УДК 517.512.2:519.24:534

Е. М. ГУСЯТИН, канд. техн. наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Многие задачи управления динамическими процессами, такими, как воспроизведение случайных вибраций при стендовых испытаниях на надежность, распределение текущих сред с помощью инженерных сетей, формирование звуков и слов заданной тембровой окраски и другие требуют построения математической модели динамической системы. При этом модель должна быть просто контролируемой, быстро перестраиваемой и по возможности максимально приближенной к реальной системе.

Рассмотрим моделирование динамической системы по заданной частотной характеристике. Так как частотная характеристика реальной системы определяется путем статистической обработки результатов измерения, будем считать ее заданной таблично

$$W(i\omega_k) = P(\omega_k) + iQ(\omega_k),\ k = \overline{1,N}. \tag{1}$$

Моделирование производится на основе разложения функции

$$f(t) = e^{\alpha t} w(t)$$

в пространстве L^2 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t)\, g\ (t)\, dt$$

в ряд по биортонормированной системе (БНС) функций $\{\sigma_k, \psi_k\}$, где $w(t)$ — импульсная переходная функция (и. п. ф.) системы, соответствующая частотной характеристике (1), α выбирается таким образом, чтобы $f(t) \in L^2$; $\{\sigma_k, \psi_k\}$ строится в L^2 биортогонализацией линейно независимых полных систем $\{g_k\}$ и $\{e_k\} \subset L^2$ и имеет следующий вид:

$$\sigma_k(t) = \sum_{j=1}^{k} C_{kj} e_j(t), \quad \psi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} B_{kj} g_j(t), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Коэффициенты C_{kj}, B_{kj} определяются из рекуррентных соотношений [1]

$$\hat{\sigma}_k(t) = e_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} (e_k, \psi_j)\, \sigma_l(t);$$

$$\hat{\psi}_k(t) = g_k(t) - \sum_{j=1}^{k-1} (g_k, \sigma_j)\, \psi_j)t); \tag{2}$$

$$\sigma_k(t) = \frac{\hat{\sigma}_k(t)}{(\hat{\sigma}_{ki}\, \hat{\psi}_k)^{1/2}}, \qquad \psi_k(t) = \frac{\hat{\psi}_k(t)}{(\hat{\sigma}_k, \hat{\psi}_k)^{1/2}}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

при начальных условиях

$$\hat{\sigma}_1(t) = e_1(t), \quad \hat{\psi}_1(t) = g_1(t).$$

Положительность скалярного произведения $(\hat{\sigma_k}, \hat{\psi_k})$ достигается выбором у соответствующего элемента $e_k(t)$ такого знака, чтобы выполнялось неравенство $(e_k, \hat{\psi_k}) > 0$.

В качестве последовательности $\{e_k\}$ выберем систему

$$\cos \omega_1 t, \ \sin \omega_1 t, \ \ldots, \ \cos \omega_N t, \ \sin \omega_N t, \ \ldots$$

или

$$e_k(t) = \begin{matrix} \cos \omega_\nu t, & k = 2\nu - 1, \\ \sin \omega_\nu t, & k = 2\nu, \end{matrix} \tag{3}$$

а $\{g_k\}$ зададим следующим образом:

$$g_k(t) = \begin{matrix} v(t) \cos \omega_\nu t, & k = 2\nu - 1, \\ v(t) \sin \omega_\nu t, & k = 2\nu. \end{matrix} \tag{4}$$

Такой выбор L^2, $\{e_k\}$ и $\{g_k\}$ позволяет использовать заданные значения $W(i\omega_k)$ для моделирования динамической системы.

