СОГЛАСОВАННОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПУЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С МАТРИЧНОЙ МОДЕЛЬЮ ЛЕСЛИ

Балакирева А.Г., Герасин С.Н.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. высшей математики,
тел. (057) 702-13-72, E-mail: hm@khture.kharkov.ua

In this article different kinds of the population dynamics models were considered namely Beverton-Holt, Ricker and Leslie models. Transition for Beverton-Holt, Ricker models from nonlinear kind to matrix kind was made. Simulation data were obtained with the help of Beverton-Holt, Ricker matrix models we compared with the results which were obtained with the help of Leslie model. It was shown, that the received results are coordinated well enough. Also values of intensity of capture at which magnitude of population is kept were found.

Введение. Изучение динамики популяций связано с построением различных моделей численности, эти модели часто являются эмпирическими и требуют дополнительного обоснования или подбора неизвестных параметров.

Сущность. Пусть X_n численность популяции в n-ом году, оставшуюся после естественной убыли и промысла. С этой численностью популяция вступает в размножение. Пусть в результате размножения появилось $B(X_n)$ новых особей (B-функция, описывающая зависимость численности потомков от числа родителей), которые после выживания пополнят численность популяции в $(n+1)$-ом году на величину $S_1(B(X_n))$ (S_1 - функция, описывающая зависимость численности выживших особей от числа родившихся). Кроме того, из X_n особей, вступивших в размножение в n-ом году, до $(n+1)$-го года доживет какая-то часть, которую мы обозначим через $S_2(X_n)$ (ясно, что разности $B(X_n)-S_1(B(X_n))$ и $X_n-S_2(X_n)$ - это число особей, потерянных в результате естественной смертности). Следовательно, численность популяции в отсутствие промысла $(n+1)$-го года составила бы величину

$$X_{n+1} = F(X_n) = S_1(B(X_n)) + S_2(X_n).$$

При этом предполагается, что особи, пополнившие популяцию за счет размножения, уже не отличаются по популяционным параметрам от взрослых особей, участвующих в размножении, т.е. популяция считается однородной и не обладающей возрастной структурой. Рассмотрим три наиболее известных модели численности популяции.

Модель Бивертона-Холта [1] устанавливает зависимости между числом потомков и биомассой родительского нерестового запаса. Для нее функция F определяется как

$$F(X_n) = \frac{X_n}{1+cX_n},$$

где c потенциальная ёмкость экологической системы.

Модель Рикера [2], учитывает сезонные колебания численности, которая определяется следующим образом:

$$F(X_n) = X_n e^{-cX_n},$$

где c -- параметр, который связан с емкостью экологической ниши данной популяции.

Для данной модели проведены довольно глубокие исследования, в частности, показано, что из-за существенной нелинейности оценивать ее параметры довольно затруднительно, в тоже время она дает весьма хорошие прогнозы численности. Для этой модели также найдены максимальные объемы вылова не влияющие на жизнеспособность популяции в целом. Обе модели являются нелинейными. Эти модели допускают переход к модели с разновозрастной структурой аналогичной модели Лесли.

Третья модель – модель Лесли [3], она учитывает не только численность, но и возрастную структуру популяции:

$$X(t_n) = LX(t_{n-1}) = \ldots = L^n X(t_0),$$

где L - матрица Лесли вида:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_k & \alpha_{k-1} & \ldots & \alpha_{k-p} & \ldots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

α_i – возрастные коэффициенты рождаемости, характеризующие число особей, родившихся от соответствующих групп, и β_i – коэффициенты выживания, равные вероятности перехода из возрастной группы i в $i+1$ группу к следующему моменту времени (причем $\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i$ может быть больше 1). Все остальные элементы матрицы равны нулю. Общая численность популяции для модели Лесли в момент времени t определяется как $X(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$, где $x_i(t)$ - численность i-ой возрастной группы в момент времени t.

Численный эксперимент проводился для популяции, которая состоит из трех возвратных классов женского пола. Процент дожития особей из первого возрастного класса до второго составляет 53%, а из второго в третий – 22%. Предположим, что каждая особь второго класса продуцирует 4 особи первого класса, а особи третьего класса – 5. Тогда матрица Лесли для такой популяции будет иметь вид;

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix}$$

и начальное распределение имеет вид:

$$X(t_0) = [12 \quad 12 \quad 12]^T.$$

Теперь перейдем к модели Лесли, которая зависит от плотности популяции. Под плотностью мы будем понимать общее количество популяции в определенный момент времени. Определим количественно: $q(t) = 1 + aX(t)$, где $X(t)$ – плотность популяции, a – параметр плотности, который определяется как: $a = \dfrac{\lambda - 1}{K}$.

Тогда динамика популяции будем описывать следующей дискретной моделью:

$$X(t_n) = LQ^{-1}X(t_{n-1}),$$

где L – исходная матрица Лесли, а $Q(t) = \mathrm{diag}(q_i(t))$.

Для нашего случая

$$K = 100,\ a = 0.0055781,\ X(t) = 36,\ q(t) = 1.2008116.$$

Выводы. Для моделей Бивертона-Холта и Рикера был произведен переход от нелинейного вида к матричному, а параметр c был выбран равный 0.003. При таком выборе параметра результаты моделирования, которые были получены с помощью моделей Лесли, Бивертона-Холта и Рикера, достаточно хорошо согласуются между собой.

Литература. 1. Бивертон Р., Холт С. Динамика численности промысловых рыб.М.: Пищевая промышленность, 1969.–248 с. 2. Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука, 1979.-166 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ АБЕРРАЦИЙ ГЛАЗА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ КЛИНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Шиша Т.А., Чиж И.Г.

Национальный технический университет Украины

«Киевский политехнический институт»

03056, Киев, пр. Перемоги 37, Киевский политехнический институт,

Приборостроительный факультет,

каф. Оптических и оптико-электронных приборов,

тел. (044) 454-94-77, E-mail: chyzh@voliacable.com

The statistical data on components of a wave aberration of an eye of the person are received. The physical model of an eye which adequately models aberrations of an eye is developed.

Введение. Появление лазерной коррекции аберрационных недостатков зрения повлекло за собой бурное развитие офтальмологической аберрометрической аппаратуры. Но, несмотря на большой прогресс в этой области, актуальной остается проблема повышения точности глазных аберрометров. Решение указанной проблемы сопряжено с решением ряда научных и технических задач, среди которых важнейшей является разработка физической модели оптической системы глаза, способной точно воспроизводить аберрации глаза человека по составу и диапазону амплитуд аберрационных мод. Такая модель необходима для проверки точности аберрометров в процессе их производства, а также при эксплуатации в условиях медицинских клиник. В связи с этим целью данной работы является создание физической модели аберрационного глаза человека, применение которой способствовало бы существенному повышению точности глазной аберрометрии.

Задачами данного исследования являются обзор и анализ результатов клинической аберрометрии глаз большого количества пациентов, обоснование на этой основе требований к аберрационной модели глаза, создание физической модели аберрационного глаза, обеспечивающей тестирование офтальмологических аберрометров в полном диапазоне возможных аберраций глаза человека.

Сущность. При осуществлении аберрометрии глаза восстанавливают волновую аберрацию, функция которой в координатах зрачка обычно представляют полиномами Цернике в виде [1]: