

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Виявлення ліній розриву двовимірного

об'єкта на основі інтерлінації

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи САУМ-23-1

Кошеленко В.В.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність

124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Першина Ю.І.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Кошеленкові Владиславу Вікторовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Виявлення ліній розриву двовимірного об'єкта на основі
інтерлінації

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи алгоритм знаходження ліній розриву для двовимірного
об'єкту

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

| № | Назва етапів роботи | Терміни виконання етапів роботи | Примітка |
|---|---|-------------------------------------|----------|
| 1 | Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи | 25 листопада – 1 грудня 2024 р. | виконано |
| 2 | Вибір та обґрунтування методу | 2 – 8 грудня 2024 р. | виконано |
| 3 | Розробка алгоритму і програми | 9 – 22 грудня 2023 р. | виконано |
| 4 | Проведення аналітичних досліджень та розрахунків | 23 – 29 грудня 2024 р. | виконано |
| 5 | Робота над текстом пояснювальної записки | 30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р. | виконано |
| 6 | Представлення роботи на рецензію в ЕК | 10 січня 2025 р. | виконано |

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Першина Ю.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 65 с., 8 табл., 14 рис., 1 дод., 19 джерел.

КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, ПРОЕКЦІЙНІ ДАНІ, ІНТЕРЛІНАЦІЯ, ФАНТОМ ШЕППА-ЛОГАНА.

Об'єкт дослідження – процес виявлення ліній розриву двовимірного об'єкта.

Мета роботи – розробка алгоритму виявлення ліній розриву двовимірного об'єкту на основі інтерлінації.

Методи дослідження – метод інтерлінації для знаходження ліній розриву двовимірного об'єкту.

У цій роботі було проведено системний аналіз предметної області. Вибрано метод вирішення задачі. Розроблено алгоритм виявлення ліній розриву двовимірного об'єкту на основі інтерлінації. Реалізовано цей алгоритм. Перевірено роботу програми на тестовому прикладі.

ABSTRACT

Introductory note: 65 pages, 8 tables, 14 figures, 1 appendix, 19 sources.

COMPUTED TOMOGRAPHY, DISCONTINUOUS FUNCTION,
PROJECTION DATA, INTERLINATION, SHEPP–LOGAN PHANTOM.

Object of research – the process of detecting discontinuity lines in a two-dimensional object.

Purpose of work – development of an algorithm for detecting discontinuity lines in a two-dimensional object based on interlineation.

Methods of research – the interlineation method for identifying discontinuity lines in a two-dimensional object.

This work includes a systematic analysis of the subject area. A method for solving the problem was selected. An algorithm for detecting discontinuity lines in a two-dimensional object based on interpolation was developed. The algorithm was implemented, and the functionality of the program was tested on a sample case.

ЗМІСТ

| | С. |
|--|----|
| Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів | 8 |
| Вступ | 9 |
| 1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження | 11 |
| 1.1 Системний аналіз задачі виявлення ліній розриву двовимірного об'єкту | 11 |
| 1.1.1 Вербальна модель системи | 11 |
| 1.1.2 Функціональна модель системи | 12 |
| 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі наближення розривних функцій двох змінних | 14 |
| 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі | 20 |
| 1.4 Постановка задач дослідження | 21 |
| 2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання | 23 |
| 2.1 Відновлення розривної функції двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами, використовуючи прямокутні елементи | 23 |
| 2.2 Побудова розривного сплайну інтерлінаційного типу за допомогою розбиття області визначення на трапецієвидні елементи | 35 |
| 2.3 Метод розв'язання 2D задачі комп'ютерної рентгенівської томографії використовуючи неоднорідність внутрішньої структури об'єкта | 40 |
| 2.3.1. Побудова розривного сплайну інтерлінаційного типу з використанням даних Радона..... | 40 |
| 2.3.2. Алгоритм реконструкції щільності двовимірного тіла за відомими даними Радона та знаходження ліній розриву | 44 |
| Висновки за розділом 2 | 45 |
| 3 Програмна реалізація | 47 |
| 3.1 Система комп'ютерної алгебри MathCad | 47 |

| | |
|--|----|
| | 7 |
| 3.2 Математичні фантоми для томографії | 48 |
| 3.3 Алгоритм розв’язання задачі ідентифікації ліній розриву | |
| 2D об’єкта за відомими проекціями вздовж заданої системи ліній | 52 |
| 3.4 Опис програми | 52 |
| Висновки за розділом 3 | 53 |
| 4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз | 54 |
| 4.1 Застосування алгоритму до спрощеного фантома Шеппа-Логана | 54 |
| Висновки за розділом 4 | 59 |
| Висновки | 60 |
| Перелік джерел посилання | 61 |
| Додаток А Лістинг програми | 63 |

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

\forall – квантор загальності «для всіх»;

R – множина дійсних чисел $x \in R \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$;

R^n – евклідов n -вимірний простір $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \Leftrightarrow x_i \in R, i = \overline{1, n}$;

$\{x : P_x\}, \{x | P_x\}$ – сукупність елементів x з властивістю P_x ;

$\delta_{ij}, \delta_{i,j}$ – символ Кронекера, $\delta_{i,i} = 1, \delta_{i,j} = 0$, якщо $i \neq j$;

$C(G)$ – простір функцій, неперервних у $G \in R^n$;

$C^r(G)$ – простір функцій, неперервних у $G \in R^n$ разом із частинними похідними порядку r ;

$C^{(r,m)}(G)$ – простір функцій, неперервних у $G \subset R^3$ разом із частинними похідними порядку r по першій змінній, m - по другій;

РКТ – радонівська комп'ютерна томографія;

$\lim_{x \rightarrow x^\pm} f(x)$ – правостороння або лівостороння границі функції $f(x)$ при

$x \rightarrow x_i + 0$ або $x \rightarrow x_i - 0$;

$U_\varepsilon(x)$ – ε -окіл точки x ;

$Lf(x)$ – оператор L діє на функцію $f(x)$;

$f^{+,+}(x_i, y_j)$ – одностороння границя функції $f(x, y)$ при $x \rightarrow x_i + 0, y \rightarrow y_j + 0$.

ВСТУП

Актуальність теми. Комп'ютерна томографія є ефективним методом дослідження внутрішньої структури об'єкта без його пошкодження. Якщо функція є гладкою та періодичною, для наближення її значень можна використовувати класичний ряд Фур'є. Однак, якщо функція має розриви, може виникати явище Гіббса, яке спотворює зображення. Для відновлення таких функцій потрібні спеціальні методи наближення розривних функцій.

Отже, розробка алгоритму виявлення ліній розриву двовимірного об'єкта на основі інтерлінації є актуальною темою у зв'язку зі зростаючим інтересом до аналізу та обробки проєкційних даних розривних функцій.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка алгоритму виявлення ліній розриву двовимірного об'єкта на основі інтерлінації. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі наближення розривних функцій;
- дослідити літературу по темі;
- розробити алгоритм застосування методу інтерлінації для виявлення ліній розриву двовимірного об'єкта;
- реалізувати цей алгоритм у середовищі MathCad;
- перевірити роботу програми.

Об'єктом дослідження є процес виявлення ліній розриву двовимірного об'єкта.

Предметом дослідження є розривні сплайни інтерполяційного типу.

Методи дослідження. У роботі використовуються метод інтерлінації для знаходження ліній розриву двовимірного об'єкта.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, були представлені на тринадцятій Міжнародній науково-технічній конференції «Інформа-

ційні системи та технології ІСТ-2024» [1], а також на восьмій Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Студенти та молодь – для майбутнього країни» [2].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі виявлення ліній розриву двовимірного об'єкту

1.1.1 Вербальна модель системи

Задачі наближення функцій за їхніми слідами часто зустрічаються в різних сферах науки. Розглянемо, наприклад, комп'ютерну томографію. Завдяки здатності отримувати детальні зображення внутрішніх структур, комп'ютерна томографія відіграє важливу роль у багатьох наукових та промислових галузях. Цей метод застосовується для контролю якості матеріалів, виявлення дефектів у продукції, вимірювання розмірів та аналізу внутрішньої будови об'єктів у виробничих процесах, дослідження артефактів і скелетів, виявлення прихованих деталей та вивчення мікроструктури культурних об'єктів. Однак на практиці досліджуваний об'єкт часто не є неперервним, оскільки може мати різкі переходи щільності. Для відновлення такої функції потрібні спеціальні методи наближення розривних функцій.

Розглянемо варіант застосування комп'ютерної томографії на виробництві. Вона дозволяє перевіряти внутрішні дефекти, як-от порожнечі, тріщини, деформації, а також структуру матеріалу, не руйнуючи виріб. Це важливо для деталей зі складною геометрією, таких як лопатки турбін або елементи електроніки. Завдяки комп'ютерній томографії виробники можуть підвищувати якість продукції, зменшувати кількість браку, покращуючи загальну надійність.

Побудуємо модель «чорна скриня». Вона приймає на вхід дані про виріб та стандарти якості й перетворює їх у вихідні результати – зображення виробу та звіт про відповідність стандартам якості. Внутрішні процеси, такі як алгоритми аналізу зображень або методи виявлення дефектів, залишаються прихованими. На рис. 1.1 зображена модель «чорна скриня» для даної системи.

