ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

Артюх А.В.
Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36),
E-mail: ant_artjukh@mail.ru

The given work is devoted to the problem of the nonstationary plane parallel flow of viscous incompressible fluid modeling. The flow is described by a nonlinear equation for the stream function. For its solving it is proposed to use the method of successive approximation, the R-functions method and the Galerkin method. Numerical solutions are obtained.

Вязкие течения представляют собой важный класс прикладных задач. Необходимость моделирования вязких течений возникает, например, в гидроаэродинамике летательных аппаратов, в теплоэнергетике, при расчете искусственных сердечных клапанов и т.д.

В работе рассматриваются нестационарные плоскопараллельные вязкие течения в конечных односвязных областях. Математическое описание этих течений проводится на основании нелинейного уравнения четвертого порядка для функции тока $\psi(x,y,t)$, которая связана с вектором скоростей жидкости соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Математическая модель имеет вид (внешние силы считаем потенциальными):

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \mathrm{Re}\, J(\Delta\psi,\psi) = \Delta^2\psi \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ \psi\big|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s,t),\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s,t),\ s\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где Δ^2 – бигармонический оператор, Re – число Рейнольдса, Δ – оператор Лапласа, $J(\Delta\psi,\psi) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области $\Omega\subset R^2$, $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial s}$, $\tilde{g}$ – некоторые распределения нормальной и касательной составляющих скоростей потока соответственно.

В соответствии с методом R-функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева [1] построена общая структура решения задачи (1), (2) в виде

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi, \tag{3}$$

где f та g – соответственно продолжение $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ у Ω, $\omega(x,y)=0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$ ($\omega(x,y)=0$ на $\partial\Omega, \omega(x,y)>0$ в Ω, $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega$), $D_1 v=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$, Φ – неопределенная компонента структуры.

Для решения задачи (1), (2) использовали итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Последовательные приближения формируются по следующей схеме. Пусть $\psi^{(0)}(x,y,t)$ – начальное приближение (в качестве его можно взять, например, решение соответствующей задачи Стокса). В качестве нового приближения $\psi^{(n+1)}(x,y,t)$, $n=0,1,2,...$, возьмем решение следующей линейной задачи:

$$\frac{\partial\Delta\psi^{(n+1)}}{\partial t}+\mathrm{Re}\,J(\Delta\psi^{(n)},\psi^{(n)})=\Delta^2\psi^{(n+1)} \text{ в } \Omega, \tag{4}$$

$$\psi^{(n+1)}\Big|_{t=0}=\psi_0(x,y),\ \psi^{(n+1)}\Big|_{\partial\Omega}=\tilde{f}(s,t),\ \frac{\partial\psi^{(n+1)}}{\partial\mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega}=\tilde{g}(s,t),\ s\in\partial\Omega. \tag{5}$$

В соответствии с (3) структура решения задачи (4), (5) имеет вид:

$$\psi^{(n+1)}=f-\omega(D_1 f+g)+\omega^2\Phi^{(n+1)}. \tag{6}$$

Для аппроксимации неопределенной компоненты в структуре (6) воспользуемся методом Галеркина для нестационарных задач [2]. Для этого представим $\Phi^{(n+1)}=\Phi^{(n+1)}(x,y,t)$ в виде

$$\Phi^{(n+1)}=\Phi^{(n+1)}(x,y,t)\approx\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\tau_k(x,y).$$

Здесь $\{\tau_k\}$ – любая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций.

В соответствии с методом Галеркина функции $c_k(t)$ найдем как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются из условия ортогональности в пространстве $L_2(\Omega)$ невязки уравнения (4) к первым N координатным функциям последовательности $\{\omega^2\tau_k\}$. Доказана сходимость итерационного процесса (4), (5) для малых и средних чисел Рейнольдса к единственному обобщенному решению задачи (1), (2). Вычислительный эксперимент был проведен для различных областей Ω, различного числа координатных функций и чисел Рейнольдса. Численные результаты хорошо согласуются с результатами других авторов и результатами физических экспериментов.

Список источников:

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.