УДК 621.391 : 519.2

ИТЕРАТИВНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМА ПРИ НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЫБОРКЕ

ГАВРИШ А.С., ЗАБОЛОТНЫЙ С.В., КОВАЛЬ В.В.

Предлагаются численные методы Ньютона-Рафсона и накопления Фишера для нахождения приближенного решения уравнения максимизации полинома. Показывается, что предпочтительнее, с точки зрения уменьшения объема обрабатываемых данных, использовать процедуру накопления Фишера. Решается задача правильного выбора начального приближения.

Введение

При решении задач статистической обработки сигналов усложнение модели взаимодействия полезного сигнала и помехи, с одной стороны, приводит к увеличению точности результатов обработки, а с другой - к усложнению алгоритмов. Усложнение математических моделей зачастую вызвано необходимостью более адекватного описания реальных физических процессов, при этом мощь современных вычислительных средств позволяет «снисходительно» относиться к усложнению вычислительной процедуры. Для оценки параметров негауссовских случайных величин хорошо себя зарекомендовал метод максимизации полинома, основанный на использовании конечной последовательности моментов или кумулянтов [1]. В работе [2] рассмотрен синтез алгоритмов полиномиального оценивания параметров радиосигналов, принимаемых на фоне аддитивно-мультипликативных помех. Процедура нахождения искомых оценок сводится к применению численных методов дня нахождения корней нелинейных уравнений, поскольку даже при второй степени полинома не удается получить аналитическое решение уравнений максимизации полинома.

Для решения подобных задач могут быть использованы различные итеративные процедуры последовательных приближений, например, метод золотого сечения, метод Ньютона, метод наискорейшего спуска, градиентный метод [3]. В современных математических пакетах, например, таких как MathCad, MATLAB, Mathematica и т.п. есть ряд стандартных процедур для решения различных уравнений. Очевидно, что численные методы, используемые в этих пакетах, ориентированы на решение широкого круга задач, поэтому могут приводить к неточным или ошибочным результатам в частном случае. Поэтому возникает необходимость в выборе и адаптации к конкретной задаче численных методов решения уравнения максимизации полинома. Решение такой задачи для одинаково распределенных выборочных значений при нахождении скалярной и векторной оценок приведено в работе [1]. Использование итеративных и рекуррентных процедур для решения систем уравнений максимизации полинома при неодинаково распределенных выборочных значениях было рассмотрено в работе [4], в то время как вопросы применения численных методов нахождения скалярной оценки максимизации полинома при неодинаково распределенных выборочных значениях еще не отражены в научной литературе.

При подборе численных методов для решения уравнений максимизации полинома следует руководствоваться тем фактом, что он по своей сути аналогичен методу максимального правдоподобия. В ряде работ [3, 5] математически строго обоснованы статистические свойства оценок максимального правдоподобия, получаемых при приближенном нахождении оценок численными методами, и обсуждаются их недостатки.

Целью данной работы является адаптация классических итеративных процедур для решения уравнений максимизации полинома при неодинаково распределенных выборочных значениях. Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

1) на основании классической итеративной процедуры синтезировать вычислительный метод оценивания параметра неодинаково распределенной случайной величины путем решения уравнения максимизации полинома;

2) модернизировать итеративную процедуру для упрощения вычислений путем уменьшения объема обрабатываемых данных;

3) осуществлять правильный выбор начального приближения решения нелинейного уравнения.

Постановка задачи и результаты

Предположим, что в распоряжении наблюдателя есть выборка независимых неодинаково распределенных значений $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ объемом n из генеральной совокупности значений случайной величины ξ.

Рассмотрим численные методы решения уравнений максимизации полинома, в которых используется весь объем выборки. Согласно методу максимизации полинома скалярная оценка параметра в общем случае находится из решения уравнения максимизации полинома вида

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} k_{iv}(\vartheta)[x_v^i - m_{iv}(\vartheta)]\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0, \qquad (1)$$

где $m_{iv}(\vartheta)$ – начальные моменты i-го порядка рассматриваемой случайной величины, зависящие от номера выборочного значения v.

Весовые коэффициенты $k_{iv}(\vartheta)$, $i=\overline{1,s}$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{s} k_{jv}(\vartheta) F_{(i,j)v}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} m_{iv}(\vartheta), \quad i=\overline{1,s}, \quad v=\overline{1,n}.$$

В последнем выражении функции $F_{(i,j)v}(\vartheta)$ – центрированные коррелянты размером (i, j), которые связаны с начальными моментами соотношением

$$F_{(i,j)v}(\vartheta) = m_{(i+j)v}(\vartheta) - m_{iv}(\vartheta) m_{jv}(\vartheta).$$

Предположим, что $\breve{\vartheta}_k$ является решением уравнения вида (1), соответствующим k-й итерации, и обозначим левую часть (1) через $f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k)$. Чтобы найти следующее приближенное значение $\breve{\vartheta}_{k+1}$, согласно методу Ньютона-Рафсона [3, 6], необходимо разложить функцию $f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k)$ на $(k+1)$-м шаге в ряд Тейлора в окрестности $\breve{\vartheta}_k$, полученный на предыдущем k-м шаге итерации, и ограничиваться двумя членами разложения:

$$f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k) + (\breve{\vartheta}_{k+1} - \breve{\vartheta}_k) \frac{d}{d\breve{\vartheta}_k} f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k) = 0. \quad (2)$$

