

Ю. П. БУГАЙ, канд. техн. наук

**СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ И БИОНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕРВНОЙ СИСТЕМЫ. СООБЩЕНИЕ 8**

*Анализ и классификация отношений.* Прежде чем продолжать анализ функциональных возможностей устройств, способных устанавливать наличие того или иного отношения в исследуемой ситуации, детекторов отношений, рассмотренных в сообщении настоящей работы<sup>1</sup>, нам представляется важным выделить пол-

<sup>1</sup> Бугай Ю. П. Свойства отображения и бионическое моделирование нервной системы. *Сообщение 7* — «Проблемы бионики», 1977, вып. 19, с. 65-72.

ный набор отношений, которые могут быть определены на основе только ограниченного набора их свойств. При этом предполагается, что каждое конкретное отношение-класс, или множество отношений, обладающих одинаковыми свойствами, может быть выделено из всех других формально по его специфическому набору свойств, вводимому аксиоматически.

Классификация объектов любой природы предполагает четкое указание признаков, по которым осуществляется сравнение исследуемых объектов. В естественной классификации объектов [1, с. 172] в качестве оснований деления объектов на классы используются, как правило, наиболее важные существенные признаки. Роль таких признаков при традиционной классификации интересующих нас объектов — отношений — играют свойства отношений. К этим свойствам относятся рефлексивность и антирефлексивность (назовем их свойствами группы рефлексивности), симметричность, асимметричность и антисимметричность (отнесем их к группе свойств симметрии), транзитивность и антитранзитивность (назовем их свойствами группы транзитивности).

Предварительный анализ особенностей традиционной классификации отношений показал, что в ней применен принцип классификации, близкий к дихотомическому. Но не на всех этапах классификации этот принцип выдерживается, поэтому некоторые отношения оказываются неучтенными и фактически выпадают за рамки такой классификации. Например, в работе [2, с. 38] отмечается, что некоторые отношения не являются ни рефлексивными, ни антирефлексивными, другие отношения нельзя назвать транзитивными, но они не являются и антитранзитивными. Другими словами, целый ряд отношений, необходимых для отображения свойств реальных объектов, остается за пределами традиционной классификации.

Для задач отображения реальных ситуаций требуется некоторое уточнение традиционной классификации отношений. Одна из причин, вызывающих необходимость такого уточнения, связана с потребностью введения в теорию отношений целого ряда новых отношений и их свойств, которыми так богата объективная реальность. Одна из наших ближайших задач, для решения которой рассматриваются несколько другие свойства отношений, состоит во введении всех логически возможных вариантов отношений. Мы предполагаем, что существует возможность выделить дедуктивным путем такой набор отношений-классов, основываясь только на допустимых комбинациях свойств отношений, в котором найдут себе место и отношения, выпадающие из традиционной классификации.

Другая причина, по которой осуществляется некоторое переопределение свойств отношений, состоит в недостаточной дифференцированности отношений для решения специфических задач отображения реальных ситуаций на различных уровнях.

Известна интуитивно ясная близость процедур, позволяющих выделять, например, такие важные признаки двухградационных изображений, как их контуры, выпуклость контуров, вогнутость прямолинейные участки контуров и т. д., осуществляемых в рамках интегро-дифференциального анализа изображений и в терминах элементов и отношений между ними.

Так, можно выделить контуры двухградационного изображения с помощью операций типа свертки с соответствующим ядром и последующих пороговых операций и путем нахождения отношения «быть граничным» (быть крайним) для элементов силуэта этного изображения. Аналогично двойным образом можно выделить концы тонких линий в контурных изображениях, их выпуклость, вогнутость и другие признаки. Но в практике реализации технических устройств-детекторов признаков часто оказывается предпочтительным один из этих способов нахождения признаков. Поэтому важно уметь совершать взаимный переход от результатов, полученных на одном уровне анализа, к следствиям для способа реализации систем анализа ситуаций на другом уровне и других терминах.

Отметим, что в терминах элементов и отношений между ними более разработан метод дедуктивного анализа процедур по выделению признаков по сравнению с анализом процедур, совершаемых в терминах интегро-дифференциальных операций. Немаловажно также обратить внимание на тот факт, что бионические исследования анализаторов нервной системы осуществляют преимущественно в рамках интегро-дифференциальных методов, а построение бионических систем чаще всего целесообразно осуществлять в дискретно-логическом варианте.