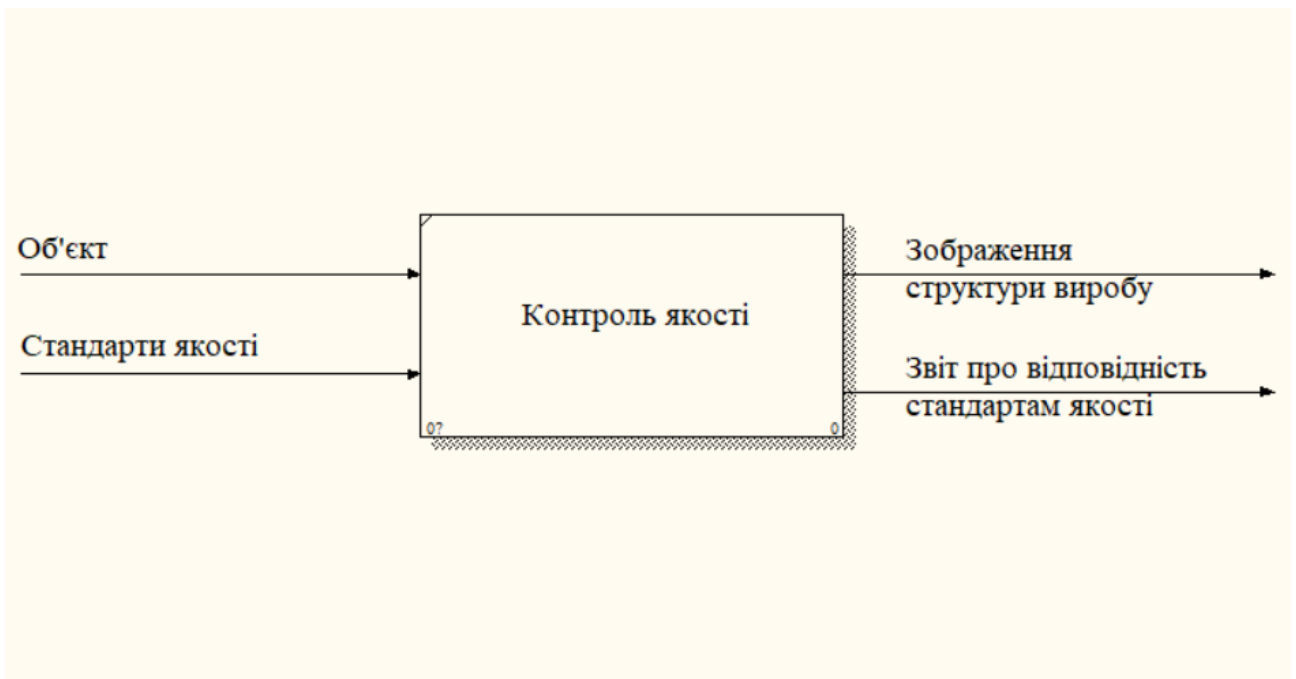


Рисунок 1.1 – Модель «чорна скриня»

1.1.2 Функціональна модель системи

Функціональна модель є цінним інструментом для візуалізації функцій системи чи середовища. Вона дозволяє зрозуміти, які функції виконує система і як вони пов'язані між собою. Таку модель можна зобразити у вигляді діаграм із блоками та стрілками.

Скористаємося для цього методологією IDEF0. Модель будується на основі ієрархії функціональних блоків, де кожен блок відповідає за певну функцію системи, і передбачає використання стандартних позначень і формальних правил. Модель IDEF0 дозволяє описати всі основні функції системи, їхні взаємозв'язки, а також ресурси, необхідні для їх виконання, надаючи чітке уявлення про структуру і поведінку системи.

На рис. 1.2 зображена контекстна модель. Далі проводимо декомпозицію контекстної діаграми. На рис. 1.3 зображена декомпозиція контекстної діаграми. Тут нас цікавить блок «Комп'ютерна томографія виробу», тому проводимо подальшу його декомпозицію.

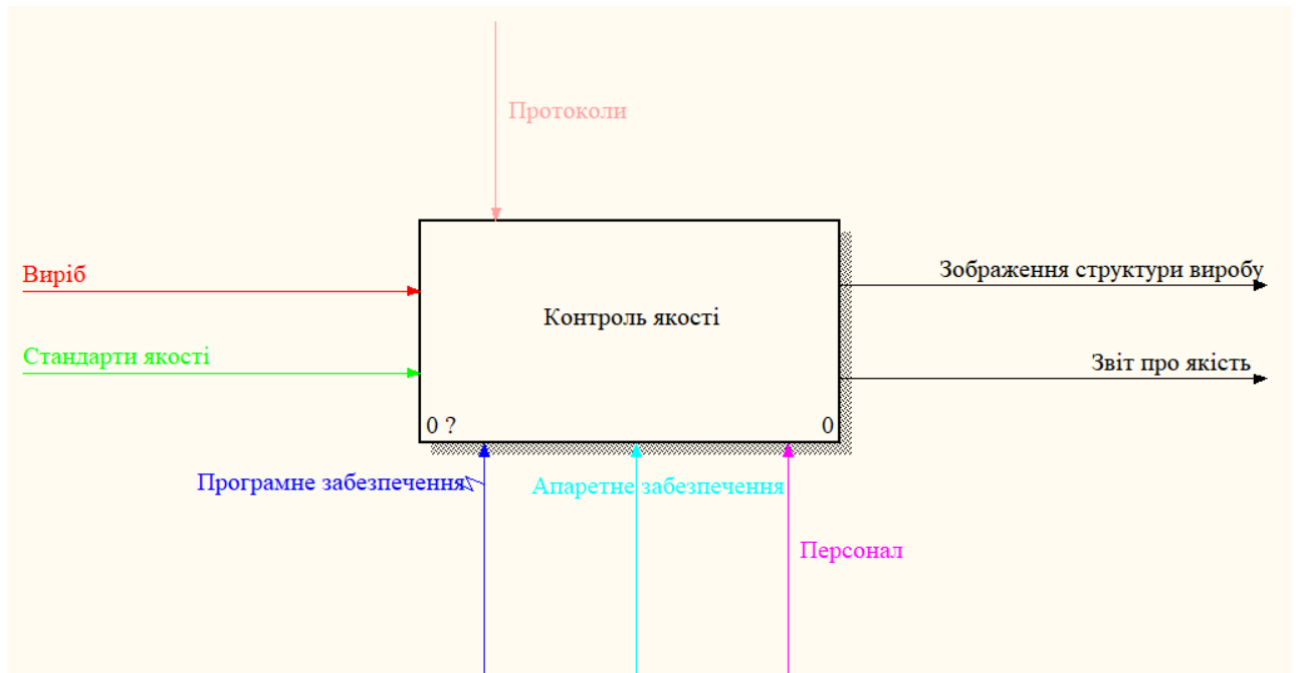


Рисунок 1.2 – Контекстна діаграма для моделі «Контроль якості»

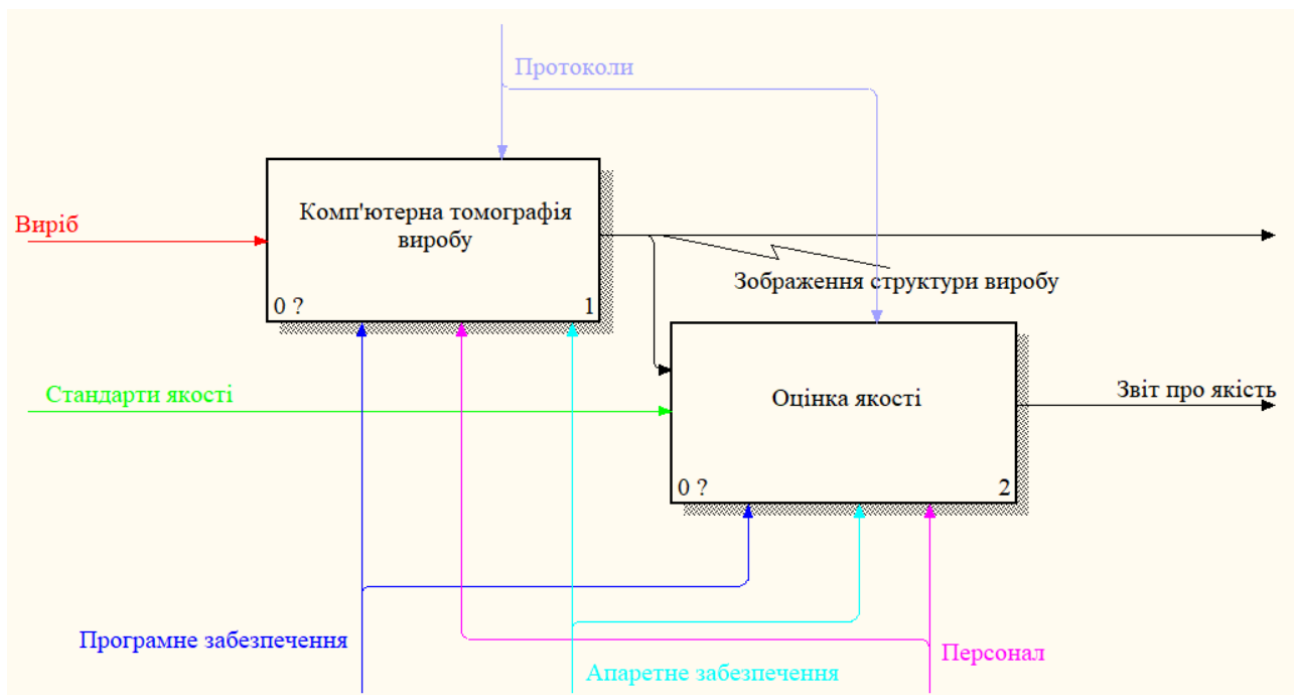


Рисунок 1.3 – Декомпозиція контекстної діаграми

На рис. 1.4 показано декомпозицію блоку «Комп'ютерна томографія виробу». Для відновлення внутрішньої структури об'єкта, проєкційні дані якого надходять із томографа, необхідно обрати надійний алгоритм наближення розривних функцій.

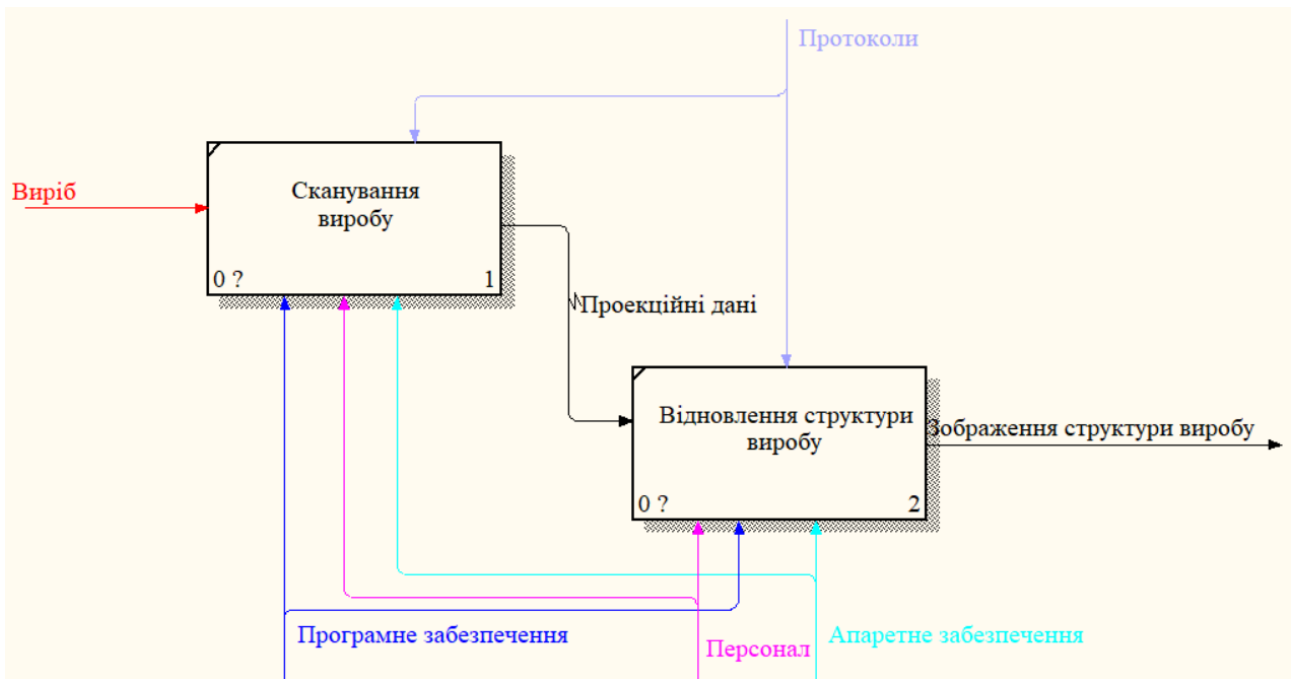


Рисунок 1.4 – Декомпозиція блоку
«Комп’ютерна томографія виробу»

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі виявлення ліній розриву для функцій двох змінних

Задачі наближення функції за її слідами часто виникають у різних галузях науки, таких як комп’ютерна томографія або для відновлення структури шарів породи в геології. Якщо функція є гладкою і періодичною, для наближення її значень можна використовувати класичний ряд Фур’є.

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k(x) e^{ik\pi x}.$$

Це ефективний спосіб відновлення функції. За таких умов ряд Фур’є збігається з експоненційною швидкістю.

Однак на практиці досліджувана функція часто не є неперервною, оскільки об’єкти, які досліджуються, мають різкі переходи щільності. Якщо функція

має розрив хоча б в одній точці, швидкість збіжності погіршується, і поруч із розривами починаються коливання. Таку поведінку називають явищем Гіббса, яке детально описано в роботі [3].

Проблеми, пов'язані з явищем Гіббса, також характерні для спектральних методів Фур'є, що застосовуються до рівнянь у частинних похідних із розривними розв'язками. Мета роботи [4] – представити методи, які значно знижують ефект явища Гіббса. Були розроблені методи, які дозволяють зменшити явище Гіббса в розкладі Фур'є для розривних функцій [5, 6]. В [7] розроблений метод наближення розривної функції рядами Конторовича. Наближення функцій двох змінних із відомими лініями розриву описано у [8], розривні функції відновлюються з використанням D^M сплайнів.

У статті [9] обговорюється використання фільтрів в розкладанні Фур'є від розривних функцій. Для повного його видалення, використовується спектральний метод перепроєціювання, який був введений в [10] і проаналізований в статтях [11, 12]. В роботі [9] також наведено спосіб виявлення розривів на основі Фур'є спектральних даних. Інший метод знаходження ліній розриву представлено у [13]. Цей метод відновлює положення і амплітуди розривної кусково-гладкої функції $f(x)$. Виявлення розриву необхідно для визначення інтервалів гладкості.

У роботі [14] авторами введено поняття розривного апроксимаційного сплайна для наближення розривних функцій. У роботі [15] запропонований спосіб виявлення ліній розриву функції двох змінних, що дозволяє відновити розривні функції з використанням трапецивидних елементів. У статті [16] запропонований метод знаходження ліній розриву за допомогою вейвлетів. Для виявлення використовуються полігармонічні вейвлети.

Для вибору способу відновлення розривних функцій використаємо метод аналізу ієрархій, який ґрунтується на ідеї, що прийняття рішень вимагає порівняння різних альтернатив за кількома критеріями. Він створює ієрархічну структуру, де на найвищому рівні знаходиться основна мета або проблема, а на нижчих рівнях розташовані підкритерії та можливі альтернативи. Далі здійсню-

ється парне порівняння альтернатив для кожного критерію, де експерти оцінюють їх відносну важливість за допомогою шкали відносності. На основі цих порівнянь формується матриця парних порівнянь.

Після отримання матриці застосовується математичний метод Сааті для розрахунку ваг кожного критерію та альтернативи. Результатом є ранжування альтернатив за їхньою важливістю для досягнення основної мети [17].

Критерії вибору алгоритму відновлення розривних функцій:

- якість реконструкції (К1);
- стійкість до явища Гіббса (К2);
- обчислювальна складність (К3).

Множина альтернатив:

- фільтраційні методи (А1);
- інтерлінаційні методи з побудовою розривних сплайнів (А2);
- методи, які використовують вейвлети (А3).

Ієрархічна структура проблеми вибору зображена на рис. 1.5.

За результатами експертного опитування побудована матриця попарних порівнянь критеріїв таблиці 1.1.



Рисунок 1.5 – Ієрархічна структура задачі вибору методу

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, то $RI^K = 0,58$.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

| | K1 | K2 | K3 | Середнє геометричне за строками | Вектор пріоритетів |
|----------|------|------|-------|------------------------------------|-----------------------|
| K1 | 1,00 | 2,00 | 5,00 | 2,15 | 0,57 |
| K2 | 0,50 | 1,00 | 4,00 | 1,26 | 0,33 |
| K3 | 0,20 | 0,25 | 1,00 | 0,37 | 0,10 |
| Σ | 1,70 | 3,25 | 10,00 | 3,78 | 1,00 |

$$\text{Індекс узгодженості } CI^K = \frac{3,02 - 3}{3 - 1} = 0,01.$$

$$\text{Відношення узгодженості } CR^K = \frac{CI^K}{RI^K} = 0,021.$$

$$\text{Вектор локальних пріоритетів } \vec{p}^K = (0,57 \quad 0,33 \quad 0,10).$$

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив за кожним критерієм і проводимо розрахунок. Розрахунки векторів локальних пріоритетів містяться у таблицях 1.2 – 1.4.

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь за першим критерієм

| K1 | A1 | A2 | A3 | Середнє геометричне за строками | Вектор пріоритетів |
|----------|------|------|------|------------------------------------|-----------------------|
| A1 | 1,00 | 0,20 | 0,50 | 0,46 | 0,13 |
| A2 | 5,00 | 1,00 | 2,00 | 2,15 | 0,60 |
| A3 | 2,00 | 0,50 | 1,00 | 1,00 | 0,28 |
| Σ | 8,00 | 1,70 | 3,50 | 3,62 | 1,00 |

$$\text{Індекс узгодженості } CI_{K1}^A = \frac{3,01 - 3}{3 - 1} = 0,001.$$

$$\text{Відношення узгодженості } CR_{K1}^A = \frac{CI^K}{RI^K} = 0,005.$$

$$\text{Вектор локальних пріоритетів } \vec{p}_{K1}^A = (0,13 \quad 0,6 \quad 0,28).$$

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь за другим критерієм

| K2 | A1 | A2 | A3 | Середнє геометричне за строками | Вектор пріоритетів |
|----------|------|------|------|------------------------------------|-----------------------|
| A1 | 1,00 | 0,50 | 2,00 | 1,00 | 0,31 |
| A2 | 2,00 | 1,00 | 2,00 | 1,59 | 0,49 |
| A3 | 0,50 | 0,50 | 1,00 | 0,63 | 0,20 |
| Σ | 3,50 | 2,00 | 5,00 | 3,22 | 1,00 |

$$\text{Індекс узгодженості } CI_{K2}^A = \frac{3,05 - 3}{3 - 1} = 0,03.$$

$$\text{Відношення узгодженості } CR_{K2}^A = \frac{CI^K}{RI^K} = 0,046.$$

$$\text{Вектор локальних пріоритетів } \vec{p}_{K2}^A = (0,31 \quad 0,49 \quad 0,2).$$

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь за третім критерієм

| K3 | A1 | A2 | A3 | Середнє геометричне за строками | Вектор пріоритетів |
|----------|------|------|------|------------------------------------|-----------------------|
| A1 | 1,00 | 5,00 | 6,00 | 3,11 | 0,73 |
| A2 | 0,20 | 1,00 | 0,50 | 0,46 | 0,11 |
| A3 | 0,17 | 2,00 | 1,00 | 0,69 | 0,16 |
| Σ | 1,37 | 8,00 | 7,50 | 4,26 | 1,00 |

$$\text{Індекс узгодженості } CI_{K3}^A = \frac{3,09 - 3}{3 - 1} = 0,04.$$

$$\text{Відношення узгодженості } CR_{K3}^A = \frac{CI^K}{RI^K} = 0,07.$$

$$\text{Вектор локальних пріоритетів } \vec{p}_{K2}^A = (0,73 \quad 0,11 \quad 0,16).$$

Усі відношення узгодженості менші за 0.1, що свідчить про добру узгодженість думок експертів.

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив. Для цього з векторів локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм складемо матрицю

$$p^A = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,31 & 0,73 \\ 0,6 & 0,49 & 0,11 \\ 0,28 & 0,2 & 0,16 \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор глобальних пріоритетів дорівнює

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,31 & 0,73 \\ 0,6 & 0,49 & 0,11 \\ 0,28 & 0,2 & 0,16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,57 \\ 0,33 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,51 \\ 0,24 \end{pmatrix}.$$

Розрахуємо індекс узгодженості та відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = CI^K + \vec{p} \cdot \overline{CI^A} = 0,04,$$

$$RI = RI^K + RI^A = 1,16,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0,034.$$

Відношення узгодженості $CR = 0,034 < 0,1$ вважається припустимим. Ма-

ксимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає другій альтернативі, тобто обираємо метод інтерлінації.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Рентгенівська томографія ґрунтується на відтворенні реальних характеристик внутрішньої структури об'єкта, використовуючи проєкційні дані, отримані під час томографічного експерименту. Ці дані представляють собою лінійні інтеграли функції, що описує здатність об'єкта поглинати рентгенівське випромінювання.

Задача реконструкції зображення в комп'ютерній томографії полягає у створенні якісного зображення внутрішньої будови об'єкта на основі серії рентгенівських проєкційних вимірювань. Під час томографії рентгенівське джерело і детектори обертаються навколо об'єкта, формуючи набір проєкцій під різними кутами.

Це передбачає визначення коефіцієнтів ослаблення рентгенівського випромінювання в кожній точці об'єкта, що відображає його здатність поглинати випромінювання і точно передає внутрішню структуру об'єкта.

Для математичного опису зв'язку між проєкціями та шуканим розподілом коефіцієнта послаблення випромінювання $\mu(x, y)$ в нерухомій системі координат (x, y) із рухомою системою координат (ξ, ζ) [18]:

$$\begin{cases} x = \xi \cos \nu - \zeta \sin \nu, \\ y = \xi \sin \nu + \zeta \cos \nu; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = x \cos \nu + y \sin \nu, \\ \zeta = -x \sin \nu + y \cos \nu. \end{cases}$$

Позначимо через $\mu_\nu(\xi, \zeta)$ розподіл лінійного коефіцієнта ослаблення в

системі координат (ξ, ζ) , повернутої відносно нерухомої системи координат (x, y) на кут ν :

$$\begin{aligned}\mu_\nu(\xi, \zeta) &= \mu(x(\xi, \zeta, \nu), y(\xi, \zeta, \nu)) = \\ &= \mu(\xi \cos \nu - \zeta \sin \nu, \xi \sin \nu + \zeta \cos \nu).\end{aligned}$$

Інтенсивності випромінювання $I(\xi, \zeta)$, яке проходить через об'єкт вздовж осі ζ :

$$I(\xi, \zeta) = I_0 e^{-\int_{-\infty}^{\zeta} \mu_\nu(\xi, \zeta) d\zeta}.$$

За межами об'єкта коефіцієнта послаблення випромінювання $\mu(x, y) \equiv 0$.

Перетворення Радона має вигляд:

$$p(\xi, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\nu(\xi, \zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\xi \cos \nu - \zeta \sin \nu, \xi \sin \nu + \zeta \cos \nu) d\zeta.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного системного аналізу предметної області, можна дійти висновку, що задача наближення розривних функцій є актуальною темою у зв'язку зі зростаючим інтересом до аналізу та обробки розривних даних.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є виявлення ліній розриву двовимірного об'єкту на основі інтерлінації. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі наближення розривних функцій;

- дослідити літературу по темі;
- розробити алгоритм застосування методу інтерлінації для виявлення ліній розриву двовимірного об'єкту;
- реалізувати цей алгоритм у середовищі MathCad;
- перевірити роботу програми.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1. Відновлення розривної функції двох змінних розривними інтерлінаційними сплайнами, використовуючи прямокутні елементи

Припустимо, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ на прямокутні елементи. Розглянемо елемент $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Далі будемо будувати розривний інтерлінаційний сплайн [14] на прямокутній сітці вузлів з використанням односторонніх слідів.

Введемо позначення: $g^+_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i+0} g(x, y)$, $g^-_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i-0} g(x, y)$.

Визначення 2.1. Розривним поліноміальним інтерлінаційного типу в області D , яка розбита на підобласті Π_{ij} , називається наступна функція:

$$\begin{aligned}
 S(x, y) &= S_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij}, \\
 S_{ij}(x, y) &= S1_{ij}(x, y) + S2_{ij}(x, y) - S12_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij} \subset D, \quad (2.1) \\
 S1_{ij}(x, y) &= S1_{ij}(x, y; \{\varphi1_{i-1,s}(y)\}; \{\varphi1_{i,s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}) = \\
 &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi1^+_{i-1,s}(y) \cdot h1_{i-1,s}(x) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi1^-_{i,s}(y) \cdot h1_{i,s}(x); \\
 S2_{ij}(x, y) &= S2_{ij}(x, y; \{\varphi2_{j-1,p}(x)\}; \{\varphi2_{j,p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \\
 &= \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi2^+_{j-1,p}(x) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi2^-_{j,p}(x) \cdot h2_{j,p}(y); \\
 S12_{ij}(x, y) &= S12_{ij}(x, y; \{\varphi1_{i-1,s}(y)\}; \{\varphi1_{i,s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}, \\
 &\quad \{\varphi2_{j-1,p}(x)\}; \{\varphi2_{j,p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \\
 &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{++}_{i-1,j-1,s,p} h1_{i-1,s}(x) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C^{+-}_{i-1,j,s,p} h1_{i-1,s}(x) h2_{j,p}(y) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} h1_{i,s}(x) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} h1_{i,s}(x) h2_{j,p}(y),$$

$h1_{k,s}(x), h2_{l,p}(y)$ – базисні поліноми Ерміта степеня $2\rho - 1$ з властивостями:

$$h1_{k,s}^{(s')} (x_{k'}) = \delta_{k,k'} \delta_{s,s'}, k, k' \in \{i-1, i\}, s, s' \in \{0, \rho-1\},$$

$$h2_{l,p}^{(p')} (y_{l'}) = \delta_{l,l'} \delta_{p,p'}, l, l' \in \{j-1, j\}, p, p' \in \{0, \rho-1\}.$$

Теорема 2.1. Якщо

$$\begin{aligned} (\varphi 1_{i,s}^+ (y_j))^{(p)} &= (\varphi 2_{j,p}^+ (x_i))^{(s)} = C_{ijsp}^{++}, \\ (\varphi 1_{i,s}^- (y_j))^{(p)} &= (\varphi 2_{j,p}^+ (x_i))^{(s)} = C_{ijsp}^{-+}, \\ (\varphi 1_{i,s}^- (y_j))^{(p)} &= (\varphi 2_{j,p}^- (x_i))^{(s)} = C_{ijsp}^{--}, \\ (\varphi 1_{i,s}^+ (y_j))^{(p)} &= (\varphi 2_{j,p}^- (x_i))^{(s)} = C_{ijsp}^{+-}, \end{aligned}$$

то на границі прямокутника Π_{ij} функція $S_{ij}(x, y)$ задовольняє наступним співвідношенням

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} &= \varphi 1_{i-1, s'}^+(y), \\ \left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} &= \varphi 1_{i, s'}^-(y), y_{j-1} \leq y \leq y_j, s' = \overline{0, \rho-1}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{p'}} \right|_{y=y_{j-1}} &= \varphi 2_{j-1, p'}^+(x), \\ \left. \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{p'}} \right|_{y=y_{j-1}} &= \varphi 2_{j, p'}^-(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i, p' = \overline{0, \rho-1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теорема 2.2. Якщо

$$\begin{aligned}\varphi 1_{i,s}^{-}(y) &= \varphi 1_{i,s}^{+}(y) = \varphi 1_{i,s}(y), \quad s = \overline{0, \mu}, 0 \leq \mu \leq \rho - 1, \\ \varphi 2_{j,p}^{-}(x) &= \varphi 2_{j,p}^{+}(x) = \varphi 2_{j,p}(x), \quad p = \overline{0, \nu}, 0 \leq \nu \leq \rho - 1,\end{aligned}$$

то функція $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$, $(x, y) \in \Pi_{ij}$ буде задовольняти наступним умовам:

$$S(x, y) \in C^{\mu, \nu}(D),$$

$$\left. \frac{\partial^{s'} S(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \varphi 1_{i,s'}(y), \quad i = \overline{1, m}, s' = \overline{0, \mu}, y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial^{p'} S(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_j} = \varphi 2_{j,p'}(x), \quad j = \overline{1, n}, p' = \overline{0, \nu}, x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (2.5)$$

Зауваження 2.1. Якщо умови теореми 2.2 задовольняються, то сплайн $S(x, y)$ буде мати порядок розривних частинних похідних порядку більше, ніж μ за x та більше, ніж ν за y відповідно.

Зауваження 2.2. В теоремі допускається, щоб розриви сплайну $S(x, y)$ існували не на всіх границях прямокутних елементів, а лише на декількох, чи навіть одній границі.

Теорема 2.3. Якщо функції $\varphi 1_{i,s}^{+}(y)$, $\varphi 1_{i,s}^{-}(y)$ є многочленами (може і різними), що мають степінь $Q \geq 2\rho - 1$, а функції $\varphi 2_{j,p}^{+}(x)$, $\varphi 2_{j,p}^{-}(x)$ є многочленами, що мають степінь $Q \geq 2\rho - 1$, то сплайн $S(x, y)$ буде многочленом двох змінних на утворених прямокутних елементах $\Pi_{ij} \subset D$. А якщо $Q = 2\rho - 1$, то $S(x, y)$ буде розривним сплайном, що має степінь $2\rho - 1$ за кожною змінною.

Зауваження 2.3. . В теоремі не вимагається, щоб на всіх границях прямокутних елементів інтерлінаційний розривний сплайн мав похідні порядків $\mu + 1, \mu + 2, \dots, \rho - 1$ та $\nu + 1, \nu + 2, \dots, \rho - 1$ по x та y відповідно., які будуть розривними

Теорема 2.4. Нехай $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$ і $\varphi 1_{i-1, s}^+(y) \neq \varphi 1_{i, s}^-(y)$,
 $\varphi 2_{j-1, p}^+(x) \neq \varphi 2_{j, p}^-(x)$, $s, p = \overline{0, \rho-1}$. Тоді, якщо у $S(x, y)$ покласти

$$\begin{aligned} \varphi 1_{i', s}^-(y) &= \varphi 1_{i', s}^+(y) = f^{(s', 0)}(x_{i'}, y), \quad i' \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad i' \neq i-1, \quad i' \neq i, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ \varphi 2_{j', p}^-(x) &= \varphi 2_{j', p}^+(x) = f^{(0, p)}(x, y_{j'}), \quad j' \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad j' \neq j-1, \quad j' \neq j, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi 1_{i-1, s}^-(y) &= \varphi 1_{i-1, s}^+(y) = f^{(s, 0)}(x_{i-1}, y), \quad 0 \leq y \leq y_{j-1} \quad \text{або} \quad y_j \leq y \leq 1, \\ \varphi 2_{j-1, p}^-(x) &= \varphi 2_{j-1, p}^+(x) = f^{(0, p)}(x, y_{j-1}), \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \quad \text{або} \quad x_i \leq x \leq 1, \\ \varphi 1_{i-1, s}^+(y) &= f^{(s, 0)}(x_{i-1} + 0, y), \quad \varphi 1_{i, s}^-(y) = f^{(s, 0)}(x_i - 0, y), \\ \varphi 1_{i-1, s}^-(y) &= f^{(s, 0)}(x_{i-1} - 0, y), \quad \varphi 1_{i, s}^+(y) = f^{(s, 0)}(x_i + 0, y), \\ \varphi 2_{j-1, p}^+(x) &= f^{(0, p)}(x, y_{j-1} + 0), \quad \varphi 2_{j, p}^-(x) = f^{(0, p)}(x, y_j - 0), \\ \varphi 2_{j-1, p}^-(x) &= f^{(0, p)}(x, y_{j-1} - 0), \quad \varphi 2_{j, p}^+(x) = f^{(0, p)}(x, y_j + 0), \end{aligned}$$

то отриманий сплайн $S(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D)$, і він буде розривною функцією разом з частинними похідними до порядку $\rho-1$ тільки на границі прямокутного елемента Π_{ij} .

Теорема 2.5. При виконанні умов теореми 2.4 похибка наближення розривної функції $f(x, y)$ відповідним розривним сплайном $S(x, y)$ інтерлінаційного типу буде дорівнювати:

$$|f(x, y) - S(x, y)| = O(\Delta 1^{2\rho} \Delta 2^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{kl} \neq \Pi_{i, j},$$

$$\Delta 1 = \max_k (x_k - x_{k-1}), \quad \Delta 2 = \max_l (y_l - y_{l-1}),$$

$$|f(x, y) - S(x, y)| = O(\Delta i^{2\rho} \Delta j^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{i, j},$$

$$\Delta i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta j = y_j - y_{j-1}, \quad (i, j) \neq (k, l),$$

$$\text{при умові, що } f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{i, j}).$$

Приклад 2.1. Нехай $m = 2$, $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0.5$, $y_2 = 1$. Ця сітка розбиває область на елементи-прямокутники (рис. 2.1)

$$\Pi_{11} = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\},$$

$$\Pi_{12} = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_1 < y < y_2\},$$

$$\Pi_{21} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_0 < y < y_1\},$$

$$\Pi_{22} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}.$$

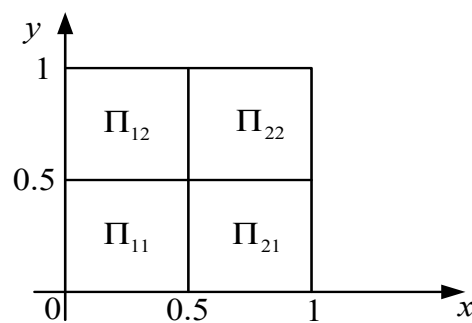


Рисунок 2.1 – Область визначення функції $f(x, y)$
з розбиттям на прямокутні елементи

Нехай відомі односторонні інтерполяційні дані функції $f(x, y)$ у вузлах обраної сітки:

$$\Pi_{11} : f^{+,+}(0;0) = f(0+0;0+0) = 1,$$

$$f^{+,-}(0;0.5) = f(0+0;0.5-0) = 2,$$

$$f^{-,-}(0.5;0.5) = f(0.5-0;0.5-0) = 1,$$

$$f^{-,+}(0.5;0) = f(0.5-0;0+0) = 2,$$

$$\Pi_{12} : f^{+,+}(0;0.5) = f(0+0;0.5+0) = 1,$$

$$f^{+,-}(0;1) = f(0+0;1-0) = 2,$$

$$f^{-,-}(0.5;1) = f(0.5-0;1-0) = 1,$$

$$f^{-,+}(0.5;0.5) = f(0.5-0;0.5+0) = 2,$$

$$\Pi_{22} : f^{+,+}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5+0) = 3,$$

$$f^{+,-}(0.5;1) = f(0.5+0;1-0) = 4,$$

$$f^{-,-}(1;1) = f(1-0;1-0) = 3,$$

$$f^{-,+}(1;0.5) = f(1-0;0.5+0) = 4,$$

$$\Pi_{21} : f^{+,+}(0.5;0) = f(0.5+0;0+0) = 3,$$

$$f^{+,-}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5-0) = 4,$$

$$f^{-,-}(1;0.5) = f(1-0;0.5-0) = 3,$$

$$f^{-,+}(1;0) = f(1-0;0+0) = 4.$$

Будуємо розривний сплайн інтерлінаційного типу:

$$S(x, y) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f^{+,+}(0;0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(0.5;0) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0;0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (x, y) \in \Pi_{11} \\ f^{+,+}(0;0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0;1) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(0.5;1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad (x, y) \in \Pi_{12} \\ f^{+,+}(0.5;0) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(1;0) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(1;0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (x, y) \in \Pi_{21} \\ f^{+,+}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(1;0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0.5;1) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(1;1) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad (x, y) \in \Pi_{22} \end{array} \right. =$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} & 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y}{0.5} + \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y}{0.5}, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{11} \\ & 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5} + \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{12} \\ & 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y}{0.5} + \\ & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y}{0.5}, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{21} \\ & 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{1-0.5} + \\ & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{22} \end{aligned} \right. = \\
& \left\{ \begin{aligned} & 4 \cdot (x-0.5)(y-0.5) - 8 \cdot x(y-0.5) - \\ & \qquad \qquad \qquad - 8(x-0.5)y + 4xy, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{11} \\ & 4(x-0.5)(y-1) + 8(x-1)(y-1) - \\ & \qquad \qquad \qquad - 8(x-0.5)(y-0.5) + 4x(y-0.5), \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{12} \\ & 12(x-1)(y-0.5) - 16(x-0.5)(y-0.5) - \\ & \qquad \qquad \qquad - 12(x-1)y + 12(x-0.5)y, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{21} \\ & 12(x-1)(y-1) - 16(x-0.5)(y-1) - \\ & \qquad \qquad \qquad - 16(x-1)(y-0.5) + 12(x-0.5)(y-0.5), \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{22} \end{aligned} \right. = \\
& \left\{ \begin{aligned} & 2x + 2y - 8xy + 1, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{11} \\ & -10x - 6y + 8 + 8xy, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{12} \\ & -4xy + 2x + 2y + 2, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{21} \\ & -8xy + 6x + 6y - 1, \qquad \qquad \qquad (x,y) \in \Pi_{22} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Сплайн $S(x,y)$ на межі між прямокутними елементами Π_{11} і Π_{21} при $x < x_1$ буде мати такі сліди

$$S(x,y) = S(x_1 - 0, y) = S_{11}(x_1, y) =$$

$$= f^{-,+}(0.5;0) \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,-}(0.5;0.5) \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} S(x,y) &= S(x_1+0,y) = S_{21}(x_1,y) = \\ &= f^{+,+}(0.5;0) \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1. \end{aligned}$$

Тобто при виконанні умови $f^{-,+}(0.5,0) \neq f^{+,+}(0.5,0)$ сплайн $S(x,y)$ виявиться розривним в точці $(0.5;0)$. Більш того, сплайн буде розривним на всій лінії $x = 0.5$, $y_0 \leq y \leq y_1$, якщо виконується умова $f^{+,+}(0.5;0.5) \neq f^{+,-}(0.5;0.5)$.

Задамо вихідну функцію

$$f(x,y) = S_{ij}(x,y) + \frac{(x-x_{i-1})(x_i-x)(y-y_{j-1})(y_j-y)}{4}, \quad (x,y) \in \Pi_{i,j}, \quad i,j = 1,2.$$

В кожному прямокутному елементі обчислимо її частинні похідні: $f^{2,2}(x,y) \equiv 1$, $\forall (x,y) \in \Pi_{ij}$. Тому для похибки наближення цієї розривної функції визначеним розривним інтерполяційним сплайном має виконуватися умова:

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in \Pi_{ij}} |f(x,y) - S_{i,j}(x,y)| &\leq f^{(2,2)}(\xi,\eta) \cdot \frac{\Delta i^2 \Delta j^2}{2! \cdot 2!} = \\ &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2! \cdot 2!} = \frac{1}{64} \approx 0.016. \end{aligned}$$

Приклад 2.2. Нехай задана розривна функція $f(x,y)$ з розривами першого роду між прямокутними елементами (рис. 2.2)

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ x^2 - y^2, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ -x^2 + y^2, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ -x^2 - y^2, & (x, y) \in \Pi_{22} \end{cases}$$

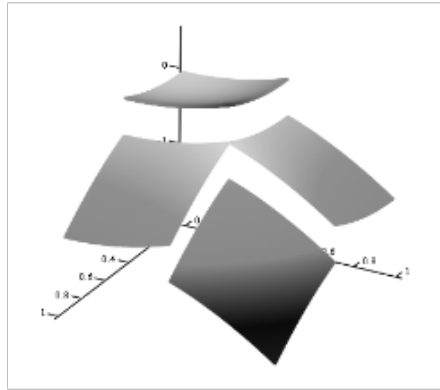


Рисунок 2.2 – Графічне зображення $f(x, y)$ (приклад 2.2)

Представлена функція є розривною з розривами, що розташовані між прямокутними елементами.

Почнемо з побудови розривного сплайну апроксимаційного типу лінійного за кожною змінною на введений прямокутній сітці

$$L_{ij}(x, y, C) = C_{i-1, j-1}^{++} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + C_{i-1, j}^{+-} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} +$$

$$+ C_{i, j-1}^{-+} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + C_{i, j}^{--} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}, \quad (x, y) \in \Pi_{ij};$$

де C – матриця коефіцієнтів, що треба знайти.

В цьому випадку вхідними даними є односторонні значення розривної функції у вузлах прямокутної сітки, тобто

$$f^{-+}(0.5, 0) = 0.25, \quad f^{++}(0.5, 0) = -0.25,$$

$$f^{+-}(0, 0.5) = 0.25, \quad f^{--}(0, 0.5) = -0.25,$$

$$\begin{aligned}
 f^{--}(0.5,0.5) &= 0.5, \quad f^{-+}(0.5,0.5) = 0, \\
 f^{++}(0.5,0.5) &= -0.5, \quad f^{+-}(0.5,0.5) = 0, \\
 f^{--}(1,0.5) &= -0.75, \quad f^{-+}(1,0.5) = -1.25, \\
 f^{--}(0.5,1) &= -0.75, \quad f^{+-}(0.5,1) = -1.25.
 \end{aligned}$$

Розв'язуємо задачу мінімізації функціоналу, використовуючи метод найменших квадратів в інтегральній формі

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - L(x, y, C))^2 dx dy \rightarrow \min.$$

Для розв'язання цієї задачі була використана вбудована в систему комп'ютерної математики MathCad функція, за допомогою якої була отримана наступна матриця коефіцієнтів

$$C = \begin{pmatrix} -0.083 & 0.167 & 0.167 & 0.417 \\ -0.25 & 0 & -1 & -0.75 \\ -0.25 & -1 & 0 & -0.75 \\ -0.417 & -1.167 & -1.167 & -1.917 \end{pmatrix}.$$

Тобто розривний сплайн апроксимаційного типу набуває наступного вигляду (рис.2.3):

$$L(x, y) = \begin{cases} 0.5x + 0.5y - 0.083, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ 0.5x - 1.5y + 0.5, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ -1.5x + 0.5y + 0.5, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ -1.5x - 1.5y + 1.083, & (x, y) \in \Pi_{22} \end{cases}$$

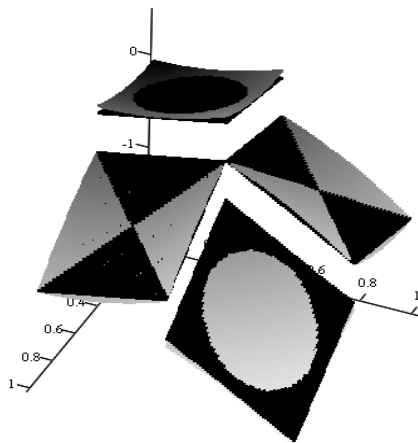


Рисунок 2.3 – Графік функції $f(x, y)$ (сірий колір)
та розривного апроксимаційного сплайну $L(x, y)$ (чорний колір)

Визначимо похибку цього наближення у вигляді відхилення функції $f(x, y)$ від побудованого розривного сплайну $L(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - L(x, y)| \approx 0.064.$$

