$ (или $\Theta \leq -0,5$ в цилиндрической системе координат) шаг счета уменьшается и его значение выбирается из условия $\Delta g^* = (0,1 \div \pm 0,5)\Delta g$. Для сравнения траекторий в случаях (1) и (2) предполагается, что скорости движения подвижных систем координат одинаковы, т. е. выполняется условие $V_e = V_\phi$ (см. (П.1), (П.2)).

На рис. 1 показаны траектории частиц в прямоугольной системе координат при использовании таких форм записи уравнений движения: (—) — $\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$; (— · — · —) — $\vec{r} = \vec{r}(z, \vec{r}_0, t_0)$. Анализ результатов показывает, что при сужении области возле любой точки до интервала $-1,01 \leq U_z \leq -0,99$ получается практически полное совпадение траекторий (рис. 1, а). Незначительное расширение указанной области приводит к росту вычислительной погрешности. Ход траекторий в случае принудительного задания продольной составляющей скорости $U_z = -0,8$ для области значений $U_z \leq -0,8$ представлен на рис. 1, б.

В цилиндрической системе координат подвижная система вращается вокруг катода со скоростью основной пространственной гармоники в случаях (1) и (2). На рис. 2 даны траектории частиц в этой системе координат при использовании таких форм записи уравнений движения: (—) — $\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$; (— · — · —) — $\vec{r} = \vec{r}(r, \vec{r}_0, t_0)$. Для $U_a = 9000$ В (рис. 2, а) получено практически полное совпадение траекторий при выборе различных независимых переменных, так как возвратного движения не наблюдается ($\beta = -0,96$). Если увеличить анодное напряжение до 15000 В,

(рис. 2, б) траектории частиц в неблагоприятных фазах совпадают, так как выполняется условие $\Theta \leq -0,95$. Траектории в благоприятных фазах сильно отличаются начиная с точки, в которой $\Theta = -0,97$, так как с этого момента резко проявляется возвратное движение ($\Theta < -1,0$) и азимутальная составляющая скорости частицы при этом анодном напряжении $\Theta = -1,65$. В результате, несмотря на предпринятый обход и уменьшение шага, избавиться от неустойчивости не удалось.

Таким образом, при моделировании на ЭВМ движения частиц в пространстве взаимодействия приборов М-типа в случае прямоугольной системы координат можно с достаточной степенью точ-

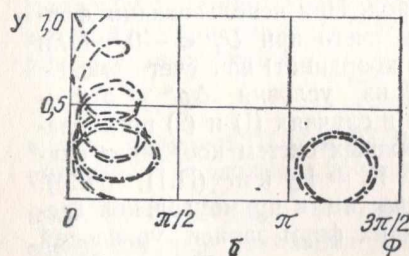
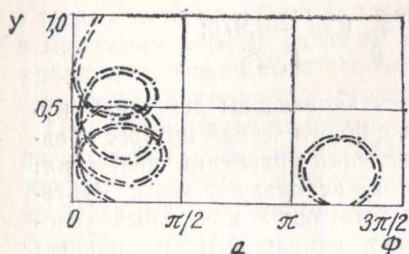


Рис. 1

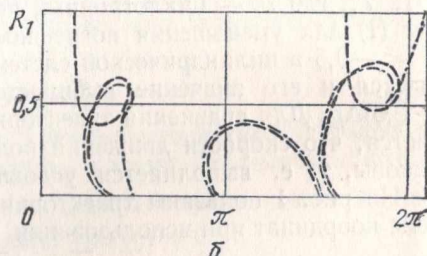
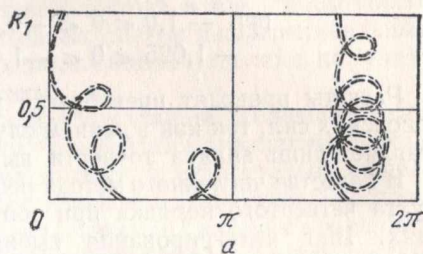