Кратко резюмируя сказанное, отметим также, что описание реальных ситуаций и систем интегро-дифференциальными методами и в терминах элементов и отношений непосредственно не сравнимы. Переход от одного языка описания к другому становится возможным, если осуществить некоторую модификацию языка элементов и отношений, приблизив его к языку интегральных преобразований. Но такая модификация может быть получена лишь на основе более детальной классификации отношений, чем традиционная, и потребует рассмотрения целого ряда других нетрадиционных свойств отношений.

Прежде чем осуществить более детальный анализ традиционных свойств отношений, рассмотрим другой возможный вариант последовательно дихотомического деления отношений на классы. Для этого введем три группы свойств отношений и соответствующих обозначений:  $R$  — рефлексивность и  $\bar{R}$  — нерефлексивность,  $S$  — симметричность и  $\bar{S}$  — несимметричность,  $T$  — транзитивность и  $\bar{T}$  — нетранзитивность. Здесь свойства отношений  $\bar{R}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{T}$  вводятся как противоречивые признаки к соответствующим положительным признакам  $R$ ,  $S$  и  $T$ .

Будем предполагать, что каждая группа из двух свойств  $R$  и  $\bar{R}$ ,  $S$  и  $\bar{S}$ ,  $T$  и  $\bar{T}$  не зависит от свойств двух других групп, и вариации свойств в пределах одной группы порождают отдельные классы отношений. Например, первая группа  $R$  и  $\bar{R}$  порождает класс рефлексивных и класс нерефлексивных отношений. Других классов отношений, порождаемых группой свойств рефлексивности  $R$  и  $\bar{R}$ , быть не может, так как признаки  $R$  и  $\bar{R}$  по условию противоречивы.

Вместо длинного словесного описания всех отношений, которые могут быть получены для различных комбинаций их свойств, мы воспользуемся описанием наборов свойств всех возможных отношений-классов в форме логического высказывания. Тот факт, что конкретное отношение-класс может обладать только одним каким-либо свойством из каждой группы, может быть записан в виде высказываний:  $(R \vee \bar{R})$ ,  $(S \vee \bar{S})$  и  $(T \vee \bar{T})$ , где  $\vee$  — знак дизъюнкции в исключаяющем смысле. Тогда полный набор признаков данного отношения можно записать в форме высказывания

$$(R \vee \bar{R}) \wedge (S \vee \bar{S}) \wedge (T \vee \bar{T}). \quad (*)$$

Значения логических переменных и значение истинности высказывания (\*) приведены в таблице.

В первом столбце таблицы указаны значения логических переменных, приобретающие значения ноль, если соответствующее свойство конкретного отношения отсутствует, и единица — при наличии данного свойства у отношения.

Все значения высказывания (\*), представленные во втором столбце этой же таблицы, истинны, так как в каждой круглой скобке выражения (\*) одна из переменных обязательно приобретает единичное значение и вся скобка в целом оказывается равной единице. Каждому единичному значению истинности высказывания (\*) соответствует определенное отношение с особым набором свойств, указанным в данной строке таблицы в виде единичных значений логических переменных, т. е. формально трем введенным группам свойств соответствует 8 отношений.

Одним из исходных представлений, лежащих в основе математического понятия отношение, является представление об упорядоченной паре элементов, которое считается интуитивно ясным и не подлежит какому-нибудь другому определению, кроме остенсивного, через указание на примеры. Другими словами, предполагается очевидной возможность различать пары элементов, рас-

№ п/п	1			2
0	—	—	—	—
1	1 0	1 0	1 0	1
2	1 0	0 1	1 0	1
3	1 0	0 1	0 1	1
4	1 0	1 0	0 1	1
5	0 1	1 0	1 0	1
6	0 1	0 1	1 0	1
7	0 1	0 1	0 1	1
8	0 1	1 0	0 1	1

голоженных в прямом и обратном порядке. Указание на наличие порядка элементов в паре есть фактически указание на наличие простейшего отношения еще до того, как определено понятие отношения на множестве пар элементов. В связи с этим следует признать, что некоторые понятия, соответствующие простейшим отношениям, появляются в рассуждениях как первичные и лишь поясняются на примерах.

