УДК 62.506.2

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

О ТЕОРИИ ИНТЕЛЛЕКТА

В настоящее время цифровая вычислительная техника стала одним из главных рычагов научно-технического прогресса, основой автоматизации процессов управления экономикой, производственных процессов, проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ, важным источником повышения производительности труда и роста благосостояния народа, необходимым звеном в системе обороны страны.

Электронные цифровые вычислительные машины представляют собой универсальное средство переработки информации, теоретически с их помощью можно автоматизировать любой вид умственной деятельности людей. Однако огромные потенциальные возможности ЭВМ используются не в полной мере. Производительность всех действующих в СССР вычислительных машин уже во много раз превысила суммарную производительность всего населения нашей страны при переработке информации. И тем не менее основным исполнителем работ по преобразованию информации (зачастую, неинтересных и утомительных) по-прежнему остается человек, причем информационная нагрузка людей с течением времени не снижается, а наоборот, возрастает. В чем причина этого парадокса? Очевидно в том, что большинство работ, выполняемых человеком, пока не по плечу цифровой вычислительной машине: слишком еще слаб ее «интеллект».

Как повысить уровень машинного «интеллекта»? Для решения этой проблемы имеет смысл попытаться получить подсказку у природы, т. е. пойти по бионическому пути и обратиться к изучению человеческого интеллекта: ведь только он способен выполнять информационные работы, недоступные пока вычислительной машине. Можно изучать две стороны человеческого интеллекта: 1) материальную основу интеллекта — мозг, нервную систему, организм человека; 2) деятельность интеллекта, его функции. Поскольку здесь ставится задача совершенствования деятельности ЭВМ, а не ее устройства, то естественно обратиться к функциональной стороне человеческого интеллекта. Результатом такого изучения должно быть описание функций человеческого интеллекта, адресованное вычислительной машине. Описание это должно выполняться на языке, доступном для «восприятия» вычислительной машиной. Оно должно, кроме того, достаточно полно и точно характеризовать изучаемые функции интеллекта. Такое описание функций человеческого интеллекта, будучи «воспринято» машиной, сможет быть приведено ею в действие. В результате будет достигнуто искусственное воспроизведение функций интеллекта человека, что приведет к повышению уровня интеллекта машины.

Научную область, нацеленную на получение описаний функций человеческого интеллекта, предназначенных для воспроизведения на ЭВМ, назовем *теорией интеллекта.*

При таком определении теории интеллекта ее успехи будут оцениваться не только тем, как далеко эта теория продвинулась в познании интеллекта человеческого, но и тем, какой уровень совершенства интеллекта машинного она смогла обеспечить. Описания функций интеллекта, которые не могут быть воспроизведены искусственно с помощью машин, не следует считать результатами теории интеллекта.

Какие функции человеческого интеллекта должна изучать теория интеллекта? При принятом ее определении, очевидно, те и только те функции, которые, в принципе, доступны «интеллекту» машинному. Цифровая же вычислительная машина способна реализовать лишь дискретные и детерминированные информационные процессы, т. е. такие процессы, которые выражаются в виде алфавитных операторов. Как известно, алфавитный оператор есть функция $Y = FX$, аргументом X и значением Y которой служат слова, т. е. последовательности, составленные из букв некоторого алфавита E. Вычислительная машина представляет собой конечное устройство, поэтому она может воспринять, переработать и сформировать лишь те слова, длина которых не превышает некоторого конечного наперед заданного числа m. С учетом этого требования входное слово X и выходное слово Y алфавитного оператора F можно представить в виде $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — буквы алфавита E. Включая в состав алфавита E знак пробела, мы получаем возможность применить алфавитный оператор F также к словам меньшей длины, чем m, дополняя пробелами места в слове, свободные от букв. Вычислительная машина, ввиду своей конечности, может воспринимать, обрабатывать и формировать только буквы из конечного алфавита. В связи с этим мы должны ограничить состав алфавита E лишь конечным числом букв, которое обозначим символом p.

Различают четыре вида алфавитных операторов: однозначные, многозначные, всюду определенные и частичные. Если алфавитный оператор каждому входному слову ставит в соответствие не более одного выходного слова, то его называют однозначным, в противном случае — многозначным. Если алфавитный оператор каждому входному слову ставит в соответствие не менее одного выходного слова, то его называют всюду определенным, в противном случае — частичным. Алфавитные операторы всех этих видов могут быть заданы с помощью *конечных предикатов*, т. е. функций вида $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $n = 2m$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — буквы алфавита E, y — булевы значения 0,1.