Рис. 2

ности использовать обе формы записи уравнений движения (с учетом обхода особых точек). В цилиндрической же системе координат, где возвратное движение проявляется в большей мере, применение в качестве независимой переменной азимутальной координаты значительно увеличивает погрешность счета. Поэтому здесь необходимо решение уравнений движения искать в форме $\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения движения в прямоугольной системе координат, перемещающейся со скоростью невозмущенного электрона V_e , записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dU_y}{dg} &= -\frac{\omega c}{\omega} \frac{1}{(1+U_z)} \left\{ \frac{E_y}{E_0} + U_z \right\}; \\ \frac{dU_z}{dg} &= -\frac{\omega c}{\omega} \frac{1}{(1+U_z)} \left\{ \frac{E_z}{E_0} - U_y \right\}; \\ \frac{d\Phi}{dg} &= \frac{U_z}{1+U_z}; \\ \frac{dY}{dg} &= \frac{1}{\beta_e d_y} \frac{U_y}{(1+U_z)}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Уравнения движения в прямоугольной системе координат, перемещающейся с фазовой скоростью ВЧ волны V_Φ :

$$\begin{aligned} \frac{dU_y^*}{dT} &= -\frac{E_y}{E_{00}} + \left(\frac{E_0}{E_{00}} - 1 \right) - U_z^*; \\ \frac{dU_z^*}{dT} &= -\frac{E_z}{E_{00}} + U_y^*; \\ \frac{d\Phi^*}{dT} &= \frac{\omega}{\omega_c} U_z^*; \\ \frac{dY^*}{dT} &= \frac{\omega}{\omega_c} \frac{1}{\beta_\Phi d_y} U_y^*. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

В этих формулах d_y — высота пространства взаимодействия; ω — угловая частота; ω_c — циклотронная частота; β_e — постоянная распространения электронного потока, $\beta_e = \omega/V_e$; β_Φ — постоянная распространения ВЧ волны, $\beta_\Phi = \omega/V_\Phi$; $T = \omega_c t$; $g = \beta_e z$; $Y = y/d_y$; $\Phi = \beta_e z - \omega t$; $\Phi^* = \beta_\Phi z - \omega t$; $U_y = V_y/V_e$; $U_y^* = V_y/V_\Phi$; $U_z = \frac{V_z - V_e}{V_e}$; $U_z^* = \frac{V_z - V_\Phi}{V_\Phi}$; E_y, E_z — составляющие ВЧ поля; E_0 — напряженность статического электрического поля; B_0 — индукция постоянного магнитного поля; $E_{00} = V_\Phi B_0$.

В случае цилиндрической конструкции подвижная система вращается вокруг катода со скоростью основной пространственной гармоники Ω .

Уравнения движения, записанные в форме $\vec{r} = \vec{r}(\varphi_1, r_0, t_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dU_r}{dg} &= -\frac{\omega_c}{\omega} \frac{G}{(1+\theta)} \left\{ E_r - \frac{1}{\varepsilon(1+R\xi)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon(1+R\xi)(1+\theta)}{G} \left[1 - \frac{\omega}{\omega_c} \frac{(1+\theta)}{\gamma} \right] \right\}; \\ \frac{d\theta}{dg} &= -\frac{\omega_c}{\omega} \frac{G}{(1+\theta)(1+R\xi)\varepsilon} \left\{ E_\varphi - \frac{U_r}{G} \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_c} \frac{(1+\theta)}{\gamma} \right) \right\}; \\ \frac{d\Phi}{dg} &= \frac{\theta}{1+\theta}; \quad \frac{dR}{dg} = \frac{U_r}{\gamma \varepsilon \xi (1+\theta)}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Уравнения движения, записанные в форме $\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dU_r}{dT} &= -G \left\{ E_r - \frac{1}{\varepsilon(1+R\xi)} + \frac{\varepsilon(1+R\xi)(1+\theta)}{G} \left[1 - \frac{\omega}{\omega_c} \frac{(1+\theta)}{\gamma} \right] \right\}; \\ \frac{d\theta}{dT} &= -\frac{G}{\varepsilon(1+R\xi)} \left\{ E_\varphi - \frac{U_r}{G} \left(1 - 2 \frac{\omega}{\omega_c} \frac{1+\theta}{\gamma} \right) \right\}; \\ \frac{d\Phi}{dT} &= \frac{\omega}{\omega_c} \theta; \quad \frac{dR}{dT} = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{U_r}{\varepsilon\gamma\xi}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