Действительно, частичная сумма разложения $f(t)$ по БНС $\{\sigma_k, \psi_k\}$ запишется, как

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \psi_k(t),$$

функция $w(t)$ будет аппроксимироваться суммой

$$w_n(t) = e^{-\alpha t} \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_k \psi_k(t); \tag{5}$$

$$\zeta_k = (f, \sigma_k) = \sum_{j=1}^{k} C_{kj} (f, e_j), \tag{6}$$

где, учитывая (1),

$$(f, e_j = \begin{matrix} P(\omega_j), \\ Q(\omega_j). \end{matrix}$$

Таким образом,

$$w_n(t) = e^{-\alpha t}\sum_{k=2}^{n} d_k g_k(t), \tag{7}$$

$$d_k = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j B_{jk}. \tag{8}$$

Выражение (7) можно интерпретировать как параллельное соединение с общим входом линейных систем с и. п. ф. $h_k(t) = d_k e^{-\alpha t} g_k(t)$, вид которой определяется функцией $w(t)$, ω_k задает частотный диапазон ее действия, а d_k, как это видно из (6), (8), зависит от заданных значений $W(j\omega_k)$.

Выберем $v_k(t)$ следующим образом:

$$v_k(t) = e^{-\alpha_k t}, \quad t > 0.$$

Тогда, применив к (7) преобразование Фурье, получим, что в частотной области заданная функция $W(i\omega_k)$ интерполируется выражением

$$W_n(i\omega) = \sum_{\nu=1}^{n/2} H_\nu(i\omega), \quad n/2 = N;$$

$$H_\nu(i\omega) = \frac{d_{2\nu-1}(\alpha_\nu + i\omega) + d_{2\nu}\omega_\nu}{(\alpha_\nu + i\omega)^2 + \omega_\nu^2}. \tag{9}$$

Точками интерполяции являются ω_k, так как выполняются соотношения

$$W_n(i\omega_k) = W(i\omega_k), \quad k = \overline{1,N}. \tag{10}$$

Выбор модели в виде (9) позволяет оперативно изменять частотную характеристику $W_n(i\omega)$, подставляя в соотношения (6), (8) текущие значения частотной характеристики реальной системы. Контроль и при необходимости коррекция осуществляется по спектральной плотности выходного сигнала в выбранных точках частотного диапазона на основании интерполирующего свойства (10).

Значения параметров α_1, ω_1, ..., α_N, ω_N, задающие оптимальное моделирование динамической системы (1), определяются при минимизации функционала

$$\delta = \|f - f_n\|^2. \tag{11}$$

Оценкой для (11) служит выражение

$$\|f - f_n\| \leqslant \|f - \bar{f}_n\| + \|f_n - \bar{f}_n\|, \tag{42}$$

где

$$\bar{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k(t), \quad \gamma_k = (f, \varphi_k)$$

является разложением $f(t)$ по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^{k} D_{kj} g_j(t),$$

построенной в L^2 ортогонализацией последовательности $\{g_k\}$.

Учитывая, что $f_n(t)$ можно представить единственным образом

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \varphi_k(t),$$

$$\eta_k = (f_n, \varphi_k) = \sum_{j=k}^{n} \zeta_j (\psi_j, \psi_k),$$

перепишем (12) в виде

$$\|f - f_n\| \leqslant \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - \gamma_{ik})^2}. \qquad (13)$$

Оценка (13) позволяет в качестве функции цели выбрать следующий критерий:

$$\Delta = \max \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2. \qquad (14)$$

Запишем $\{\varphi_k\}$ в матричной форме

$$\varphi(t) = D_g(t),$$

где $D = \begin{vmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ D_{21} & D_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{vmatrix}$ — матрица коэффициентов,

а $g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$ — вектор элементов $\{g_k\}$.

Условие ортогональности в матричной форме имеет вид

$$(\varphi, \varphi^*) = A\Gamma = I, \qquad (15)$$

где $A = DD^*$, Γ — матрица Грама ОНС $\{\varphi_k\}$.

