УДК 518.81

О.А. Писклакова

НУЦЗУ, м. Харків, Україна, pisklakova@ukr.net;

МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИЛЬНО ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Проведен анализ особенностей решения задач многокритериального принятия решений в условиях неопределенности. Предложены модели выбора компромиссного решения в условиях многокритериальности и различных типов интервальной неопределенности при решении задач распределительного типа в системах с сильной степенью централизации.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ, МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТЬ, ИНТЕРВАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ, ОПТИМИЗАЦИЯ, РЕСУРС, ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ

Введение

Одной из наиболее важных проблем, возникающих в различных областях человеческой деятельности (технической, экономической, организационной и др.), является проблема совершенствования управления. Многие функциональные задачи организационного управления являются задачами распределения ресурсов. Следовательно, в инструментарий управления должны входить методы эффективного решения таких задач, проблемно-ориентированных на особенности объекта управления. Это означает, что необходимо разработать единое математическое описание и методы решения широкого класса задач распределения ресурсов, в частности, с учетом нелинейности производственных функций элементов системы, различного вида неопределенностей, многокритериальности, разной степени централизации системы.

Экстремальные задачи распределения ресурсов возникают в связи с тем, что объемы ресурсов являются ограниченными, и это приводит к конфликтным ситуациям.

При этом особенностью задач распределения ресурсов также является то, что во многих случаях их приходится решать в условиях неполноты исходной информации (неопределенности) и многокритериальности целевых функций. Неучет этих особенностей приводит к некорректным решениям, не имеющим практической ценности. В статье рассматриваются подходы к решению задачи в указанной постановке.

1. Особенности задачи распределения ресурсов

Задача, в которой требуется наилучшим образом, в смысле выбранного критерия оптимальности, распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам деятельности (потребителям) называется задачей распределительного типа [1].

В дальнейшем будем полагать, что в качестве распределяемого рассматривается монોресурс. Это не снижает общности полученных результатов, так как если решается задача распределения комплекса взаимосвязанных ресурсов, то для него можно или сформировать скалярную многофакторную оценку (например, в денежном выражении) или выделить критический (наиболее дефицитный) ресурс и по нему принимать решение.

Получив ресурс d , i -й потребитель производит некоторый эффект E_i

$$E_i .= F_i(d_i), \qquad (1)$$

при этом оператор F_i , устанавливающий связь между входом (d_i) и выходом (E_i) , называют производственной функцией.

В целом система получает суммарный эффект $E_\sum$, который стремится максимизировать производственную функцию

$$E_\sum = \max_{r_i \in R} Q[F_i(r_i)] \qquad (2)$$

при ограничении

$$\sum d_i \le D, \qquad (3)$$

где D — общее качество распределяемого ресурса.

В общем случае, эффекты E генерируемые как подсистемами (потребителями ресурсов), так и системой в целом, являются набором разнородных эффектов j -го вида, т.е.

$$E_i =< E_{ij} >,\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}. \qquad (4)$$

Еще одна особенность заключается в том, что распределительные задачи в большинстве случаев приходится решать в условиях интервальной неопределенности.

Основными источниками неопределенности являются:

– неполнота знаний о виде и параметрах производственных функций F_i и Q ;

– неопределенности, возникающие при формулировании скалярных многофакторных оценок [2] эффекта;

– неточности задания системы ограничений;

Общими особенностями задач распределения ресурсов является наличие в них целевой функции (критерия оптимальности) (2) , а также ограничений на объем ресурсов (3) и на значения оптимизируемых переменных.

Для решения задач распределения ресурсов известные аналитические методы математического программирования, основанные на исследовании производных целевой функции, часто оказываются непригодными в силу наличия сильных ограничений на переменные и область изменения целевой функции. Метод полного перебора всех возможных вариантов решения задач распределения ресурсов также находит ограниченное применение в силу большой размерности практически важных задач.