В этих формулах γ — постоянная распространения; $g = \gamma\varphi$; $T = \omega_c t$; $R = \frac{r - r_k}{r_a - r_k}$, где r_a — радиус анода, r_k — радиус катода; $\xi = \frac{r_a}{r_k} - 1$; $\varepsilon = \frac{r_k}{r_a}$; $U_r = \frac{V_r}{V_\varphi^A}$, где $V_\varphi^A = r_a \Omega$; $\theta = \frac{\tilde{\Omega}}{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ — азимутальная составляющая скорости в лабораторной системе координат; $G = \frac{E_0(r_a)}{B_0 V_\varphi^A}$, где $E_0(r_a) = \frac{U_a}{r_a \ln(r_a/r_k)}$; E_r , E_φ — нормализованные составляющие ВЧ поля.

Поступила в редколлегию 12.04.84.

УДК 621.385.6

Е. И. ШМАТЬКО, канд. физ.-мат. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

Обеспечение совместной работы большого количества радиотехнических устройств является важной проблемой современной радиофизики и электроники. Ширина спектра генерируемых частот обуславливается прежде всего теми процессами, которые протекают в электронных приборах независимо от выполняемых ими функций. Задача подавления или снижения уровня побочных колебаний, в том числе поиски методов управления ими, учитывающая электронику и электродинамику ЭВП СВЧ, не может быть решена без глубокого анализа физических процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с электромагнитными волнами. В связи с этим понятен интерес к изучению причин появления многочастотных режимов в приборах со скрещенными полями.

Исследованию энергетических и спектральных характеристик амплитудно-фазомодулированных колебаний в ЛБВ посвящено много работ. Рассмотрены колебания, модулированные по амплитуде и фазе узкополосными случайными процессами [1], спектральные

и энергетические характеристики амплитудно-модулированных и фазомодулированных в ЛБВ колебаний рассчитаны с учетом побочных видов модуляции для аппроксимации амплитудной характеристики кривой Гаусса, а фазовой — прямой [2]. Разработаны вопросы модуляции СВЧ-колебаний в ЛБВ узкополосными нормальными случайными процессами с учетом побочных видов модуляции и нелинейности модуляционных характеристик [3].

Следует отметить недостаточное внимание к процессам в усилителях М-типа [4]. Изучение этих вопросов представляет интерес для исследования нелинейных искажений сигналов в приборах со скрещенными полями.

Поэтому нами исследованы спектральные характеристики усилителя прямой волны с инжектированным потоком с учетом модуляции тока и напряжения при нелинейном взаимодействии электронного потока с электромагнитными волнами.

Широкое распространение получил метод анализа, основанный на численном решении нелинейных уравнений — машинный эксперимент [5, 6]. Преимущество его использования — достаточная гибкость в изучении многих физических процессов, в том числе и поставленной задачи.

Для прямолинейности потока в скрещенных полях в статическом режиме необходимо, чтобы электроны поступали в пространство взаимодействия со скоростью $v_e = E_0/B_0$. При наличии модуляции по напряжению переносная скорость электронов является функцией времени

$$v_e = v_{e0}(1 + \chi(t)), \quad (1)$$

где $\chi(t)$ — модулирующая функция. Тогда и фаза частиц в инерциальной системе координат с учетом модуляции вводится следующим образом:

$$\Phi = \Phi_0 - \beta_{e0}z\chi(t). \quad (2)$$

Здесь Φ_0 — фаза невозмущенного потока, $\Phi_0 = \omega t - \beta z$.

Очевидно, что отличие фазы Φ реального электрона от фазы Φ_0 невозмущенного определяется величиной $\beta_{e0}z\chi(t)$, изменяющейся в пространстве и во времени. В то же время, если для невозмущенного потока величина $\Phi_0 \in [0, 2\pi]$, интервал по Φ неопределен даже в плоскости влета, что не позволяет зафиксировать интервал интегрирования. С целью упрощения задачи попробуем определить значение величины $\chi(t)$, исходя из предположения малого влияния дополнительного члена на процесс группировки. Такое допущение будет справедливо только в том случае, когда время пролета электрона до его вылета будет значительно меньше времени существенного изменения фазы колебаний.

Если предположить малость возмущающего параметра $\chi(t) \ll 1$, задачу можно решать в неинерциальной системе координат, связанной с фазой невозмущенного потока Φ_0 .