Каждому алфавитному оператору $Y = FX$ можно поставить в соответствие задающий его конечный предикат f, определяемый следующими условиями:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \begin{cases} 1, \text{ если } (y_1, y_2, \ldots, y_m) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ 0, \text{ если } (y_1, y_2, \ldots, y_m) \neq F(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{cases}$$

Вместе с тем, каждому конечному предикату $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ можно поставить в соответствие некоторый задаваемый им алфавитный оператор $Y = FX$. Сделаем это следующим образом. Составим уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, \quad y_1, y_2, \ldots, y_m) = 1. \tag{1}$$

Пусть $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ — некоторая произвольно выбранная последовательность букв алфавита E, которую мы примем в качестве входного слова X алфавитного оператора F. Положим $x_1 = \sigma_1$, $x_2 = \sigma_2, \ldots, x_m = \sigma_m$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \quad y_1, y_2, \ldots, y_m) = 1. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) относительно неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, находим систему слов $\{(\overset{1}{\varepsilon}_1, \overset{1}{\varepsilon}_2, \ldots, \overset{1}{\varepsilon}_m), (\overset{2}{\varepsilon}_1, \overset{2}{\varepsilon}_2, \ldots, \overset{2}{\varepsilon}_m), \ldots, (\overset{l}{\varepsilon}_1, \overset{l}{\varepsilon}_2, \ldots, \overset{l}{\varepsilon}_m)\}$, удовлетворяющих этому уравнению. Здесь l — число всех решений уравнения (2). Все эти слова принимаем в качестве выходных слов Y, формируемых алфавитным оператором F в ответ на входное слово X. Если для входного слова X существует единственное выходное слово Y, то мы говорим, что реакция алфавитного оператора для этого слова определена и однозначна. Если для входного слова не существует ни одного соответствующего ему выходного слова, то реакция алфавитного оператора для этого слова не определена. Если же для данного входного слова существует более одного выходного слова, то мы говорим, что реакция алфавитного оператора для этого слова многозначна.

Сказанное позволяет заменить понятие алфавитного оператора, определенного на конечном алфавите и для слов ограниченной длины, эквивалентным ему понятием конечного предиката. Теперь мы можем, наконец, четко ответить на поставленный ранее вопрос: какие функции человеческого интеллекта должна изучать теория интеллекта. Объектом изучения в теории интеллекта могут быть только те функции человеческого интеллекта, которые представимы в виде конечных предикатов. Итак, предмет теории интеллекта определен, осталось определить ее средства. В качестве средства описания функций человеческого интеллекта будем использовать *алгебру конечных предикатов*, описание которой приводится ниже. На языке этой алгебры функции человеческого интеллекта могут быть записаны в виде формул, доступных «пониманию» вычислительной машины.

Пусть E — некоторый конечный алфавит, состоящий из p букв $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(p \geqslant 2)$, с заданными на нем n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемыми *буквенными переменными*. Введем на множестве E систему одноместных предикатов $a_i(x_j)$ $(1 \leqslant i \leqslant p,$ $1 \leqslant j \leqslant n)$, определяя их условиями: $a_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j = a_i; \\ 0, & \text{если } x_j \neq a_i. \end{cases}$

Предикат $a_i(x_j)$ «узнает» букву a_i среди букв алфавита E, поэтому мы называем его *предикатом узнавания* или просто *узнаванием* буквы a_i. Нам понадобятся также две булевы функции — дизъюнкция $u \vee v$ и конъюнкция $u \wedge v$ $(u, v, u \vee v, u \wedge v \in \{0, 1\})$. Узнавания букв, дизъюнкцию и конъюнкцию примем в качестве элементарных функций алгебры конечных предикатов. Образуя суперпозиции этих функций, мы получаем различные предикаты. Каждой суперпозиции поставим в соответствие некоторую формулу алгебры конечных предикатов.

Дадим определение понятия формулы алгебры конечных предикатов:

1) выражения вида $a_i(a_k)$ $(1 \leqslant i, k \leqslant p)$, 0, 1, обозначающие булевы константы, называем формулами;

2) выражения вида $a_i(x_j)$ $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, обозначающие предикаты узнавания, называем формулами;

3) если выражения α и β — формулы, то формулами называем также выражения $(\alpha) \vee (\beta)$ и $(\alpha) \wedge (\beta)$, обозначающие дизъюнкцию и конъюнкцию предикатов, соответствующих формулам α и β.