При анализе свойств отношений и их классификации воспользуемся матричной интерпретацией отношений [2, с. 17—18]. Пусть  $M$  — множество, состоящее из  $n$  элементов, а  $r$  — отношение, заданное на нем. Перенумеруем произвольным образом элементы множества  $M$  числами от 1 до  $n$  и построим квадратную таблицу размером  $n \times n$ . Строка таблицы под номером  $i$  соответствует  $i$ -му элементу множества, а  $k$ -й столбец —  $k$ -му элементу множества. На пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца ставится единица, если выполнено соотношение  $x_i r x_k$ , и нуль — если соотношение не выполнено. Другими словами, если задана матрица размером  $n \times n$  из нулей и единиц и произвольным образом выбрана нумерация на множестве элементов  $M$ , то тем самым на  $M$  задается некоторое отношение  $r$ .

Условимся различать пары элементов, расположенные в прямом порядке  $\langle x_i, x_k \rangle$  (прямые пары), и пары этих же элементов, взятых в обратном порядке  $\langle x_k, x_i \rangle$  (обратные пары). При указании пары элементов  $\langle x_i, x_k \rangle$  и соответствующего ей матричного элемента  $a_{ik}$  первый слева направо индекс (в данном случае  $i$ ) будем считать номером строки, а второй индекс (в данном случае  $k$ ) — номером столбца матрицы. Если  $k > i$ , то будем считать пару прямой, если  $k < i$  — обратной парой. Аналогично для матричных элементов  $a_{ik}$  будем считать соответствующим прямой паре при  $k > i$  и обратной паре — при  $k < i$ .

Учитывая принятые выше условия, отметим, что матричные элементы прямых пар располагаются над диагональными элементами матрицы, матричные элементы обратных пар — под диагональными элементами. Для самих диагональных элементов матрицы, соответствующих возможности или невозможности для элементов множества  $M$  находиться в данном отношении к самому себе, ничего не говорится относительно порядка расположения элементов в паре.

Необходимо отметить, что формальному редуцированному определению свойства рефлексивности соответствует несколько конкретных трактовок этого свойства, каждая из которых открывает свои возможности в детализации представлений о рефлексивности. Первую из таких трактовок рефлексивности можно опознать как характеризующую способность всех элементов множества  $M$  находиться к самим себе в таком же отношении, как и к другим элементам множества  $M$ . Развитие этой трактовки приводит к возможности введения представления о градуальной изменении свойства рефлексивность в пределах между рефлексивностью и иррефлексивностью.

сивностью и антирефлексивностью. Другая трактовка включает гипотезу о симметричном характере отношения элементов к самим себе.

Так, можно считать, что отношение рефлексивно, если все элементы  $x_i$  множества  $M$  так относятся к своим мысленным дубликатам  $x'_i$ , как эти дубликаты  $x'_i$  — к своим оригиналам. Другими словами, обычную символическую запись свойства рефлексивности  $x_i r x_i$  можно расчленить на две части  $x_i r x'_i$   $x'_i r x_i$ , где  $x_i$  — оригинал элемента;  $x'_i$  — дубликат оригинала;  $r$  — рассматриваемое отношение. Используя вторую трактовку рефлексивности, можно расширить содержание традиционного понятия рефлексивность таким образом, чтобы в компетенцию теории отношений можно было включить представления о прямых и обратных связях, которые будут рассмотрены как новые свойства отношений, учитываемые в расширенной теории.

Возвращаясь к задачам классификации, отметим, что традиционно рассматриваемые отношения и отношения в приведенной дихотомической системе отношений можно назвать однородным в том смысле, что свойства каждого из таких отношений касаются всех элементов. Так, если отношение рефлексивно, то любой элемент может находиться в данном отношении к самому себе, а не только некоторые из находящихся в данном отношении.

