

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ ПРИ МАЛЫХ СИГНАЛАХ СИНХРОНИЗАЦИИ

Синхронизированные автогенераторы широко используются в различных радиоэлектронных устройствах в радиотехнике, связи, информационно-измерительной технике, автоматике. Процессы в них описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, точные методы решения которых, на сегодняшний день, отсутствуют. Существующие приближенные методы приводят к укороченным дифференциальным уравнениям, решение которых возможно только численными методами [1–5]. Это усложняет анализ, проектирование и оптимизацию как самих синхронизированных автогенераторов, так и устройств, их содержащих. В случае малых сигналов синхронизации и одного автогенератора задача несколько упрощается, поскольку в укороченных уравнениях амплитуду колебаний можно считать неизменной и рассматривать только нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее сдвиг фазы. Это уравнение может быть решено точно, однако полученное выражение настолько громоздко, что исследовать его не легче, чем исследовать исходное дифференциальное уравнение численным методом [6]. Для систем синхронизированных автогенераторов исследование возможно только численными методами, которые отнимают много времени и сил и не всегда позволяют получить необходимую информацию [7]. Трудности существенно увеличиваются, если система содержит фазовые обратные связи, значительно расширяющие ее функциональные возможности [8]. Основные свойства таких систем также могут быть определены путем рассмотрения только фазовых уравнений. Таким образом, цель статьи – разработка приближенного аналитического метода решения фазового укороченного уравнения синхронизированного автогенератора.

### Математическая модель автогенератора, синхронизированного на основном тоне.

Рассмотрим, для определенности, автогенератор с трансформаторной обратной связью, рис. 1. Результаты не изменятся существенно, если исходить из иной схемы одноконтурного автогенератора. Нелинейную характеристику усилительного элемента считаем безынерционной и аппроксимируем полиномом четвертой степени

$$i = a_0 + a_1 u_y + a_2 u_y^2 + a_3 u_y^3 + a_4 u_y^4,$$

где  $u_y = u + u_0$  – управляющее напряжение,  $u_0$  – фиксированное смещение, а  $u$  – напряжение положительной обратной связи на входе усилительного элемента, оно же является сигналом автогенератора. Непосредственный сигнал синхронизации  $i_c = I_c \cos(\omega_c t + \psi)$ , в данном случае в виде тока, подается в контур. Тогда одноконтурный автогенератор синхронизированный на основном тоне описывается уравнением

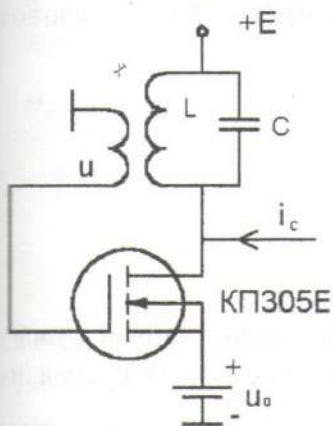


Рис. 1

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - 2\beta u - 3\gamma u^2 - 4\delta u^3) \frac{du}{d\tau} + u = kR\delta_k \frac{di_c}{d\tau},$$

где  $\varepsilon = \delta_k \alpha$  – малый параметр;  $\tau = \omega_c t$  – безразмерное время;  $\alpha = (kR\alpha_0 - 1) > 0$ ;  $\beta = \beta_0 / \alpha_0$ ;  $\gamma = \gamma_0 / \alpha_0$ ;  $\delta = \delta_0 / \alpha_0$ ;  $\delta_0 = a_4$ ;  $\alpha_0 = a_1 + 2a_2 u_0 + 3a_3 u_0^2 + 4a_4 u_0^3$ ;  $\beta_0 = a_2 + 3a_3 u_0 + 6a_4 u_0^2$ ;  $\gamma_0 = a_3 + 4a_4 u_0$ ;  $\alpha_0' = -\alpha_0 + 1/(kR)$ ;  $\delta_k = 1/Q$ ;  $\omega_0, R, Q$  – резонансная частота контура автогенератора, его сопротивление и добротность,  $k$  – модуль коэффициента положительной обратной связи.