Для порівняння на введений сітці вузлів для розривної функції $f(x, y)$, що вже задана, побудуємо розривний сплайн інтерлінаційного типу за допомогою (2.1)

$$S(x, y) = S_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij},$$

$$S_{ij}(x, y) = S1_{ij}(x, y) + S2_{ij}(x, y) - S12_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij} \subset D,$$

$$S1_{ij}(x, y) = \varphi 1_{i-1}^+(y) \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + \varphi 1_i^-(y) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}};$$

$$S2_{ij}(x, y) = \varphi 2_{j-1}^+(x) \cdot \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + \varphi 2_j^-(x) \cdot \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}};$$

$$S12_{ij}(x, y) = C_{i-1, j-1}^{++} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j-1} - y_j} + C_{i-1, j}^{+-} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} +$$

$$+C_{i,j-1}^{+-} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \frac{y-y_j}{y_{j-1}-y_j} + C_{i,j}^{--} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}};$$

де

$$C_{i-1,j-1}^{++} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i-1}+0 \\ y \rightarrow y_{j-1}+0}} f(x,y), \quad C_{i-1,j}^{+-} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i-1}+0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x,y),$$

$$C_{ij-1}^{-+} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i-0 \\ y \rightarrow y_{j-1}+0}} f(x,y), \quad C_{ij}^{--} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i-0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x,y).$$

Для цього в якості вхідних даних виступають сліди зліва та справа функції $f(x,y)$ вздовж системи ліній $x = x_0 = 0, x = x_1 = 0.5, x = x_2 = 1, y = y_0 = 0, y = y_1 = 0.5, y = y_2 = 1$, а саме,

$$\Pi_{11} : \varphi_{1_0}^+(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +0 \\ 0 \leq y \leq 0.5}} f(x,y) = y^2, \quad \varphi_{1_1}^-(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5-0 \\ 0 \leq y \leq 0.5}} f(x,y) = y^2 + 0.25;$$

$$\varphi_{2_0}^+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow +0 \\ 0 \leq x \leq 0.5}} f(x,y) = x^2, \quad \varphi_{2_1}^-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5-0 \\ 0 \leq x \leq 0.5}} f(x,y) = x^2 + 0.25;$$

$$\Pi_{12} : \varphi_{1_0}^+(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +0 \\ 0.5 \leq y \leq 1}} f(x,y) = y^2, \quad \varphi_{1_1}^-(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5-0 \\ 0.5 \leq y \leq 1}} f(x,y) = y^2 - 0.25;$$

$$\varphi_{2_1}^+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5+0 \\ 0 \leq x \leq 0.5}} f(x,y) = 0.25 - x^2, \quad \varphi_{2_1}^-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 1-0 \\ 0 \leq x \leq 0.5}} f(x,y) = 1 - x^2;$$

$$\Pi_{21} : \varphi_{1_0}^+(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5+0 \\ 0 \leq y \leq 0.5}} f(x,y) = y^2 - 0.25, \quad \varphi_{1_1}^-(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1-0 \\ 0 \leq y \leq 0.5}} f(x,y) = y^2 - 1;$$

$$\varphi_{2_0}^+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow +0 \\ 0.5 \leq x \leq 1}} f(x,y) = -x^2, \quad \varphi_{2_1}^-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5-0 \\ 0.5 \leq x \leq 1}} f(x,y) = 0.25 - x^2;$$

$$\Pi_{22} : \varphi_{1_0}^+(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5+0 \\ 0.5 \leq y \leq 1}} f(x,y) = -y^2 - 0.25, \quad \varphi_{1_1}^-(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1-0 \\ 0.5 \leq y \leq 1}} f(x,y) = -y^2 - 1;$$

$$\varphi_{2_0}^+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5+0 \\ 0.5 \leq x \leq 1}} f(x,y) = -x^2 - 0.25, \quad \varphi_{2_1}^-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 1-0 \\ 0.5 \leq x \leq 1}} f(x,y) = -x^2 - 1.$$

Звідси можна вивести матрицю інтерполяційних даних у кутах прямо ку-

тах елементів

$$C = \begin{pmatrix} C_{00}^{++} & C_{01}^{+-} & C_{10}^{-+} & C_{11}^{--} \\ C_{01}^{++} & C_{02}^{+-} & C_{11}^{-+} & C_{12}^{--} \\ C_{10}^{++} & C_{11}^{+-} & C_{20}^{-+} & C_{21}^{--} \\ C_{11}^{++} & C_{12}^{+-} & C_{21}^{-+} & C_{22}^{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0.75 \\ -0.25 & 0 & -1 & -0.75 \\ -0.5 & -1.25 & -1.25 & -2 \end{pmatrix}.$$

Будуємо розривний сплайн інтерлінаційного типу.

$$S(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in \Pi_{11}, \\ x^2 - y^2, & (x, y) \in \Pi_{12}, \\ -x^2 + y^2, & (x, y) \in \Pi_{21}, \\ -x^2 - y^2, & (x, y) \in \Pi_{22}. \end{cases}$$

Він повністю повторює задану функцію, тобто

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| = 0.$$

Підсумуємо: розривний сплайн інтерлінаційного типу, побудований на односторонніх слідах вздовж заданих ліній, точно реконструює задану розривну функцію на відміну від розривного сплайну апроксимаційного типу.

2.2. Побудова розривного сплайну інтерлінаційного типу

за допомогою розбиття області визначення на трапецієвидні елементи

Нехай область визначення $D = [0, 1]^2$ розривної функції $f(x, y)$ розбивається на прямокутні елементи прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$,

$y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$, а кожний прямокутний елемент похилою лінією ділиться на прямокутний трикутник та прямокутну трапецію. Фігури не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. На області $D = [0,1]^2$ задана функція, яка має розриви на деяких межах між вказаними фігурами.

Висвітлимо метод відновлення розривної функції за допомогою розривного поліноміального інтерлінаційного сплайну [15].

Визначимо типи трапецієвидних елементів, які можуть зустрітися при розбитті прямокутника з (x_i, y_j) - вузлом, в якому знаходиться прямиий кут. Існує чотири типи таких елементів – трапецій (рис. 2.4). На кожній границі функція може мати розрив першого роду. Всі ці типи можна задати аналітично.

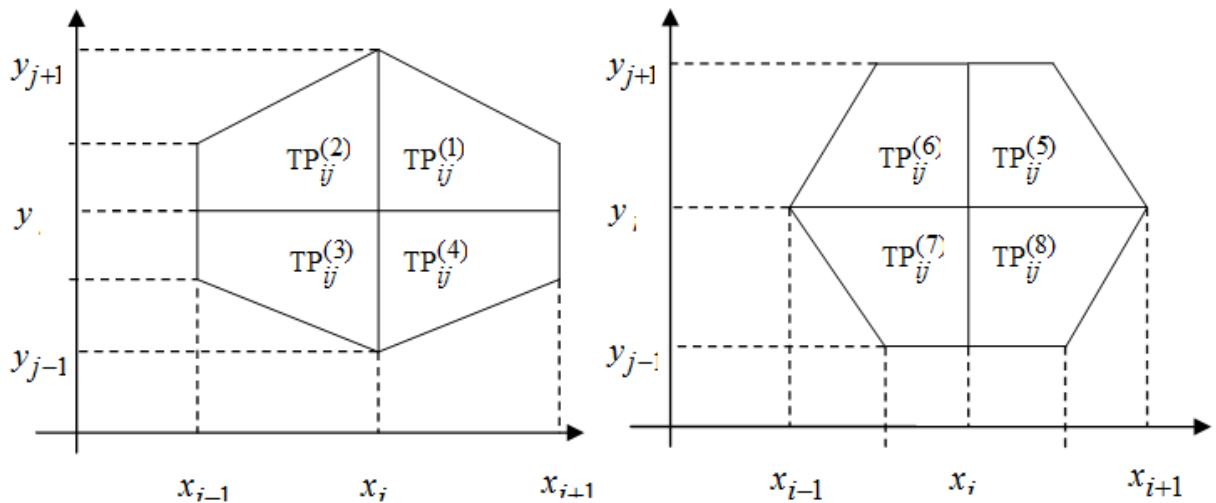


Рисунок 2.4 – Всі можливих типи елементів-трапецій

з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

Для однозначності будемо будувати розривний сплайн інтерлінаційного типу на прикладі елементарної трапеції типу 1

$$TP_{ij}^{(1)} = \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\}.$$

Будемо вважати заданими:

1. Односторонні сліди функції $f(x, y)$ вздовж прямої $x = x_i$ та інтерполяційні дані які завжди можна отримати із заданих слідів:

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y) = f(x_i + 0, y),$$

$$\varphi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y) = f(x_i - 0, y),$$

$$\varphi p p_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi p m_{ij+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0).$$

2. Односторонні сліди функції $f(x, y)$ вздовж прямої $x = x_{i+1}$ (аналогічно попереднім):

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} + 0} f(x, y) = f(x_{i+1} + 0, y),$$

$$\varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} - 0} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y),$$

$$\varphi m p_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$\varphi m m_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

3. Односторонні функції $f(x, y)$ вздовж прямої $y = y_j$:

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0),$$

$$\psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\psi p p_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi m p_{i+1,j} = \psi m_j(x_{i+1}) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

4. Односторонні сліди функції $f(x, y)$ вздовж похилої прямої $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$:

$$\psi m_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0),$$

$$\psi p_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) + 0),$$

$$\psi p m_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0),$$

$$\psi m m_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0),$$

Визначення 2.2. Розривним поліноміальним сплайном інтерлінаційного типу в елементі - трапеції $TR_{ij}^{(1)}$ називається:

$$Lf(x, y) = (L_1 + L_2 - L_2 L_1) f(x, y), \quad (2.3)$$

де

$$L_1 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \varphi m_{i+1}(y),$$

$$L_2 f(x, y) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \psi p_j(x).$$

Теорема 2.6. Нехай для односторонніх слідів функції $f(x, y)$ виконуються співвідношення:

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \psi p_j(x_{i+1}) = \varphi m_{i+1}(y_j),$$

$$\varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = \psi m_{j+1}(x_i), \quad \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = \psi m_{j+1}(x_{i+1}),$$

Тоді функція (2.3) інтерлінує $f(x, y)$ на $\partial TR_{ij}^{(1)}$: $Lf(x, y)|_{\partial TR_{ij}^{(1)}} = f(x, y)|_{\partial TR_{ij}^{(1)}}$, тобто

$$\begin{aligned}
Lf(x_i, y) &= \varphi p_i(x), \\
Lf(x_{i+1}, y) &= \varphi p_{i+1}(x), \\
Lf(x, y_j) &= \psi p_j(x), \\
Lf(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) &= \psi m_{j+1}(x).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Зауваження 2.4. Комутативність операторів не виконується, тобто $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$.