Пусть задана иерархическая двухуровневая система центр – комплекс подсистем $A=\{A_v\}$, $v=\overline{1,N}$. В текущий момент времени центр располагает некоторым количеством ресурса $D(t)$. Каждой подсистеме для нормального функционирования требуется количество ресурса $d_v(t)_{\min}$, а для экстремального по заданному критерию - $d_v(t)_{\max}$. При этом

$$\sum_{v=1}^{N} d_v(t)_{\min} < D(t) < \sum_{v=1}^{N} d_v(t)_{\max}. \tag{5}$$

Это означает, что

$$\Delta D(t) = D(t) - \sum_{v=1}^{N} d_v(t)\min \tag{6}$$

являются ресурсами, которые можно инвестировать в развитие производства.

Получая ресурс, каждая подсистема производит набор разнокачественных эффектов $Э_v$, компонентами которого являются, например, экономический, социальный, экологический эффекты, каждый из которых в свою очередь определяется набором характеристик. Предположим существование такой оценки $\overline{Э_v}$, что

$$\overline{Э_v}(t) = H_v(\Delta d_v, t), \tag{7}$$

а система в целом получает набор разнокачественных эффектов

$$\overline{Э_v}(t) =< \overline{Э_v}(t) >, v = \overline{1,N}. \tag{8}$$

В общем случае эффект центра $Э_c$ не совпадает с эффектом системы и в зависимости от степени централизации осуществляется выбор оператора $H_c(t)$

$$Э_c(A) = H_c[Э(t)]. \tag{9}$$

Ресурс между подсистемами распределяется по фиксированному правилу

$$d_v(t) = F_v[Э_v(t), t] \tag{10}$$

при условиях

$$\sum_{v=1}^{N} d_v(t) \le \Delta D(t); \tag{11}$$

$$d_v(t)_{\min} \le d_v(t) \le d_v(t)_{\max}. \tag{12}$$

Цель центра – максимизация его эффекта

$$Э_c(t) \to \max_{d_v}. \tag{13}$$

Постановка рассмотренной формальной задачи не отличается принципиально от классической задачи распределения ресурсов. Ее конкретные особенности, определяющие степень универсальности и метод решения зависят от вида операторов $H_v(t)$, $H_c(t)$ и правила (10). В статье рассматриваются эти особенности без учета зависимости процесса от времени.

В экономике зависимость выпуска от затрат ресурсов вида (1), (2) называется производственной функцией. Обычно предполагают, что такие функции – линейные или неубывающие выпуклые вверх или вниз зависимости, одинаковые для всех элементов. Такое допущение существенно упрощает вычисления, но не отражает действительности. В общем случае можно считать, что на интервале $d=[0,\infty]$ производственная функция (1) имеет вид монотонно возрастающей S-образной кривой, показанной на рис.1. Последняя включает в себя вогнутый (1), линейный (2) и выпуклый (3) участки.

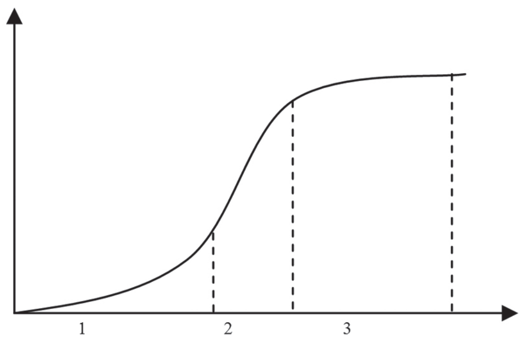

Рис. 1. Производственная функция

Чтобы облегчить вычисления, желательно выбрать универсальную форму производственной функции, позволяющую изменением одного параметра реализовать кривые всех трех указанных видов. С этой целью введем вспомогательную функцию вида

$$\varphi(d) = \left(\frac{d - d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}}\right)^{\alpha}, \tag{14}$$

