УДК 621.391

Ю. В. ГАРБУЗОВ, канд. техн. наук.

ВЫЧИСЛЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ КОМПЛЕКСНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА ПО ВЫБОРКАМ ФИЗИЧЕСКОГО СИГНАЛА С РАВНОМЕРНЫМ ИНТЕРВАЛОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Цифровая обработка радиосигналов все глубже внедряется в область радиовещания, телевидения, метрологии, радиолокации, навигации, связи, контроля параметров, метрологии и, в частности, телеметрии, систем передачи данных, защиты информации и многие другие отрасли техники, производства и экономики. Основную информацию, заложенную в радиосигнале, несет его комплексная огибающая. При обработке комплексной огибающей в цифровых фильтрах используется аппарат быстрого преобразования Фурье (БПФ) вне зависимости от того, о каком сигнале идет речь – конечной или бесконечной длительности. Этот аппарат применяется при вычислении быстрых сверток как простых, так и секционированных, а также при извлечении информации непосредственно из спектра сигнала, минуя обратное БПФ.

Обычно получение выборок комплексной огибающей сопряжено с некоторыми трудностями. Приходится либо путем гетеродинирования производить разделение физического сигнала на синфазную и квадратурную составляющие с последующим получением выборок из их огибающих, либо брать выборки мгновенных значений физического сигнала, используя поочередно два различных интервала дискретизации [1]. Аналитический сигнал содержит ровно столько же информации, сколько физический, поскольку его квадратурная составляющая получается из него же. Поэтому обязательно должен существовать способ получения этих выборок непосредственно из физического радиосигнала. Докажем, что это возможно при равномерном шаге дискретизации.

Как показано в работе [1], если интервал дискретизации T полосового сигнала выбран таким образом, что

$$T = (m + 0,25)T_0 \tag{1}$$

при соблюдении условия Котельникова:

$$T < \frac{1}{\Delta F}, \tag{2}$$

то

$$a(nT) = \mathrm{Re}\left\{\mathcal{A}(nT)e^{jn\frac{\pi}{2}}\right\}. \tag{3}$$

Здесь $a(nT) = [a(t)]_{t=nT}$ – выборки модулированного радиосигнала $a(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ в моменты времени $t = nT$; $m,n \in Z$; ΔF – полоса спектра сигнала $a(t)$; $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ – период несущей радиосигнала, $A(t)$ и $\theta(t)$ – огибающая и фазовая добавка, несущие информацию о модулирующем сигнале; $\mathcal{A}(nT) = A(nT)e^{j\theta(nT)} = A_c(nT) + jA_s(nT)$ – выборки комплексной огибающей радиосигнала, n – номер отсчета выборки; m - максимальное целое число, при котором удовлетворяется условие (2).

Поскольку $e^{jn\frac{\pi}{2}} \in [1; j; -1; -j]$, выборки сигнала $a(nT)$ при соблюдении условия (1), согласно выражению (3), будут поочередно совпадать со значениями действительной $A_c(nT)$ и мнимой $A_s(nT)$ составляющих его комплексной огибающей $\mathcal{A}(nT)$ в соответствии с таблицей.

Таблица

№№ последовательностей	I	II	III	IV
n	$4m$	$4m+1$	$4m+2$	$4m+3$
$a(nT)$	$A_c(nT)$	$-A_s(nT)$	$-A_c(nT)$	$A_s(nT)$

Как следует из таблицы, последовательность

$$\{a(nT)\}_{n=0}^{N-1} \quad (4)$$

можно разбить на четыре последовательности: $\{A_c(nT)\}_{n=0}^{N-4}$, $\{-A_s(nT)\}_{n=1}^{N-3}$, $\{-A_c(nT)\}_{n=2}^{N-2}$, $\{A_s(nT)\}_{n=3}^{N-1}$, размещенные в столбцах I, II, III и IV в предположении, что общее число выборок N кратно четырем. При этом четыре полученные последовательности являются результатом двукратного прореживания по времени исходной последовательности $\{a(nT)\}_{n=0}^{N-1}$, отличающегося от классического инверсией знаков во втором и третьем столбцах. Учтя эти инверсии, можно вычислить дискретное преобразование Фурье (ДПФ) комплексной огибающей исходного радиосигнала с помощью классического алгоритма БПФ с прореживанием по времени.