Функция цели (14) запишется следующим образом

$$\Delta = \gamma^* \gamma = s^* A s, \quad \text{где} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} (f, g_1) \\ \dots \\ (f, g_n) \end{bmatrix}.$$

Тогда задача сводится к определению максимального значения положительно определенной квадратичной формы

$$\Delta = s^* \Gamma^{-1} s \qquad (16)$$

при линейных ограничениях (15).

Учитывая соотношение для производной обратной матрицы

$$(\Gamma^{-1})' = -\Gamma^{-1} \Gamma' \Gamma,$$

получим выражение для производной функции (16)

$$\Delta'_{p_k} = (s^*)'_{p_k} \Gamma^{-1} s + s^* \Gamma^{-1} s'_{p_k} - s^* \Gamma^{-1} \Gamma'_{p_k} s, \qquad (17)$$

где p_k принадлежит множеству параметров $\alpha_1, \omega_1, \dots \alpha_N, \omega_N$.

Расчет коэффициентов математической модели (9) формирования звуков *i* и *aw* по $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$

Формула (17) дает возможность использовать для определения максимума критерия (14) градиентные методы [2].

Неравенство (13) является оценкой точности моделирования.

В качестве примера рассмотрим расчет коэффициентов математической модели (9) формирования звуков *i* и *aw* по заданным звуковым спектрам $S_1(\omega)$ (непрерывная линия) и $S_2(\omega)$ (пунктирная линия)

(рисунок) в частотном диапазоне 200, 1000 Гц [3]. При условии, что на систему (9) действует белый шум, амплитудно-частотной характеристикой системы будет

$$A(\omega) = \sqrt{S(\omega)}.$$

Тембровая окраска звука задается фазочастотной характеристикой голосового тракта, которую выберем в виде

$$\theta(\omega) = 2\pi\left(\frac{\omega_н}{\omega_н - \omega_в} + \frac{\omega}{\omega_в - \omega_н}\right),$$

где $\omega_н = 200$, $\omega_в = 1000$.

Таким образом, заданная $W(i\omega)$ имеет вид

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)} = \sqrt{S(\omega)}\cos\theta(\omega) + i\sqrt{S(\omega)}\sin\theta(\omega).$$

Выбор $\theta(\omega)$ в другом виде изменит тембровую окраску, но спектр звука останется неизменным.

Для оперативного изменения параметров системы выберем $v_k(t) = e^{-\beta t}$, а в качестве $\omega_к$ — 10 равноотстоящих точек частотного диапазона, $\beta = 1$.

По соотношениям (2), (3), (4) с помощью программ, написанных на языке Фортран, рассчитаем коэффициенты БНС функций.

Значение параметров d_k

d	i	aw	d	i	aw
d_1	0,111	0,075	d_{11}	0,001	0,002
d_2	0,063	0,042	d_{12}	—0,03	—0,04
d_3	—0,045	—0,03	d_{13}	0,046	0,04
d_4	—0,108	—0,072	d_{14}	0,007	0,006
d_5	0,113	0,078	d_{15}	—0,01	—0,007
d_6	—0,034	—0,024	d_{16}	0,038	0,027
d_7	0,011	0,016	d_{17}	—0,024	—0,015
d_8	0,063	0,089	d_{18}	—0,009	—0,006
d_9	—0,034	—0,077	d_{19}	0,009	0,006
d_{10}	0,002	0,005	d_{20}	—0,016	—0,01

Подавая на систему (9) сигнал типа «белый шум» и определив по формулам (6), (8) значения параметров d_k для S_1, получим формирование соответствующего звука. Для перехода от одного звука к другому достаточно пересчитать параметры d_k по формулам (6), (8) при $k = \overline{1, 20}$ (таблица).

Список литературы: 1. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958. 507 с. 2. *Уайлд Д. Дж.* Методы поиска экстремума. М., 1967. 267 с. 3. *Кейтер Дж.* Компьютеры-синтезаторы речи. М., 1985. 236 с.

Поступила в редколлегию 30.12.88