где α — параметр нелинейности. В этом случае при $0<\alpha<1$ реализуются выпуклые зависимости, при $\alpha=1$ — линейная и при $\alpha>1$ — вогнутые. Функция (14) безразмерна и изменяется в пределах от нуля до единицы, а d может изменяться непрерывно и дискретно. Выходной эффект v-го элемента представляется так:

$$Э_v = Э_{v\min} + b_v \varphi_v(d_v). \tag{15}$$

Здесь $Э_{v\min} = H_v(d_{v\min})$ — эффект, получаемый подсистемой при предоставлении ей ресурса в количестве $d_{v\min}$; b_v — масштабный коэффициент, трансформирующий безразмерную функцию (14) в реальный эффект.

Эффект центра равен $Э_A=\{Э_{cv}\}$, $v=\overline{1,N}$, где $Э_{cv}$ — в общем случае разнокачественные эффекты, которые монотонно зависят от агрегатов. С учетом равенства (7)

$$Э_{cv} = H'_{cv}[Э_{v\min} + b_v \varphi_v(d_v)] = H_{cv}(d_v). \tag{16}$$

Так как функции H'_{cv} и $\varphi_v(d_v)$ монотонные, возрастающие, выпуклые вверх или вниз, зависимость $H_{cv}(d_v)$ согласно свойствам суперпозиции является монотонной, возрастающей и в соответствии с видом исходных функций может быть линейной, выпуклой или вогнутой. Поэтому, по аналогии с эффектом агрегата разнокачественный эффект можно представить в виде:

$$Э_{cv} = Э_{cv\min} + c_v \varphi_{cv}(d_v). \quad (17)$$

Здесь c_v — масштабный коэффициент; $\varphi_{cv}(d_v)$ — функция вида (14).

Поскольку $Э_{cv}$ — разнокачественные эффекты, задача максимизации эффекта центра представляет собой типичную задачу многокритериальной оптимизации, причем роль локальных критериев играют $Э_{cv}$, а $\varphi_{cv}(d_v)$ — функции полезности этих критериев. Тогда в рамках аддитивной теории полезности обобщенная полезность эффекта центра выражается следующим образом:

$$\overline{Э}_c = \sum_{v=1}^{N} g_v Э_{cv} = \sum_{v=1}^{N} g_v Э_{cv\min} + \sum_{v=1}^{N} g_v c_v \varphi_{cv}(d_v), \quad (18)$$

где первое слагаемое – гарантированный минимальный доход центра, а управлению поддается только часть эффекта, составляющая которого представлена в виде:

$$\Delta\overline{Э}_c = \Delta\overline{Э} - \overline{Э}_{c\min} = \sum_{v=1}^{N} g_v b_v \varphi_{cv}(d_v). \quad (19)$$

В этих формулах g_v — коэффициент изоморфизма, учитывающий относительный вес (значимость) разнокачественных эффектов.

Правило распределения ресурсов зависит от особенностей системы. В основе классификации таких особенностей лежит степень централизации и согласованности целей элементов системы.

В классе централизованных систем возможны следующие ситуации: подсистемы не целеустремленные; подсистемы с сильной централизацией; подсистемы со слабой централизацией.

Для рассматриваемого класса организационных систем характерна централизованная структура. Следовательно, как видно из проведенного анализа, все ситуации можно свести к двум случаям [3]:

- распределению ресурсов по критерию $\Delta\overline{Э_c} \to \max\limits_{d_v}$ для систем с сильной централизацией;
- определению поведения центра, максимизирующего критерий $\Delta\overline{Э_c} \to \max\limits_{d_v}$ при фиксированном правиле распределения ресурсов для систем со слабой централизацией.

Рассмотрим возможные модели распределения ресурсов в сильно централизованных системах.