Отношения, свойства которых представлены в первой графе таблицы, включают все логически возможные варианты отношений с данными свойствами. Других однородных отношений, выпадающих из дихотомической классификации, быть не может. Учитывая, что только некоторые отношения, свойства которых представлены в таблице, совпадают с выделенными в традиционной классификации, обозначим нетрадиционные отношения символом  $r_i$ , где  $i=1, 2, 3, \dots, 8$  соответствует номеру строки в таблице с набором свойств данного отношения. Это позволит избежать путаницы в названиях отношений при проведении их сравнительной характеристики.

Для устранения неясностей в употреблении названий свойств отношений отметим, что «положительные» свойства отношений рефлексивность, симметричность и транзитивность совпадают по смыслу в традиционной и применяемой нами классификации. Для обозначения вводимых нами противоречивых свойств использованы названия положительных свойств с приставкой «не». Это позволяет такие свойства легко отличать от традиционных, так как названия нерефлексивность, несимметричность и нетранзитивность в теории отношений не употребляются.

Рассмотрим несколько подробнее, в каком соотношении находятся традиционные свойства отношений (и соответствующие им понятия) и нетрадиционные. Оставляя на дальнейшее более строгий анализ свойств отношений всех указанных выше групп, в настоящем сообщении рассмотрим лишь ряд утверждений-ги-

потез относительно объема и содержания понятий, соответствующих свойствам отношений.

В примере, приведенном в начале сообщения, уже отмечалось, что введение понятия «нерефлексивность», противоречивого понятию «рефлексивность», позволяет учесть в классификации отношений и такие, которые не являются рефлексивными или антирефлексивными. Объем родового понятия «свойства группы рефлексивности» полностью исчерпывается объемами понятий «рефлексивность» и «нерефлексивность». С другой стороны, понятия «рефлексивность» и «антирефлексивность» не уточнены в такой степени, чтобы можно было однозначно ответить на вопрос о противоположности или противоречивости этих понятий.

Этот вопрос нельзя решать умозрительно. Его решение может исходить только из исследования природы самих соотносящихся объектов, которыми в данном случае являются рефлексивные и антирефлексивные отношения. Если бы имелись указания на то, что существуют отношения со свойствами, промежуточными между рефлексивностью и антирефлексивностью, то крайние по значению свойства можно было бы считать находящимися в отношении противоположности. В этом случае объем понятия «отношения, обладающие свойствами из группы свойств рефлексивности» не исчерпывается объемами понятий «рефлексивные и антирефлексивные отношения», но включает еще некоторые промежуточные отношения.

Если же указаний на существование таких промежуточных отношений нет, то это может означать одно из двух. Отношения с указанными промежуточными свойствами не существуют и тогда рефлексивность и антирефлексивность противоречивы, либо такие отношения существуют, но в них еще не было потребности и уточнение относительно противоположности рефлексивности и антирефлексивности еще не делалось. Мы предполагаем, что указанные отношения с промежуточными свойствами существуют, т. е. имеются отношения лишь «в некоторой степени» рефлексивные. Но для того чтобы последнее предположение перестало быть просто фразой, необходимы новые экспликации и самого свойства рефлексивность.

Выше мы уже останавливались на двух возможных трактовках рефлексивности. Именно первая из них является исходно удобной для введения градуального свойства рефлексивности.

Необходимо сделать несколько замечаний относительно использования приставок-отрицаний «не», «а» и «анти». Во многих случаях использование трех перечисленных приставок интуитивно. Особенно неопределенно использование приставки «не», с помощью которой осуществляют отрицания самого различного вида.

В конечном счете мы считаем целесообразным упорядочить употребление перечисленных отрицаний следующим образом. Отрицание «не» будем употреблять только для формирования на-

званий отрицательных понятий, находящихся в отношении противоречия к исходным «положительным» понятиям. Например, выше таким образом были сформированы названия понятий нерелексивность, несимметричность и нетранзитивность. Отрицание «анти» будем употреблять для образования названий понятий, противоположных исходным, «положительным». Например, антирелексивность, антисимметричность и антитранзитивность. Отрицание «а» будем использовать для формирования отрицательных свойств (названий отрицательных свойств), промежуточных между исходным положительным и ему противоположным (антисвойством). Например, арефлексивность, асимметричность и атранзитивность.