Действительно, в общем случае $S_A(k) = S_C(k) + jS_S(k)$,

где $S_A(k)$, $S_C(k)$, и $S_S(k)$ – ДПФ комплексной огибающей, а также ее действительной и мнимой составляющих соответственно; k – номер спектрального отсчета.

Пусть однократное прореживание последовательности (4) производится таким образом, что ее четные элементы образуют только действительные, а нечетные – только мнимые выборки комплексной огибающей, и общее число выборок $N = 2^M$, где $M \in Z$. Тогда, как описано в работах [2-4], в соответствии с принципом осуществления БПФ с прореживанием по времени получим:

$$\left.\begin{aligned} S_A(k) &= S_C(k) + jW_{N/2}^k S_S(k) \\ S_A(k+N/2) &= S_C(k) - jW_{N/2}^k S_S(k) \end{aligned}\right\} \quad k \in [0;...;\frac{N}{2}-1]. \quad (5)$$

Здесь $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ – фазовый множитель.

Учитывая, что $j = e^{j\frac{\pi}{2}} = W_N^{-\frac{N}{4}}$, а произведение $jW_N^k = W_N^{k-\frac{N}{4}}$, выражение (5) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} S_A(k) &= S_C(k) + W_{N/2}^{k-N/4} S_S(k) \\ S_A(k+N/2) &= S_C(k) - W_{N/2}^{k-N/4} S_S(k) \end{aligned}\right\} \quad k \in [0;...;\frac{N}{2}-1]. \quad (6)$$

В соответствии с таблицей второе прореживание по времени последовательности выборок действительной составляющей комплексной огибающей даст сдвинутые последовательности $\{A_c(nT)\}_{n=0}^{N-4}$ и $\{-A_c(nT)\}_{n=2}^{N-2}$, а мнимой – $\{-A_s(nT)\}_{n=1}^{N-3}$ и $\{A_s(nT)\}_{n=3}^{N-1}$. Следовательно, спектры действительной и мнимой составляющих, фигурирующие в выражениях (5) и (6), определятся как:

$$S_C(k) = F_\Delta\{[A_C(nT)]_{n=0}^{N-4}\} - F_\Delta\{[-A_C(nT)]_{n=2}^{N-2}\} \text{ и}$$

$$S_S(k) = -F_\Delta\{[-A_S(nT)]_{n=1}^{N-3}\} + F_\Delta\{[+A_S(nT)]_{n=3}^{N-1}\},$$

где $F_\Delta\{[U(nT)]\}$ – операция вычисления БПФ последовательности $[U(nT)]$.

Иначе:

$$\left.\begin{aligned} S_C(k+N/4) &= \sum_{n=0}^{N/4-1} A_{CI}(nT)W_{N/4}^{kn} + W_{N/2}^k \sum_{n=0}^{N/4-1} A_{CII}(nT)W_{N/4}^{kn} \\ S_C(k) &= \sum_{n=0}^{N/4-1} A_{CI}(nT)W_{N/4}^{kn} - W_{N/2}^k \sum_{n=0}^{N/4-1} A_{CII}(nT)W_{N/4}^{kn}, \end{aligned}\right\}, \quad k \in [0;...;\frac{N}{4}-1]. \quad (7)$$

