

ОДИН АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

А. А. Волков, Э. А. Дедиков, С. А. Канцедал

Харьков

При исследовании промышленного предприятия как управляемого объекта с целью его оптимизации необходимо прежде всего построить алгоритмы наилучшего использования ресурсов этого предприятия с учетом выполнения основных задач по объему выпуска продукции, ее качеству и срокам.

Практика расчета оптимальных производственных программ предприятия по выпуску продукции показывает, что ресурсы используются неполностью в значительной степени из-за наличия узких мест, которые являются следствием существующих диспропорций в мощностях различных производственных подразделений предприятия.

В связи с введением отчислений от прибыли предприятий за пользование производственными фондами возникает необходимость в более гибком подходе к расчету производственных программ, который позволил бы оптимально использовать наличные ресурсы предприятия с целью повышения эффективности его функционирования.

В данной работе рассматривается производственная ситуация, когда есть возможность некоторые типы недостающих ресурсов заменить типами ресурсов, имеющимися в избытке, а ресурсы, не подлежащие замене, дополнить посредством закупки оборудования или набора рабочей силы. Под заменой ресурсов подразумевается приспособление одних видов оборудования для выполнения другого характера работ или перекалфикация избыточной рабочей силы. Для этого предприятие должно располагать определенными денежными средствами.

Постановка задачи. Пусть для некоторого промышленного предприятия составлена следующая задача линейного программирования: найти неотрицательный вектор-план $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_l)$, максимизирующий прибыль

$$P = (\vec{P} \vec{X}), \quad (1)$$

при условиях

$$A\vec{X} \leq \vec{B}, \quad (2)$$

$$0 \leq \vec{X} \leq \vec{H}, \quad (3)$$

где $\vec{P} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ — l -мерный вектор прибыли, компоненты которого определяют прибыль на единицу продукции известного вида;

$\vec{B}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ — m -мерный вектор ресурсов, каждая компонента которого характеризует наличное количество ресурса каждого типа, участвующего в производстве продукции;

$A = \|a_{ij}\|_{m \times l}$ — технологическая матрица, a_{ij} -й элемент которой определяет затраты i -го типа ресурса на изготовление единицы продукции j -го вида;

$\bar{H} = (h_1, h_2, \dots, h_l)$ — l -мерный вектор ограничений на выпуск продукции.

Рассмотрим решение приведенной задачи по отношению к ограничениям на выпуск продукции и на ресурсы, для чего сравним следующие векторы:

$$\bar{H} - \bar{X}^* = \Delta \bar{H}, \quad (4)$$

$$\bar{B}^T - A \bar{X}^* = \Delta \bar{B}, \quad (5)$$

где $\bar{X}^*$ — вектор, доставляющий максимальное значение выражению (1)

при соблюдении условий (2), (3). Тогда ненулевые компоненты $\Delta \bar{H}$ определяют типы и количество изделий, которые можно произвести сверх

плана $\bar{X}^*$, а нулевые компоненты $\Delta \bar{B}$ — узкие места. Ненулевые же компоненты $\Delta \bar{B}$ выявят типы недоиспользованных ресурсов и их количества.

Пусть теперь известны типы ресурсов, имеющиеся в избытке, с помощью которых можно заменить в указанном выше смысле типы недостающих ресурсов, и известны типы недостающих ресурсов, не подлежащих замене.

Необходимо установить, какое количество ресурсов надо заменить и дополнить, чтобы максимально использовать остаток ресурсов, полученный в результате решения $\bar{X}^*$, в целях увеличения прибыли при заданных ограничениях на выпуск и на денежные средства.

Математическая модель. Введем следующие обозначения:

x_j — количество изделий j -го вида в дополнительном выпуске;

$j = 1, 2, \dots, n$, где $n \leq l$;

p_j — прибыль на единицу продукции j -го вида;

$A' = \|a'_{ij}\|_{m \times n}$ — технологическая подматрица, получаемая из матрицы A путем вычеркивания столбцов, соответствующих затратам ресурсов на единицу изделий, не подлежащих замене в дополнительном выпуске;

Q — множество ресурсов, участвующих в изготовлении продукции;

S — подмножество недоиспользованных (заменяющих) ресурсов;

I — подмножество вновь вводимых ресурсов;

R — подмножество заменяемых ресурсов;

c_i — цена единицы замененного ресурса;

$i \in R$

c_i — цена единицы вновь введенного ресурса;

$i \in I$

α_i — коэффициент преобразования ресурсов;

Z — количество средств для ликвидации узких мест, которыми располагает предприятие;

L — полная прибыль, полученная в результате ликвидации узких мест.