Учитывая высокую добротность контура, считаем амплитуду и фазу колебаний медленно меняющимися функциями времени. Пусть также  $|d\psi/d\tau| \ll 1$ . Решение указанного выше уравнения может быть найдено в виде  $u = A \cos(\omega_c t + \varphi)$ . Далее, используя метод усреднения, приходим к укороченным уравнениям, описывающим амплитуду и фазу колебаний

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2}(y^3 - y) &= \frac{\varepsilon B}{2\alpha} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2\alpha y} \sin \theta &= -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{d\psi}{d\tau}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta = \varphi - \psi$  – сдвиг фазы;  $y = A/A_0$  – безразмерная амплитуда колебаний;  $B = I_c/I_0$ ;  $I_0 = A_0/(Rk)$ ;  $A_0 = \sqrt{4\alpha'_0/(3\gamma_0)}$  и  $A, A_0$  – амплитуды колебаний автогенератора в автономном режиме и в режиме синхронизации;  $(\Delta\omega/\omega_0) = (\omega_c - \omega_0)/\omega_0$ . Уравнения (1) и будем считать математической моделью синхронизированного на основном тоне автогенератора.

Поскольку сигнал синхронизации считается малым, то изменения амплитуды колебаний также малы, и ими можно пренебречь. Следовательно, амплитуду колебаний можно считать постоянной и равной амплитуде колебаний автогенератора в автономном режиме или же в режиме синхронизации, но при сдвиге фазы равном нулю. В последнем случае она определяется из первого уравнения системы (1) при  $\theta = 0$  и  $dy/d\tau = 0$ . Обозначим это значение безразмерной амплитуды как  $y_0$ . Таким образом, далее рассматривать можно только фазовое уравнение системы (1), которое записывается в виде

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\varepsilon B}{2\alpha y_0} \sin \theta = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{d\psi}{d\tau}. \quad (2)$$

### Решение фазового уравнения

Представим тригонометрическую функцию  $\sin \theta$  в виде ряда Маклорена. Тогда фазовое уравнение может быть представлено следующим образом

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \xi\theta = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{d\psi}{d\tau} - \xi \left( \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\theta^{2i-1}}{(2i-1)!} \right),$$

где  $\xi = \frac{\varepsilon B}{2\alpha y_0}$ .

Последний член в правой части этого уравнения в скобках представляет собой сумму знакопеременного ряда. Это обстоятельство позволяет ее оценить. Интересующая сумма не превосходит величины первого члена, в данном случае  $\theta^3/3!$ . Для максимального сдвига фазы, равного 1.57, упомянутый член равен  $-0.65$ . Следовательно, в полосе синхронизации совокупность нелинейных членов меняется по модулю от нуля до 0.65 и является достаточно малой. Данное уравнение представлено таким образом, что малые нелинейные члены, создающие затруднения при решении, показаны отдельно. Если теперь выделить малый параметр, то это уравнение можно будет решить методом малого параметра. Будем считать малым параметром величину  $1/3!$ , которая является множителем первого члена суммы. Итак, малый параметр  $\mu = 1/6 \approx 0.166$ .