А также:

$$\left.\begin{aligned} S_S(k) &= -\sum_{n=0}^{N/4-1} A_{SI}(nT)W_{N/4}^{kn} + W_{N/2}^{k}\sum_{n=0}^{N/4-1} A_{SII}(nT)W_{N/4}^{kn} \\ S_S(k+N/4) &= -\sum_{n=0}^{N/4-1} A_{SI}(nT)W_{N/4}^{kn} - W_{N/2}^{k}\sum_{n=0}^{N/4-1} A_{SII}(nT)W_{N/4}^{kn}, \end{aligned}\right\}, \quad k \in [0;...;\frac{N}{4}-1]. \quad (8)$$

Здесь $A_{CI}(nT)$, $A_{CII}(nT)$, $A_{SI}(nT)$ и $A_{SII}(nT)$ – соответственно элементы последовательностей, расположенных в столбцах I, III, II и IV таблицы. При дальнейшем прореживании по времени этих четырех последовательностей аппарат БПФ может быть использован в его классическом виде.

Анализируя выражения (6), (7) и (8), можно заключить, что ДПФ модулированного сигнала может быть получено из одномерного массива отсчетов его мгновенных значений, взятых с равномерным интервалом дискретизации T, выбранным в соответствии с выражениями (1) и (2), посредством классического аппарата вычисления БПФ, имеющего две особенности. Эти особенности проявляются только на двух этапах вычисления спектральных отсчетов: предпоследнем – объединения четырех N/4-точечных спектральных массивов в два N/2-точечных в соответствии с выражениями (7) и (8), и последнем – объединения двух N/2-точечных в один N-точечный массив (6).

Особенность предпоследнего этапа состоит в инверсиях знаков перед некоторыми членами классических формул БПФ. Действительно, если в выражении (7) проинвертировать знаки перед вторыми слагаемыми, а в выражении (8) – перед первыми, они примут вид классических «бабочек» для БПФ с прореживанием по времени. Производя предварительную инверсию знаков перед соответствующими членами, процедуру предпоследнего этапа можно реализовать посредством классического алгоритма БПФ. Поскольку БПФ – операция линейная, инверсия знаков может быть произведена и после вычислений.

Особенность последнего этапа состоит в том, что в отличие от классической «бабочки» в выражении (6) перед вторыми суммами фазовые множители возведены не в степень k, а в $k - N/4$. Все множество фазовых множителей $\{W_N^k\}_{k=0}^{N-1}$ представляет собой совокупность радиусов-векторов на комплексной плоскости, концы которых равномерно распределены по единичной окружности. В классической «бабочке» используется лишь подмножество объемом $N/2$, а именно: $\{W_N^k\}_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$. Но в выражении (6) используется массив $\{W_N^k\}_{k=-\frac{N}{4}}^{\frac{N}{4}-1}$. На комплексной плоскости это соответствует повороту массива фазовых множителей классической «бабочки» на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Нетрудно показать, что при нарушении равенства (1), но неуклонном соблюдении неравенства (2), спектральная картина комплексной огибающей радиосигнала соответственно сдвигается по частоте в ту или иную сторону, в зависимости от того, в какую сторону оно нарушается. Однако форма графика модуля и аргумента спектральной плотности самой комплексной огибающей при этом не изменяется. Следовательно, описываемый алгоритм пригоден для определения доплеровских и других сдвигов несущей частоты при гибкости алгоритма в целом.

<u>Вывод.</u> Дискретное преобразование Фурье комплексной огибающей радиосигнала может быть получено из выборок мгновенных значений этого сигнала, взятых с равномерным интервалом дискретизации по Котельникову посредством классического аппарата БПФ с прореживанием по времени.

Список литературы: 1. *Гарбузов Ю. В., Глинский И. Ю., Пугач А. А.* Получение выборок комплексной огибающей полосового радиосигнала. Радиотехника. Харьков. 1990. Вып. 93. С. 33 – 36. 2. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. М: Радио и связь, 1986. 512 с. 3. *Бондарев В. Н., Трёстер Г., Чернега В. С.* Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. Пособие для вузов. Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. 398 с. 4. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М: Мир, 1978. 848 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники *Поступила в редколлегию 12.10.2001*