2. Постановка задачи

При распределении ресурсов в сильно централизованных системах необходимо с учетом заданных ограничений получить максимальный эффект от распределения некоторого количества ресурса $d_v(t)$:

$$\sum_{v=1}^{N} g_v c_v \varphi_{cv}(d_v) \to \max_{d_v}, \quad (20)$$

причем, согласно выражению (14)

$$\varphi_{cv}(d_v) = \left(\frac{d_v - d_{v\min}}{d_{v\max} - d_{v\min}} \right)^{\alpha_{cv}} \quad (21)$$

при ограничениях (11), (12).

В общем случае для этой задачи характерны такие особенности: нелинейность функционала (20), обусловленная нелинейностью зависимости (21); неопределенность (неточность задания) функционала по значениям коэффициентов $g_v\, 8\, c_v$ и виду функции φ_{cv}, т.е. по значениям параметра α_{cv} из формулы (21).

Первый вид неопределенности обусловлен неточностью идентификации весовых коэффициентов g_v, c_v при формировании скалярной многофакторной оценки обобщенного эффекта, а второй – неполнотой знаний о виде производственных функций, что приводит к неточности задания параметра α_{cv} функции (21).

Если первая особенность не принципиальна и здесь задача заключается в выборе эффективного по затратам вычислительных ресурсов и точности численного метода отыскания глобального экстремума функционала (20), то преодоление трудностей, обусловленных неопределенностью такого функционала, связано с обоснованием принципов принятия решений и построения соответствующих математических моделей и алгоритмов.

3. Определение эффективного решения в условиях неопределенности

Особенность задачи заключается в том, что вид производственной функции центра задан неточно, с большей или меньшей интервальной неопределенностью $\Delta\alpha_{cv}, \Delta c_v, \Delta g_v$. Это приводит к тому, что в зависимости от конкретного сочетания значений параметров $\alpha_{cv} \in [\alpha_{cv}^{\max}, \alpha_{cv}^{\min}]$, $c_v \in [c_v^{\max}, c_v^{\min}]$, $g_v \in [g_v^{\max}, g_v^{\min}]$ на множестве допустимых решений, определяемых ограничениями (11), (12), получаем некоторое подмножество экстремальных по критерию (20) решений $\overline{D_i^0} = \{d_{vi}^0\}$; $v = \overline{1,N}$; $i = \overline{1,n}$, где n — число возможных комбинаций значений параметров α_{cv}, c_v, g_v. Необходимо выбрать из этого подмножества решений единственное $\overline{D}^0$.

Эффективное решение определяется с помощью двухэтапной процедуры: сначала выделяется подобласть допустимого множества решений, соответствующая вариациям параметров оптимизируемого функционала $\overline{D}^0$, $i = \overline{1,n}$, а затем из этого подмножества выбирается единственное решение. Для выбора единственного решения наиболее приемлем минимаксный критерий, который принимает вид [4]

$$K = \min_{\bar{D}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [a_i \varphi_i(\overline{D}_i^0)]^{\beta} \right\}^{1/\beta}, \quad i = \overline{1,n}, \ \beta > 1, \qquad (22)$$

где n — число локальных экстремальных решений; a_i — коэффициент, оценивающий вес i-го решения, его значение определяется в каждом конкретном случае по информации о предпочтительности значений параметров функционала; $\varphi_i(\overline{D}_i^0)$ — функция полезности i-го решения.

Распределения ресурсов в условиях полной неопределенности вида производственных функций агрегатов.