Удержим только первое слагаемое в сумме. Погрешность, с которой будет представлена эта сумма, не превосходит величины члена  $\theta^5/5!$ , для максимального сдвига фазы, равного 0,079, что значительно меньше удержанного члена. Итак

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \xi\theta = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{d\psi}{d\tau} + \xi\mu\theta^3. \quad (3)$$

Данное уравнение является приближенным. Будем искать его решение в виде отрезка ряда

$$\theta = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3.$$

Подставляя его в уравнение (3) и выбирая члены, не содержащие малый параметр, получаем уравнение для определения первого приближения

$$\frac{d\theta_0}{d\tau} + \xi\theta_0 = -\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{d\psi}{d\tau}$$

Уравнение для поправок первого порядка находим, удерживая члены, содержащие множителем малый параметр в первой степени

$$\frac{d\theta_1}{d\tau} + \xi\theta_1 = \xi\theta_0^3.$$

Действуя далее аналогично, в соответствии с методикой сортировки членов выбранного метода, получаем уравнения для определения поправок второго порядка

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} + \xi\theta_2 = \xi(3\theta_0^2\theta_1)$$

и третьего порядка

$$\frac{d\theta_3}{d\tau} + \xi\theta_3 = \xi[3\theta_0(\theta_0\theta_2 + \theta_1^2)]$$

Приведенные уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и легко решаются. Это позволяет найти решение приближенно нелинейного дифференциального уравнения (3).

### Оценка погрешности приближенного решения

Поскольку, в конечном счете, интерес представляет решение исходного уравнения (2), то в качестве оценки погрешности, с которой приближенное решение удовлетворяет исходному уравнению, по аналогии с методом Галеркина, определим невязку. Для наиболее полной характеристики представим изменения величины невязки в полосе синхронизации. С этой целью рассмотрим стационарный режим. Тогда из полученных уравнений следует:

$$\theta_0 = -\frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right), \theta_1 = \theta_0^3 = \left[-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right]^3, \theta_2 = 3\theta_0^5 = 3\left[-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right]^5, \theta_3 = 12\theta_0^7 = 12\left[-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right]^7.$$

Выражение для невязки в стационарном режиме легко получить из уравнения (2)

$$\delta_i = -\sin\theta^{(i)} - \frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \quad (4)$$

В качестве аргумента в данном случае используется нормированная расстройка  $(\Delta\omega/\omega_0)_н = (\Delta\omega/\omega_0)/\xi$ , которая меняется в полосе синхронизации от  $-1$  до  $+1$  независимо от величины сигнала синхронизации и параметров автогенератора. В соотношении (4) невязка  $\delta_i$  соответствует конкретному приближенному решению  $\theta^{(i)}$ , содержащему определенное количество поправок. Их число равняется значению индекса  $i$ . Итак

$$\theta^{(0)} = \theta_0, \theta^{(1)} = \theta_0 + \mu\theta_1, \theta^{(2)} = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2, \theta^{(3)} = \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3.$$

Изменение невязки в полосе синхронизации для конкретного автогенератора будет показано в следующем разделе.

### Эксперимент

Для проверки теоретических соотношений использовался синхронизированный на основном тоне одноконтурный автогенератор с параметрами:  $f_0 = 50 \text{ kHz}$ ,  $\varepsilon = 1.7 \times 10^{-3}$ ,  $B = 0.010679$ ,  $A_0 = 0.9 \text{ V}$ ,  $R = 7.5 \text{ k}\Omega$ ,  $u_0 = -1 \text{ V}$ ,  $K = 0.16$ ,  $\xi = 1.07 \times 10^{-4}$ ,  $I_c = 8 \mu\text{A}$ ,  $\delta_k = 0.0213$ ,  $\alpha = 0.08$ ,

$y_0 = 1.061$ ,  $B/\alpha = 0.133$ . Автогенератор работал в режиме колебаний второго рода. Проходная динамическая характеристика его усилительного элемента аппроксимировалась полиномом четвертой степени  $i = 1.538 + 1.302u_c - 0.356u_c^2 - 0.502u_c^3 - 0.098u_c^4$  мА.