За допомогою формули зображення залишкового члену при відновленні неперервної функції інтерфлетаційним оператором з криволінійною граню, яка наведена в роботі [20], визначається зображення залишку та його оцінки для розривного сплайну інтерлінаційного типу

Теорема 2.7. При виконанні умов теореми 2.6 залишок $Rf(x, y) = (I - L)f(x, y)$ в буде мати наступний вигляд

$$Rf(x, y) = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 P_{1,k}(x) P_{2,m}(x, y) \times \int_{x_k}^x \int_{y_m(x)}^y f^{(p,q)}(\xi, \eta) \frac{(x_k - \xi)^{p-1} (y_\ell - \eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!} d\xi d\eta, \tag{2.5}$$

$$1 \leq p, q \leq 2, y_1(x) = y_j, y_2(x) = g_{j+1}^{(1)}(x),$$

а многочлени $P_{1,k}(x), P_{2,m}(x, y)$ визначаються так

$$\begin{aligned}
P_{1,1}(x) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & P_{1,2}(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \\
P_{2,1}(x) &= \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}, & P_{2,2}(x) &= \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}.
\end{aligned}$$

Проведемо оцінку похибки наближення функції $f(x, y)$ розривним сплайн-інтерлінантом $Lf(x, y)$, який наведений за допомогою формули (2.4) в елементі $TR_{ij}^{(1)}$.

Теорема 2.8. Для залишку $Rf(x, y)$, $f(x, y) \in C^{p,q}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$, $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$ є справедливою оцінка

$$\|Rf(x, y)\|_{C(\text{TP}_{ij}^{(1)})} \leq M \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} |G_1(x, \xi) \cdot G_2(x, y, \eta)| d\xi d\eta, \quad (2.6)$$

$$M = \max_{(x,y) \in \text{TP}_{ij}^{(1)}} |f^{(p,q)}(x, y)|,$$

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{(x_i - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i \leq \xi < x \\ -\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{(x_{i+1} - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x \leq \xi \leq x_{i+1} \end{cases},$$

$$G_2(x, y, \eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \cdot \frac{(y_j - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j \leq \eta < y \\ -\frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \cdot \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y \leq \eta < g_{j+1}^{(1)}(x) \end{cases}.$$

Зауваження 2.5. Неперервний інтерлінаційний сплайн [20] є частинним випадком побудованого розривного інтерлінаційного сплайну.

2.3 Метод розв'язання 2D задачі комп'ютерної рентгенівської томографії використовуючи неоднорідність внутрішньої структури об'єкта

2.3.1 Побудова розривного сплайну інтерлінаційного типу з використанням даних Радона

Нехай досліджуване тіло розміщено в області $E = [0;1]^2$. Задача полягати у відновленні густини всередині цього тіла, яку позначимо через $f(x, y)$ (поза

областю визначення функція дорівнює нулю). Задамо сітку: $x_1 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_1 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$. В якості інформації про функцію будуть виступати дані Радона вздовж заданої сітки, причому вздовж однієї лінії відомі два односторонніх інтеграли (зліва та справа від лінії).

$$\gamma_j^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_j + 0) dx, \quad j = \overline{1, m}, \quad \gamma_j^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_j - 0) dx, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\gamma_i^{2(+)} = \int_0^1 f(x_i + 0, y) dy, \quad i = \overline{1, n}, \quad \gamma_i^{2(-)} = \int_0^1 f(x_i - 0, y) dy, \quad i = \overline{1, n}.$$

Побудуємо розривний сплайн інтерлінаційного типу хі14, який може відновити не тільки невідому густину, а й лінії розриву заданої функції.

Побудову почнемо з елементарного прямокутного елемента $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Визначення 2.3. Розривним сплайном інтерлінаційного типу в області E , розбитій на прямокутні елемент (підобласті) Π_{ij} називається наступна функція:

$$S(x, y) = S_{ij}(p, x, y), \quad (x_i, y_j) \in \Pi_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.8)$$

де p – номер прямокутного елемента, він залежить від індексів i, j ,

$$S1_{ij}(p, x, y) = h_i(x) \cdot \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right) +$$

$$+ h_{i+1}(x) \cdot \left(\gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,4} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right);$$

$$S2_{ij}(p, x, y) = H_j(y) \cdot \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right) +$$

$$+ H_{j+1}(y) \cdot \left(\gamma_{j+1}^{1(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,4} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right);$$

$$S12_{ij}(p, x, y) = h_i(x) \cdot H_j(y) U_{p,1} + h_i(x) \cdot H_{j+1}(y) U_{p,3} + h_{i+1}(x) \cdot H_j(y) U_{p,2} +$$

$$+h_{i+1}(x) \cdot H_{j+1}(y)U_{p,4};$$

$$S_{ij}(p, x, y) = S1_{ij}(p, x, y) + S2_{ij}(p, x, y) - S12_{ij}(p, x, y).$$

$U_{p,q}$, $p = \overline{1, (n-1)(m-1)}$, $q = \overline{1, 4}$ – матриця інтерполяційних даних, які невідомі, в p -ому елементі-прямокутнику будується так

$$U_{p,1} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y), \quad U_{p,2} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1}-0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y),$$

$$U_{p,3} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x, y), \quad U_{p,4} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1}-0 \\ y \rightarrow y_{j+1}-0}} f(x, y).$$

Базисні сплайни $h_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ визначаються за допомогою виразів

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x_2 \leq x, \end{cases}$$

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x, \end{cases}, \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} < x < x_n, \\ 1, & x_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Аналогічні вирази записуються і для базисних сплайнів за змінною y .

Для базисних сплайнів $h_i(x)$, $H_j(y)$ мають виконуватися властивості

$$h_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad H_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}, \quad j, \ell = \overline{1, m}.$$

У сплайн-інтерліанті введена допоміжна функція $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, яка має наступний вигляд

$$\psi_i(x) = l_i(x) + \frac{\omega(x)}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) dx} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_i(x) dx,$$

$$l_i(x) = \prod_{\mu=1, \mu \neq i}^m \frac{x - x_\mu}{x_i - x_\mu}, \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) dx \neq 0.$$

Аналогічно можна записати й вирази для допоміжної функції за змінною y $\varphi_j(y)$, $j = \overline{1, m}$. На допоміжні функції накладаються наступні умови

$$\varphi_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}, \quad j, \ell = \overline{1, m}, \quad \psi_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad (2.9)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i(x) dx = 0, \quad \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi_j(y) dy = 0. \quad (2.10)$$

Теорема 2.9. Розривний оператор-інтерліант $S(x, y)$, який визначений формулою (2.8), задовольняє інтерліанційним властивостям:

$$\int_0^1 S(x_k \pm 0, y) dy = \gamma_k^{2(\pm)} = \int_0^1 f(x_k \pm 0, y) dy,$$

$$\int_0^1 S(x, y_\ell \pm 0) dy = \gamma_\ell^{1(\pm)} = \int_0^1 f(x, y_\ell \pm 0) dy,$$

$$S(x_k + 0, y_\ell + 0) = U_{p,1}, \quad S(x_{k+1} - 0, y_\ell + 0) = U_{p,2},$$

$$S(x_k + 0, y_{\ell+1} - 0) = U_{p,3}, \quad S(x_{k+1} - 0, y_{\ell+1} - 0) = U_{p,4}.$$

Зауваження 2.8. В побудованому розривному інтерлінаційному сплайні (2.8) числа $\gamma_i^{2(\pm)}, \gamma_j^{1(\pm)}$ – дані Радона, що надходять з комп'ютерного томографу. Невідомі значення функцій у вузлах сітки $U_{p,q}$ знаходяться за умови

$$I(U) = \sum_{p=1}^{(n-1)(m-1)} (I1(p,U) + I2(p,U)) \rightarrow \min_{U_{p,q}}; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} I1(p,U) &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,4} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right)^2 dy; \\ I2(p,U) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{j+1}^{1(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,4} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

2.3.2 Алгоритм реконструкції щільності двовимірного

тіла за відомими даними Радона та знаходження ліній розриву

Задамо прямокутну сітку $x_1 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_1 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ з кроками hx та hy . $\gamma_i^{2(+)}, i = \overline{1, n-1}$, $\gamma_j^{1(+)}, j = \overline{1, m-1}$, $\gamma_k^{2(-)}, k = \overline{2, n}$, $\gamma_\ell^{1(-)}, \ell = \overline{2, n}$, - проекції вздовж заданих ліній, що утворюють прямокутну сітку (проекції надходять з томографу). Алгоритм викладемо покроково:

Крок 1. Користуючись формулою (2.8) побудуємо розривний сплайн інтерлінаційного типу різного аналітичного вигляду в кожному елементі розбиття.

$S(p,U, x, y)$, де p – номер елемента-прямокутника,

$U_{p,q}, p = \overline{1, (n-1)(m-1)}, q = \overline{1, 4}$ – матриця інтерполяційних даних (яка нам невідома).

Крок 2. З мінімізації функціоналу (2.10) знаходимо невідомі елементи матриці U . Після цього отримаємо визначений розривний сплайн інтерпонаційного типу $S(x, y)$.

Крок 3. Крок, з яким побудована сітка, зменшимо вдвічі $hx^* = hx/2, hy^* = hy/2$. Для нового значення знову виконуємо кроки 1 та 2 та отримаємо розривний сплайн $S^*(x, y) = S^*_{i', j'}(p^*, x, y), (x_{i'}, y_{j'}) \in \Pi^*_{i', j'}$ $p^* = \overline{1, (2m-1)(2n-1)}$ на кожному з прямокутників $\Pi^*_{i', j'} = (x - x_{i'}) \times (y - y_{j'})$, $x_{i'} = x_i + h1^*, y_{j'} = y_j + h2^*$.

Крок 4. На кожному елементарному прямокутнику розбиття $\Pi_{i, j}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ обчислюємо

$$\widetilde{J}_{ij} = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{ij}(x, y), J_{ij}(x, y) = |S(p, x, y) - S^*(p^*, x, y)|.$$

Крок 5. Перевіряємо задовільнення нерівності $|S(x, y) - S^*(x, y)| < \varepsilon, \forall (x, y) \in E$, ε – задана точність. У випадку виконання нерівності сплайн $S^*(x, y)$ представляє собою остаточний розривний сплайн для відновлення розривної функції $f(x, y)$. Якщо ж умова не виконується, то $S(x, y) := S^*(x, y)$ і повертаємося на крок 3.

Висновки до розділу 2

1. Деться поняття оператора розривної сплайн -інтерлінації функцій двох змінних, який дає змогу відновлювати двовимірні щільності з розривами на границях прямокутної сітки. В якості експериментальних даних використовуються сліди розривної функції вздовж заданої системи ліній.