В данном случае функционал (20) не задан. Ни одной точки допустимого множества решений, определяемого ограничениями (11), (12), нельзя отдать предпочтение, они равноценны. Но объективно существуют конкретные производственные функции, а следовательно, есть эффективное решение, причем оно может лежать в любой точке допустимого пространства. Поэтому рационально в качестве решения выбрать точку, минимизирующую максимально возможные потери эффективности вследствие несовпадения выбранного решения с объективно эффективным. Таким решением является точка, минимально удаленная от границ допустимой области [5]. С учетом сказанного в функционале (22) $a_i = 1$, а значения функций $\varphi_i(\overline{D}_i^0)$ имеют смысл нормированного расстояния от границ допустимого множества решений по каждой переменной d_v:

$$\varphi_i(d_v) = \frac{d_v^0 - d'_{v\min}}{d'_{v\max} - d'_{v\min}}, \quad i = \overline{1,N}, \quad v = \overline{1,N}. \qquad (23)$$

В общем случае $d'_{v\min} \ge d_{v\min}$; $d'_{v\max} \le d_{v\max}$. Определение значений $d'_{v\min(\max)}$ даже в многомерном пространстве не представляет труда:

$$d'_{v\max} = \begin{cases} d_{v\max} \setminus d_{v\max} \le D - \sum_{i=1}^{N} d_{i\min}; \\ D - \sum_{i=1}^{N} d_{i\min} \setminus d_{v\max} > D - \sum_{i=1}^{N} d_{i\min}, \\ v = \overline{1,N}; j = \overline{1,N}; j \ne v; \end{cases} \qquad (24)$$

$$d'_{v\min} = \begin{cases} d_{v\min} \setminus \sum_{i=1}^{N} d_{j\max} \ge D - d_{v\min}; \\ D - \sum_{i=1}^{N} d_{i\max} \setminus \sum_{i=1}^{N} d_{j\max}, < D - d_{v\min}, \\ v = \overline{1,N}; j = \overline{1,N}; j \ne v; \end{cases} \qquad (25)$$

Ограничения принимают вид

$$d'_{v\min} \le d_v \le d'_{v\max}; \qquad \sum_{v=1}^{N} d_v = D. \qquad (26)$$

При такой высокой неопределенности не нужна большая «жестокость» нахождения минимаксного решения, поэтому в формуле (21) примем $\beta = 2$, что обеспечивает достаточно высокую точность выравнивания значений переменных.

Выводы

В статье предложены модели распределения ресурсов между подсистемами предприятия с учетом многокритериальности эффектов и неопределенности производственных функций с учетом степени централизации системы, т.е. степени согласованности целей подсистем и центра.

Список литературы: **1.** *Автоматизированные системы управления городским хозяйством* [Текст] / И.В. Кузьмин, Э.Г. Петров, И.А. Алферов, В.В. Евсеев, Л.В. Мигунова. – Киев, «Будівельник», 1978. – 144 с. **2.** *Писклакова О.А.* Анализ особенностей решения задачи многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности [Текст] / О.А. Писклакова, Н.А. Брынза, Д.И. Филипская // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ – Выпуск 3 (56). – Днепропетровск, 2008. – №01. – С. 147-157. **3.** *Крянев А.В.* Основы финансового анализа и портфельного инвестирования в рыночной экономике [Текст] / А.В. Крянев. – М.: МИФИ, 2001. – 54 с. **4.** *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст]/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая шк., 2000. – 480 с. **5.** *Бурков В.Н.* Теория активных систем: состояние и перспективы [Текст]/ В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.

Поступила в редколегию 18.12.2012

УДК 518.81

Моделі розподілу ресурсів у сильно централізованих системах / О.О. Писклакова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2013. – № 1 (80). – С. 73-76.

У статті обґрунтовані моделі рішення задач з розподілу ресурсів в умовах багатокритеріальності й невизначеності вхідних даних. Затверджується що у запропонованих моделях враховується багатокритеріальність ефектів та невизначеність виробничих функцій.

Іл. 1. Бібліогр.: 5 найм.

UDK 518.81

The models of resource allocation in highly centralized systems / O.A. Pisklakova / Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2013. – № 1 (80). – P. 73-76.

In the article based models problem solving with resource allocation in bahatokryterialnosti and uncertainty of input data. Approved that the proposed model takes into account the uncertainty bahatokryterialnist effects and production functions.

Fig. 1. Ref.: 5 items.