В дальнейшем в целях сокращения длины записи формул узнавания $a_i(x_j)$ будем писать в виде $x_j^{a_i}$, называя букву a_i *показателем узнавания* $x_j^{a_i}$. Знак конъюнкции $\wedge$ в записях формул будем опускать или же заменять его точкой. В записях формул будем также опускать те скобки, наличие которых не является обязательным для правильного понимания смысла формул. Если скобки, регулирующие порядок выполнения действий, в записи формулы не указаны, то, по соглашению, вначале выполняется операция конъюнкции, а затем — дизъюнкции; кроме того, первой из однотипных операций выполняется та, знак которой в формуле стоит левее, например, $\alpha \vee \beta\gamma = \alpha \vee (\beta\gamma)$, $\alpha \vee \beta \vee \gamma = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma$.

Рассмотрим пример формулы алгебры конечных предикатов. Пусть $E = \{a, м, n\}$, $p = 3$, $n = 4$. Выражение $x_2^a x_4^a (x_1^м x_3^м \vee x_1^n x_3^n)$ представляет собой сокращенную запись формулы $((a(x_2)) \wedge (a(x_4))) \wedge (((м(x_1)) \wedge (м(x_3))) \vee ((n(x_1)) \wedge (n(x_3))))$.

Предикат $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, представленный этой формулой, выделяет из множества всевозможных четырехбуквенных слов (x_1, x_2, x_3, x_4), составленных из букв *а*, *м*, *п*, слова *мама* и *папа*. На этих словах предикат f обращается в 1, на остальных — в 0. Например: $f(м, а, м, а) = a^a a^a (м^м м^м \vee м^п м^п) = 1 \cdot 1 (1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0) = 1$, $f(м, а, п, а) = a^a a^a (м^м п^м \vee м^п п^п) = 1 \cdot 1 (1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1) = 0$.

Можно доказать, что любой конечный предикат $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ допускает представление в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}. \quad (3)$$

Здесь буквенные переменные $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ играют роль индексов логического суммирования. Запись $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$ по знаком логической суммы $\vee$ означает, что дизъюнкция берется по всевозможным наборам индексов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, которые обращают предикат f в единицу. Формулу, стоящую справа от знака равенства в тождестве (3), назовем *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* предиката f. Тождество (3) свидетельствует о том, что любой конечный предикат может быть представлен в виде суперпозиции функций узнавания, конъюнкции и дизъюнкции. Это значит, что алгебра конечных предикатов полна, на ее языке можно записать в виде формулы любой конечный предикат. Следовательно, на языке алгебры конечных предикатов может быть формально описана любая функция человеческого интеллекта, изучаемая в теории интеллекта.

Важно отметить, что набор элементарных функций алгебры конечных предикатов не только полон, но и несократим. Это означает, что при исключении из алгебры предикатов хотя бы одной из введенных элементарных функций она станет неполной. В самом деле, исключим из числа элементарных функций предикат узнавания буквы a_i. Тогда мы не сможем получить в виде суперпозиции оставшихся элементарных функций предикат $f(x)$, обращающийся в единицу при $x = a_i$. Это обусловлено тем, что все остальные узнавания при значении $x = a_i$ обращаются в 0, а дизъюнкция и конъюнкция этот нуль сохраняют при любом числе суперпозиций. Исключив из числа элементарных функций дизъюнкцию, мы сможем с помощью суперпозиций оставшихся функций получать только конъюнкции узнаваний, а все остальные предикаты, к числу которых относится, например, предикат $x^{a_1} x^{a_2}$, — не сможем. Исключив конъюнкцию, мы оставим за пределами досягаемости алгебры все предикаты, которые не выражаются в виде дизъюнкции узнаваний (например, предикат $x^{a_1} x^{a_2}$).

В алгебре конечных предикатов (называемой нами в дальнейшем просто *алгеброй предикатов*) выполняются аксиомы (тождества) абстрактной решетки:

законы идемпотентности

$$\alpha \vee \alpha = \alpha, \ (4а) \quad \alpha\alpha = \alpha, \ (4б)$$

законы коммутативности

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha; \ (5а) \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \ (5б)$$

законы ассоциативности

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma); \ (6а) \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \ (6б)$$

законы элиминации (поглощения)

$$\alpha(\alpha \vee \beta) = \alpha; \ (7а) \quad \alpha \vee \alpha\beta = \alpha. \ (7б)$$

Здесь α, β, γ — элементы множества $M = \{0,1\}$.