Общее количество недоиспользованных ресурсов запишем так:

$$\Delta B = \sum_{i \in S} \Delta b_i, \quad (6)$$

где Δb_i — ненулевые компоненты ΔB из (5).

Отчисления (штрафы) с единицы прибыли за неполное использование ресурсов представим в виде положительно определенной функции

$$y = \varphi(\Delta B) = \varphi\left(\sum_{i \in S} \Delta b_i\right), \quad (7)$$

удовлетворяющей условиям $y=0$ при $\Delta B=0$ (y ограничена при остальных ΔB).

Тогда можем сформулировать следующую задачу: найти неотрицательный дополнительный вектор $\bar{X}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, максимизирующий прибыль:

$$L = \left[P + \sum_{j=1}^n p_j x'_j - \varphi\left(\Delta B - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in S} a'_{ij} x'_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in R} a_i a'_{ij} x'_j\right) \left(P + \sum_{j=1}^n p_j x'_j \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in R} a'_{ij} c_i x'_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I} a'_{ij} c_i x'_j \right] \quad (8)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i \in R} a'_{ij} c_i x'_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I} a'_{ij} c_i x'_j \leq Z, \quad (9)$$

$$0 \leq x'_j \leq \Delta h_j, \quad (10)$$

где Δh_j — j -я компонента ΔH из (4).

Вполне очевидно, что (8) имеет смысл при

$$\Delta B - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in R} a'_{ij} x'_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in R} a_i a'_{ij} x'_j > 0. \quad (11)$$

Допущения в модели 1. Цена C_i единицы вновь вводимого ресурса

включает все виды затрат, необходимых при введении ресурса i -го типа.

2. Цена C_i единицы замененного ресурса включает все виды затрат, необходимых при замене ресурса i -го типа.

3. Предполагается, что замена и введение новых ресурсов происходят за время меньшее, чем требуется для производства совокупности изделий за планируемый период.

Метод решения. Задача (8) — (10) сводится к функциональному уравнению динамического программирования. Для этого рассмотрим n -шаговый процесс получения прибыли согласно числу переменных x'_j . Положим

$$\sum_{i \in S} a'_{ij} = A_{ij}; \quad \sum_{i \in S} a_i a'_{ij} = B_{ij}; \quad \sum_{i \in I} a'_{ij} c_i = C_{ij}; \quad \sum_{i \in R} a'_{ij} c_i = V_{ij}$$

и ограничимся случаем, когда существует линейная зависимость между величиной штрафа и количеством недоиспользованных ресурсов. Тогда из (8) — (10) получим

$$L = \max_{\{x'_j\}} \left\{ P + \sum_{j=1}^n p'_j x'_j - \xi \left[\Delta B - \sum_{j=1}^n (A_{ij} + B_{ij}) x'_j \right] \times \right. \\ \left. \times \left(P + \sum_{j=1}^n p'_j x'_j \right) - \sum_{j=1}^n (C_{ij} + V_{ij}) x'_j \right\}, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n (C_{ij} + V_{ij}) x'_j \leq Z, \quad (13)$$

$$0 \leq x'_j \leq \Delta h_j,$$

где ξ — коэффициент пропорциональности.

Определим далее приращение прибыли ΔL_k на k -м шаге n -шагового процесса.

Из (12) получим

$$L_{k-1} = P + \sum_{j=1}^{k-1} p'_j x'_j - \xi \left[\Delta B - \sum_{j=1}^{k-1} (A_{ij} + B_{ij}) x'_j \right] \cdot \left(P + \sum_{j=1}^{k-1} p'_j x'_j \right) - \\ - \sum_{j=1}^{k-1} (C_{ij} + V_{ij}) x'_j \quad (14)$$

или

$$L_{k-1} = P_{k-1} - \xi \Delta B_{k-1} P_{k-1} - C_{k-1} - V_{k-1}. \quad (15)$$

Для k -го шага имеем

$$L_k = P_{k-1} + p'_k x'_k - \xi [\Delta B_{k-1} - (A_{ik} + B_{ik}) x'_k] (P_{k-1} + p'_k x'_k) - \\ - (C_{ik-1} + V_{ik-1}) + (C_{ik} + V_{ik}) x'_k. \quad (16)$$