Используя выражение (2), легко показать, что итеративная процедура Ньютона-Рафсона для определения приближенного значения оценки на $(k+1)$-м шаге имеет вид

$$\breve{\vartheta}_{k+1} = \breve{\vartheta}_k - \frac{f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k)}{\frac{d}{d\breve{\vartheta}_k} f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k)}. \quad (3)$$

Очевидно, что при правильно выбранном первом приближении $\breve{\vartheta}_0$ последовательность $\breve{\vartheta}_k$ при $k \to \infty$ сойдется к корню уравнения максимизации полинома $\breve{\vartheta}$.

На практике удобнее пользоваться итеративной процедурой, аналогичной процедуре накопления, впервые предложенной Фишером [5]. Представим выражение в знаменателе (3) в развернутом виде:

$$\frac{d}{d\breve{\vartheta}_k} f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k) = \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} \frac{d}{d\breve{\vartheta}_k} k_{iv}(\breve{\vartheta}_k)[x_v^i - m_{iv}(\breve{\vartheta}_k)] - $$
$$- \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} k_{iv}(\breve{\vartheta}_k) \frac{d}{d\breve{\vartheta}_k} m_{iv}(\breve{\vartheta}_k). \quad (4)$$

Легко показать, что вследствие усиленного закона больших чисел [7] при $n \to \infty$ и $k >> 1$ первое слагаемое выражения (4) с вероятностью 1 стремится к нулю. Второе слагаемое описывает количество извлекаемой информации $J_{sn}(\breve{\vartheta}_k)$ с обратным знаком [1]. Тогда итеративную процедуру вида (3) можно записать в виде

$$\breve{\vartheta}_{k+1} = \breve{\vartheta}_k + J_{sn}^{-1}(\breve{\vartheta}_k) f(\vec{x}/\breve{\vartheta}_k). \quad (5)$$

Данная процедура в вычислительном отношении проще процедуры Ньютона-Рафсона, поскольку нет необходимости вычислять статистику вида

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} \frac{d}{d\breve{\vartheta}_k} k_{iv}(\breve{\vartheta}_k)[x_v^i - m_{iv}(\breve{\vartheta}_k)],$$

которая зависит от выборочных данных.

Итеративную процедуру вида (3) можно использовать даже при небольшом объеме выборки, поскольку первое слагаемое в выражении (4) будет пренебрежимо мало по сравнению с количеством извлекаемой информации.

Рассмотренные итеративные процедуры нахождения оценок максимизации полинома являются приближенными и чувствительны к начальному приближению.

В качестве начального приближения $\breve{\vartheta}_0$ целесообразно выбирать решение уравнения (1) при степени полинома s=1, или же его можно находить на основе применения потенциально менее точного метода нахождения значения оцениваемого параметра, например, метода наименьших квадратов.

Выводы

В данной работе адаптированы известные итеративные процедуры для нахождения скалярной оценки с помощью метода максимизации полинома и неодинаково распределенных выборочных значениях. При использовании итеративных методов свойства получаемых оценок (состоятельность, асимптотическая эффективность) гарантируются наперед заданной точностью вычислений. Для сокращения вычислительных затрат среди итеративных методов предпочтительней применять процедуру, аналогичную процедуре накопления Фишера.

Литература: **1.** *Кунченко Ю.П., Лега Ю.Г.* Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома. К.: Наук. думка, 1992. 180 с. **2.** *Коваль В.В.* Застосування методу максимізації поліному для оцінювання параметрів радіосигналу на фоні адитивно-мультиплікативних завад // Праці III Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів»: Тези доповідей. Черкаси: ЧДТУ, 2011, С.116-118. **3.** *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с. **4.** *Гавриш А.С.* Способы численного решения систем уравнений максимизации полинома при неодинаково распределенных выборочных значениях // Радиотехника. Харьков. 2000. №115.С. 47-50. **5.** *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975. 776 с. **6.** *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965. 780 с. **7.** *Гихман И.И., Скороходов А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. К.: Вища школа, 1979. 408с.

Поступила в редколлегию 08.06.2011

Рецензент: д-р техн. наук Снитюк В.Е.

Гавриш Александр Степанович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры радиотехники Черкасского государственного технологического университета. Научные интересы: статистическая обработка сигналов. Адрес: Украина, 18006, Черкассы, бул. Шевченко, 406, тел. (0472)730261, E-mail: hackee74@yahoo.com.

Заболотный Сергей Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры радиотехники Черкасского государственного технологического университета. Научные интересы: статистическая обработка сигналов. Адрес: Украина, 18006, Черкассы, бул. Шевченко, 406, тел. (0472)730261, E-mail: zabolotni@ukr.net.

Коваль Виталий Владимирович, заместитель заведующего кафедрой «Информационных технологий и экономической кибернетики» Восточноевропейского университета экономики и менеджмента. Научные интересы: статистическая обработка сигналов. Адрес: Украина, 18036, Черкассы, ул. Нечуй-Левицкого, 16, E-mail: vitkoval@ukr.net.