В алгебре предикатов выполняются также аксиомы для нуля 0 и единицы 1 абстрактной решетки

$$0 \vee \alpha = \alpha; \ (8а) \quad 1\alpha = \alpha. \ (8б)$$

Из аксиом (7) и (8) вытекают еще два тождества для нуля и единицы

$$0\alpha = 0; \ (9а) \quad 1 \vee \alpha = 1. \ (9б)$$

Действительно, $0\alpha = 0(0 \vee \alpha) = 0$, $1 \vee \alpha = 1 \vee 1\alpha = 1$.

В алгебре предикатов выполняется также аксиома дистрибутивности

$$\alpha(\beta \vee \gamma) = \alpha\beta \vee \alpha\gamma. \tag{10а}$$

Таким образом, алгебра предикатов относительно операций дизъюнкции и конъюнкции является дистрибутивной решеткой с нулем и единицей, заданной на множестве $M = \{0,1\}$.

Второй закон дистрибутивности может быть получен в виде следствия из введенных ранее аксиом

$$\alpha \vee \beta\gamma = (\alpha \vee \beta)(\alpha \vee \gamma). \tag{10б}$$

Действительно, $\alpha \vee \beta\gamma = \alpha \vee \alpha\beta \vee \beta\gamma = \alpha \vee \alpha\gamma \vee \alpha\beta \vee \beta\gamma = \alpha\alpha \vee \alpha\gamma \vee \beta\alpha \vee \beta\gamma = \alpha(\alpha \vee \gamma) \vee \beta(\alpha \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta)(\alpha \vee \gamma)$.

В алгебре предикатов справедливы также аксиомы для узнаваний, называемые нами законами истинности и ложности:

закон истинности

$$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_p} = 1, \tag{11а}$$

законы ложности

$$x^{a_i}x^{a_j} = 0 \quad (1 \leqslant i, \ j \leqslant p, \ i \neq j). \tag{11б}$$

Здесь x — элемент множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

Таким образом, алгебра предикатов может быть отнесена к дистрибутивным решеткам с нулем и единицей и с узнаваниями. На этом описание алгебры предикатов как алгебраической системы завершается.

Может показаться, что алгебра предикатов есть обобщение алгебры логики. Действительно, в частном случае, когда $p = 2$

и $E = \{0,1\}$, тождества (11) превращаются в законы исключенного третьего и противоречия алгебры логики:

$$x \vee \bar{x} = 1, \ (12а) \quad x\bar{x} = 0, \ (12б)$$

где $x = x'$, $\bar{x} = x^0$. В своей совокупности тождества (4)—(10) и (12) как будто определяют на множестве $\{0,1\}$ с операциями отрицания, дизъюнкции и конъюнкции алгебру логики.

Однако такое заключение неверно. Дело в том, что смысл операции отрицания $\bar{x}$ в алгебре логики и в алгебре предикатов при $p = 2$ и $E = \{0,1\}$ различен. В алгебре логики множества M и E мы не различаем, и операция отрицания определена на каждом из этих множеств. В алгебре предикатов при $p = 2$ и $E = \{0,1\}$ нам приходится множества M и E различать, несмотря на их равенство. Здесь операция отрицания определена на множестве E, но не определена на множестве M. В алгебре предикатов, в отличие от алгебры логики, выражения $\bar{\alpha} = \alpha^0$, α^1, $\overline{\alpha \vee \beta} = (\alpha \vee \beta)^0$ и другие, где α и β — произвольные формулы, лишены смысла и не являются формулами алгебры предикатов. В этом обстоятельстве кроется объяснение того факта, что набор элементарных функций в алгебре предикатов несократим, а в алгебре логики сократим (например, можно исключить дизъюнкцию, выразив ее с помощью закона де Моргана через отрицание и конъюнкцию $\alpha \vee \beta = \overline{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$). Такого не могло бы быть, если б алгебра логики являлась частным случаем алгебры предикатов. Частный случай алгебры предикатов при $p = 2$ как математический объект в литературе обычно явно не вводится, однако он используется фактически, когда отрицанием разрешается действовать только лишь на независимые переменные, а не на произвольные формулы. Например, он фактически используется при введении СДНФ и при математическом описании работы двухступенчатых комбинационных схем.