Тогда

$$\Delta L_k = L_k - L_{k-1} = p'_k x'_k - \xi \Delta B_{k-1} p'_k x'_k + \xi P_{k-1} (A_{ik} + B_{ik}) \times \\ \times x'_k + \xi p'_k (A_{ik} + B_{ik}) (x'_k)^2 - (C_{ik} + V_{ik}) x'_k. \quad (17)$$

Далее следует

$$L = P_0 + \max_{\{x'_k\}} \sum_{k=1}^n \Delta L_k (x'_k), \quad (18)$$

где $P_0 = P - \xi \Delta B P$ — истинная прибыль до замены и введения ресурсов, а максимизация совершается по всему множеству значений $\{x'_k\}$, определяемому (10), (13).

Введем следующую последовательность функций:

$$f_n(P, \Delta B, Z) = \max_{\{x'_k\}} \sum_{k=1}^n \Delta L_k (x'_k) \quad (19)$$

— максимальное приращение прибыли за весь n -шаговый процесс;

$$g_1(P, \Delta B, x'_1) = \Delta L_1(x'_1) \quad (20)$$

— приращение прибыли на первом шаге при выборе количества изделий, равного x'_1 ;

$G(P, \Delta B, Z)$ — преобразованное состояние системы при выборе величины x'_1 ;

Тогда, используя принцип оптимальности, запишем функциональное уравнение Беллмана для n -шагового процесса

$$f_n(P, \Delta B, Z) = \max_{\substack{0 \leq x'_1 \leq \Delta h_1 \\ 0 \leq (C_{11} + V_{11})x'_1 \leq Z}} [g_1(P, \Delta B, x'_1) + f_{n-1}(G(P, \Delta B, Z))], \quad (21)$$

или в развернутом виде

$$f_n(P, \Delta B, Z) = \max_{\substack{0 \leq x'_1 \leq \Delta h_1 \\ 0 \leq (C_{11} + V_{11})x'_1 \leq Z}} [p'_1 x'_1 - \xi \Delta B p'_1 x'_1 + \xi P (A_{11} + B_{11}) x'_1 + \xi p'_1 (A_{11} + B_{11}) (x'_1)^2 - \\ - (C_{11} + V_{11}) x'_1 + f_{n-1}(P + p'_1 x'_1; \Delta B - (A_{11} + B_{11}) x'_1; \\ Z - (C_{11} + V_{11}) x'_1)]. \quad (22)$$

Решение (22) получим в виде вектора $X'^* = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, согласно которому определим количество замененных и вновь введенных ресурсов.

Вычислительная схема. Численное решение уравнения (22) производится методом понижения размерности фазового пространства $(P, \Delta B, Z)$ путем введения неопределенного множителя λ .

Как показано в работе [3], можем записать следующие соотношения:

$$f_n(P, \Delta B) = \max_{0 \leq x'_1 \leq \Delta h_1} [g_1(P, \Delta B, x'_1) - \lambda (C_{11} + V_{11})x'_1 + f_{n-1}(P + p'_1 x'_1, \Delta B_{11} x'_1 - (A_{11} + B_{11}) x'_1)], \quad (23)$$

$$f_1(P, \Delta B) = \max_{0 \leq x'_n \leq \Delta h_n} [g_n(P, \Delta B, x'_n) - \lambda (C_{in} + V_{in})x'_n], \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n (C_{ii} + V_{ii}) x'_i \leq Z. \quad (25)$$

Решения (23) получим на множестве λ в виде последовательности $\{f_n(P, \Delta B, \lambda)\}$. Дальнейший поиск оптимального решения (22) заключается в максимизации по λ последовательности $\{f_n(P, \Delta B, \lambda)\}$.

Истинное значение прибыли за n -шаговый процесс находим из выражения

$$f_n^*(P, \Delta B) = f_n(P, \Delta B, \lambda^*) + \lambda^* \cdot T(X'^*), \quad (26)$$

где λ^* — значение множителя, доставляющее максимум (23);

$T(\vec{X}'^*)$ — общий расход денежных средств при оптимальном векторе $\vec{X}'^*$.

Полная прибыль определяется по уравнению

$$L = P_0 + f_n^*(P, \Delta B). \quad (27)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. Изд-во «Советское радио», 1964.
2. Е. С. Вентцель. Элементы динамического программирования. Изд-во «Наука», 1964.
3. Р. Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. Изд-во «Наука», 1965.