Учитывая сказанное, считаем рациональным за традиционным названием «антирелексивность» закрепить значение «быть противоположным релексивности». Однако необходимо помнить, что такой специальный смысл в понятие «антирелексивность» (отношения) вкладывается лишь в нашей формирующей экспликации свойств отношений и не является общеупотребительным.

Приступая к сравнительному анализу свойств группы симметрии, напомним, что для традиционных отношений рассматриваются такие свойства как симметричность, асимметричность и антисимметричность [2, с. 39—40]. Во вводимой нами дихотомической классификации рассматриваются свойства симметричности и противоречивое ему свойство несимметричности. В матричной интерпретации отношений различительным признаком свойств асимметричности и антисимметричности (в традиционном понимании) является наличие ненулевых диагональных элементов у антисимметричных отношений и отсутствие таковых у асимметричного отношения. Но асимметричные и антисимметричные отношения появляются в традиционной классификации не потому, что соответствующие свойства являются различными в группе свойств симметрии. Эти разновидности отношений появляются из-за вариации свойств в группе свойств релексивности. Симметричность отношений безразлична к отсутствию или наличию диагональных элементов в интерпретирующей матрице. В традиционной классификации существует по крайней мере два типа симметричных отношений: симметричное релексивное и симметричное антирелексивное.

Каждому из этих типов симметричных отношений можно поставить в соответствие отношения следующего вида: симметричному релексивному отношению — антисимметричное отношение, симметричному антирелексивному — асимметричное. В нашей экспликации традиционные свойства асимметричности и антисимметричности следовало бы отнести к одному и тому же нерелексивному типу, так как каждому из свойств присущ важнейший признак — отсутствие второй пары, например, обратной, если существует прямая пара на подмножестве пар данного от-

ношения. Здесь варьируется признак совсем другой группы свойств рефлексивности.

Введение трех названий свойств группы свойств симметрии в традиционной классификации вызывает неправильные ассоциации о трехградационной природе свойства симметрии, в то время как фактически это свойство является двухградационным. При первом знакомстве с обычной классификацией отношений возникает представление, что свойства группы рефлексивности и группы транзитивности двухградационны (рефлексивность — антирефлексивность, транзитивность — антитранзитивность), а свойства группы симметричности — трехградационны. Нарушается и важный признак правильной классификации, требующий независимости свойств-оснований деления, так как свойства ассиметричности и антисимметричности ставятся в зависимость от свойства рефлексивности.

Закончим сравнительный анализ характеристикой свойств отношений из группы свойств транзитивности. Свойство транзитивности гарантирует наличие непосредственной связи в любой тройке попарно соотносящихся элементов. Свойство антитранзитивности запрещает существование промежуточных связей двух элементов через третий, если два элемента уже связаны непосредственной связью.

Однако помимо непосредственных связей всех элементов со всеми в транзитивных отношениях могут существовать связи всех элементов со всеми только на ограниченных подмножествах элементов из множества, находящихся в данном отношении. Примерами таких отношений могут служить специальные случаи отношения сходства, для которых свойство, близкое по смыслу к транзитивности, выполняется только для ограниченного числа элементов из всех, находящихся в отношении сходства. Такие отношения можно было бы рассматривать как обладающие свойством, промежуточным между транзитивностью и антитранзитивностью. Это дало бы основание предполагать, что традиционные свойства транзитивность и антитранзитивность являются противоположными, а не противоречивыми, так как такие противоположные свойства допускают свойства промежуточного типа. Окончательный вывод об особенностях свойств группы свойств транзитивности может быть сделан только после детального анализа содержания и объема понятий транзитивное и антитранзитивное отношение.

Кратко резюмируя основные результаты, изложенные в настоящем сообщении, отметим, что при обычной экспликации всех свойств отношений еще не достигнут такой уровень уточнения объема и содержания соответствующих понятий, чтобы можно было категорически утверждать, является или нет традиционная классификация дихотомической. Предложенная нами дихотомическая система отношений еще должна быть соотнесена со всем множеством известных отношений. Такая система отно-

шений позволяет сделать лишь первый формальный шаг в сторону создания классификации, охватывающей и отношения, которые обычно выпадают из традиционной системы отношений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. М., «Наука», 1975. 172 с.
2. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., «Наука», 1971. 255 с.