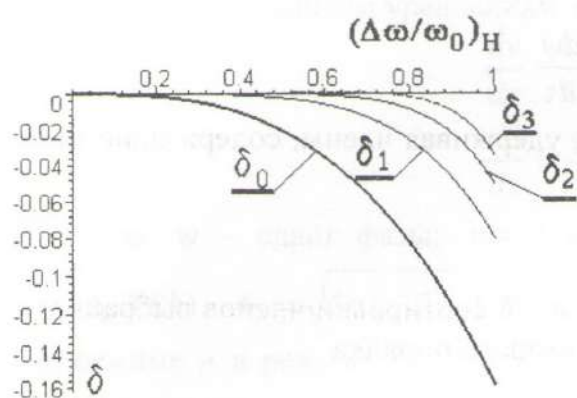


Рис. 2

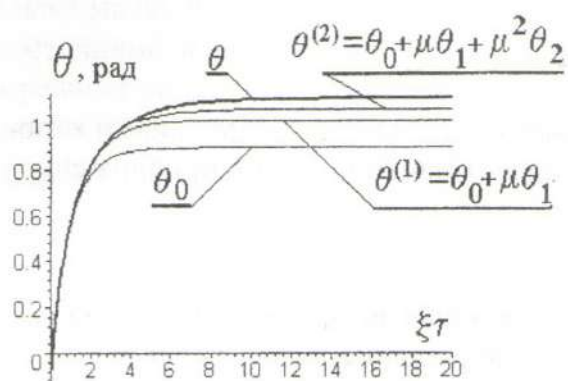


Рис. 3

Изменение невязки в полосе синхронизации при учете различного количества поправок представлено на рис. 2. Анализ приведенных зависимостей позволяет сделать вывод, что полученное приближенное решение с высокой точностью удовлетворяет исходному уравнению. Достаточно малая погрешность соответствует уже решению, учитывающему поправку первого порядка.

На рис. 3 показано изменение сдвига фазы колебаний в динамике. Темной линией, помеченной символом  $\theta$ , изображено численное решение укороченного фазового уравнения (2) при  $(\Delta\omega/\omega_0) = -10^{-4}$ ,  $\varphi_c = const$ ,  $y_{(0)} = 1.061$  и  $\theta_{(0)} = 0$ . Другие кривые соответствуют аналитическому решению. Нетрудно заметить, что результаты, полученные численным и аналитическим методами, совпадают с высокой точностью. Расстройка в данном случае составляла 90% ширины полосы синхронизации.

### Заключение

В статье показан порядок решения укороченного фазового уравнения синхронизированного на основном тоне одноконтурного автогенератора методом малого параметра. Получены простые дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами для определения составляющих выражения, представляющего решение.

Установлено, что поправки порядка более второго практически не улучшают точности и для достаточно точного представления решения можно учесть только поправку первого порядка. Экспериментальная проверка теоретических результатов показала, что приближенное аналитическое решение с высокой точностью описывает сдвиг фазы колебаний и легко применяется на практике. Это позволяет достаточно просто решать вопросы, связанные с исследованием и разработкой отдельных синхронизированных автогенераторов и их систем при малых сигналах синхронизации. Указанный порядок решения укороченных уравнений синхронизированного одноконтурного квазигармонического автогенератора может быть использован и в случае работы его в режимах деления и умножения частоты.

**Список литературы:** 1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1963. 503 с. 2. Митропольский Ю.А. Методы усреднения в нелинейной механике. К.: Наук думка. 1971. 440 с. 3. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 320 с. 4. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических колебаний. М.: Связь, 1972. 327 с. 5. Шахгильдян В.В., Бурдзейко Б.П. Методы исследования систем фазовой синхронизации // Proc. International Seminar. Nonlinear Circuits and Systems. Moscow, 1992. Vol. 1. P. 171-179. 6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. Радио. 1987. 326 с. 7. Arena P., Baglio S., Fortuna L., Graziani S. Neural Networks to Generate Poincare' Maps // Proc. International Seminar. Nonlinear Circuits and Systems. Moscow, 1992. Vol. 1. P. 171-179. 8. Rapin V. Synchronized oscillators with the phase negative feedback // IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-49. № 8. 2002. P. 1242-1245.