Аксиомы (4) — (8), (10а) и (11) назовем *аксиомами алгебры предикатов*. Этих аксиом достаточно для полной характеристики алгебры предикатов, поскольку, как будет показано ниже, с их помощью можно решить вопрос о тождественности любых двух формул алгебры предикатов.

Назовем *элементарной конъюнкцией* конъюнкцию узнаваний различных буквенных переменных, взятых с произвольными фиксированными показателями. Дизъюнкцию некоторого числа различных элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ). Элементарную конъюнкцию, в которой встречаются все переменные алгебры предикатов, назовем *конституэнтой единицы*. Присвоим каждой конституэнт единицы $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ свой номер. Для этого составим p-ичный код $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ из показателей ее переменных, рассматривая буквы алфавита E как p-ичные цифры. Число, соответствующее этому коду, будем считать номером данной конституэнты единицы. Всего имеется p^n различных конституэнт единицы. Дизъюнкция некоторого числа различных конституэнт единицы есть совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Мы не будем различать СДНФ, отличающиеся только порядком расположения конституэнт единицы. Конституэнты единицы в СДНФ условимся располагать в порядке возрастания их номеров. Присвоим каждой СДНФ свой номер. Для этого каждой СДНФ поставим в соответствие некоторый двоичный код длины p^n. Длина кода совпадает с числом всех различных конституэнт единицы. Если в рассматриваемой СДНФ конституэнта единицы с номером k отсутствует, то в k-м разряде ее двоичного кода записываем 0, если присутствует, то записываем 1. Число, соответствующее двоичному коду, будем считать номером данной СДНФ. Всего имеется 2^{p^n} различных СДНФ, т. е. ровно столько, сколько существует конечных предикатов. С другой стороны, каждому конечному предикату соответствует некоторая СДНФ. Следовательно, для каждой СДНФ существует единственный конечный предикат.

Если бы существовал алгоритм преобразования формул алгебры предикатов к СДНФ, основанный исключительно на использовании аксиом алгебры предикатов, то, сравнивая полученные СДНФ для этих формул, можно было решить вопрос об их тождестве. Если СДНФ совпадают, то формулы тождественны, если не совпадают,— не тождественны. Такой алгоритм существует. Ниже приводится его описание, сопровождаемое примером.

Пусть $p=2$, $E=\{a, b\}$, $n=3$. Требуется преобразовать к к СДНФ формулу

$$f=(x_1^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee (x_1^a \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a).$$

1) Пользуясь тождествами (5б) и (10а), раскрываем в формуле все скобки:

$$f=(x_1^a \vee x_2^b)\, x_1^a \vee (x_1^a \vee x_2^b)\, x_1^b x_3^a \vee (x_1^a \vee x_2^a)\, x_2^b x_3^b \vee (x_1^a \vee x_2^a)\, x_2^a x_3^a =$$
$$= x_1^a (x_1^a \vee x_2^b) \vee x_1^b x_3^a (x_1^a \vee x_2^b) \vee x_2^b x_3^b (x_1^a \vee x_2^a) \vee x_2^a x_3^a (x_1^a \vee x_2^a) =$$
$$= x_1^a x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_3^a x_1^a \vee x_1^b x_3^a x_2^b \vee x_2^b x_3^b x_1^a \vee x_2^b x_3^b x_2^a \vee x_2^a x_3^a x_1^a \vee x_2^a x_3^a x_2^a.$$

В результате получаем некоторую дизъюнкцию конъюнкций узнаваний.

2) Пользуясь тождествами (4)—(6), (8а), (9а) и (11б), упрощаем формулы:

$$f=x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_1^b x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a =$$
$$= x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee 0 \cdot x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee 0 \cdot x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a =$$
$$= x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee 0 \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee 0 \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a =$$
$$= x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a.$$

В результате получаем некоторую дизъюнктивную нормальную форму.

3) Пользуясь тождествами (5б), (6б), (8б) и (11а), во все онъюнкции вводим недостающие переменные

$$f = x_1^a \left(x_2^a \vee x_2^b\right)\left(x_3^a \vee x_3^b\right) \vee x_1^a x_2^b \left(x_3^a \vee x_3^b\right) \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee$$
$$\vee\, x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee \left(x_1^a \vee x_1^b\right) x_2^a x_3^a.$$

4) Пользуясь тождествами (4а), (5), (6) и (10а), получаем екоторую СДНФ:

$$f = x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee$$
$$\vee\, x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^a x_3^a = x_1^a x_2^a x_3^a \vee$$
$$\vee\, x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a.$$