Побудовані розривні конструкції включають неперервні сплайни інтерлінаційного типу як частинний випадок.

2. Запропонований вигляд оператора розривної сплайн-інтерлінації для функції двох змінних, область визначення яких розбита на прямокутні елементи (ректангульована). Оператор дозволяє реконструювати розривну двовимірну внутрішню структуру за відомими лінійними інтегралами від функції, яка описує внутрішню структуру, вздовж заданої системи ліній (проекцій, даних Радона).

3. Запропоновано алгоритм реконструювання розривних двовимірних функцій, лінії розриву яких невідомі, використовуючи їх дані Радона вздовж заданої системи ліній. Цей метод дозволить ідентифікувати розриви внутрішньої структури за відомими інтегралами розривної функції вздовж заданої системи ліній.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри MathCad

Mathcad – це програмне забезпечення, що розроблене для інженерних та наукових розрахунків, поєднує в собі можливості обчислень, візуалізації даних та документування. Відмітимо основні характеристики та особливості системи комп'ютерної математики Mathcad:

1) Інтуїтивний інтерфейс. Mathcad дозволяє виконувати розрахунки у форматі, близькому до математичному запису. Вирази виглядають так, наче вони були написані на папері. Інтерфейс, що легко читається, підходить для користувачів з мінімальним досвідом роботи з програмування.

2) Широкі обчислювальні можливості. Система підтримує чисельні та символні обчислення, має можливість роботи з великими масивами даних, матрицями, векторами та складними формулами; підтримує функції із різних галузей: математика, інженерія, фізика, статистика та ін.

3) Документування розрахунків. Результати розрахунків автоматично інтегруються в документ разом із текстовими поясненнями та графіками. Підходить до створення звітів, де розрахунки супроводжуються поясненнями.

4) Графічна візуалізація даних. Існує можливість побудови 2D та 3D графіків, можливість аналізувати дані за допомогою візуалізації.

5) Підтримка одиниць виміру. MathCad має можливість використання різних одиниць виміру та автоматичної їх конвертації. Помилки в одиницях вимірювання виявляються та виправляються автоматично.

6) Гнучкість та інтеграція. Однією з переваг системи Mathcad є також те, що вона може взаємодіяти з іншими системами: Excel, Matlab, AutoCad, Visual Basic тощо.

7) Простота навчання. Mathcad є простішою системою для освоєння, ніж традиційні мови програмування (наприклад, MATLAB або Python). Підходить для студентів, викладачів та професіоналів.

8) Підтримка стандартів. Програма часто використовується в компаніях, де потрібна відповідність стандартам якості розрахунків та документації. Mathcad часто застосовується в інженерних та наукових розрахунках, таких як проектування, оптимізація, аналіз даних та створення технічних звітів.

3.2 Математичні фантоми для томографії

У реальному експерименті як середовище зазвичай виступає повітря і щось поміщене в томограф, наприклад, у медицині – це пацієнт, а в промисловості – деталь. Значить у наших модельних експериментах нам необхідний цифровий об'єкт, який в медицині називається фантомом – він і виконує роль поглинаючого середовища в модельному експерименті. Будемо використовувати фантоми, що описують тіло людини за допомогою математичних формул.

Перші математичні фантоми з'явилися для точних дозиметричних розрахунків, які забезпечують вироблення безпечних протоколів рентгеноскопії, комп'ютерної рентгенівської томографії та ядерної медицини. У перших спробах математичного моделювання використовували геометричні описи у вигляді сфер та еліпсоїдів різного розміру, але незабаром стало зрозуміло, що ця інформація має обмежене застосування при прогнозуванні, оскільки фактична геометрія тканин та органів не може бути добре змодельована за допомогою цього спрощеного припущення. Одним з перших (1969) стилізованих (на основі рівнянь) математичних фантомів всього тіла, в якому для моделювання внутрішніх органів використовувався ширший діапазон геометричних форм став фантом, відомий як MIRD-5 (рис.3.1).

Цей фантом простими рівняннями грубо моделював скелет, пари легких і частини м'яких тканин, що залишилися, для представлення «середньої» здорової дорослої людини.

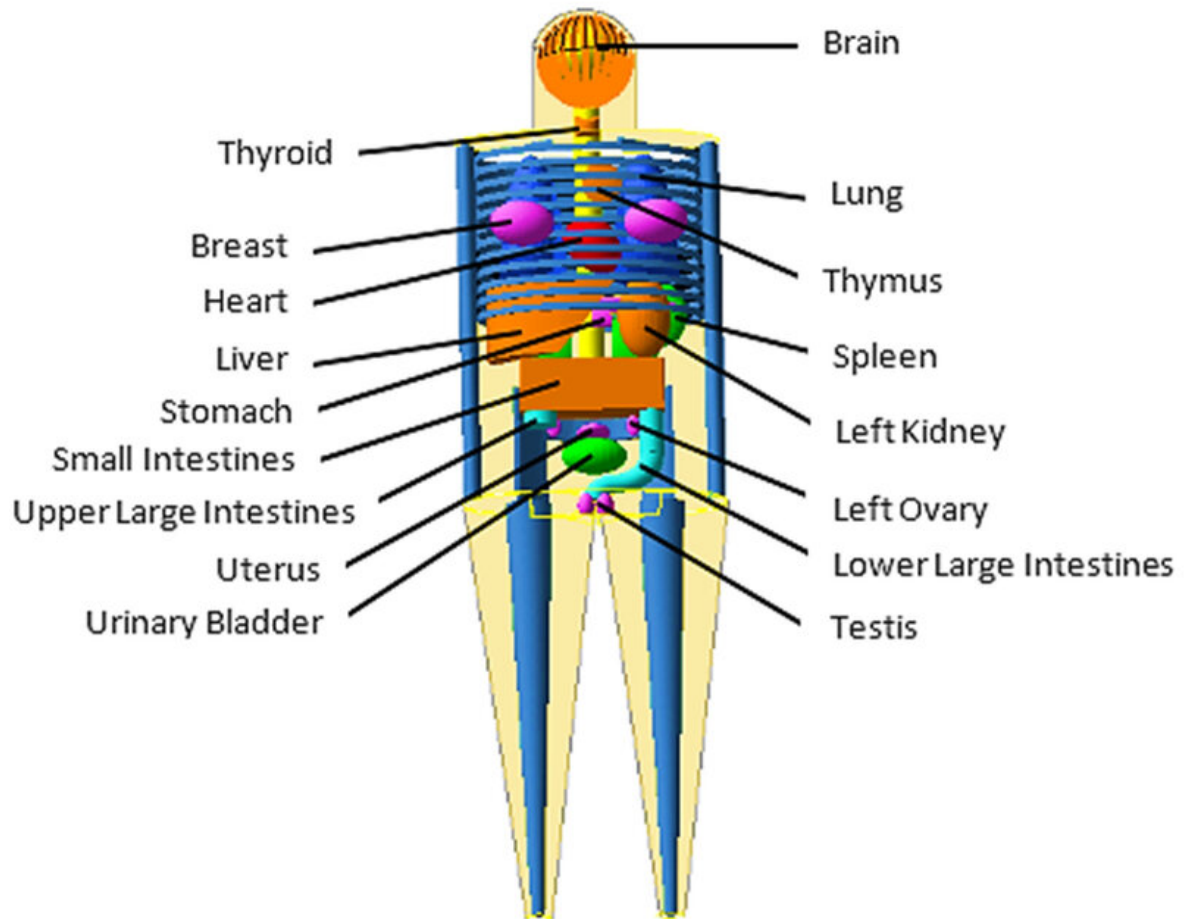


Рисунок 3.1 – Фантом дорослої людини MIRD-5.

Перший рентгенівський комп'ютерний томограф був представлений в 1971 р., але ще багато років обчислювальних можливостей комп'ютерів не вистачало для детального моделювання процесу томографічного сканування тіла людини. Перші КТ сканери використовувалися для просторового представлення внутрішньої структури голови, тому модель голови стала першим спеціалізованим математичним КТ фантомом. Йдеться мова про широко відомий фантом Шеппа і Логана, запропонований 1974 р. у класичній роботі [19]. Він зображений на рис.3.2.

Фантом Шеппа-Логана – це математична модель, яка широко використовується в комп'ютерній томографії (КТ) для тестування та оцінки алгоритмів реконструкції зображень. Він являє собою набір еліптичних форм, які моделюють структуру голови людини в розрізі, включаючи різні тканини, такі як кіст-

ки, м'які тканини та мозок.

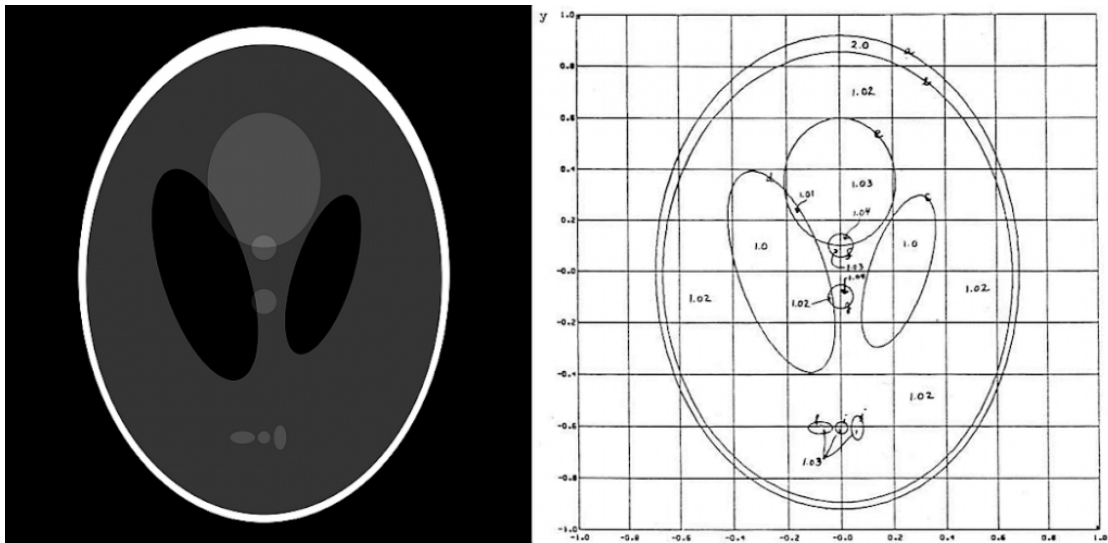


Рисунок 3.2 – 2D фантом Шеппа – Логана

Функція, що описує фантом, визначається як сума 10 еліпсів у квадраті 2×2 (табл. 3.1)

Таблиця 3.1 – Параметри еліпсів у фантомі Шеппа-Логана

| Еліпс | центр | Велика пів- ввісь | Мала пів- вісь | Кут нахилу | Щільність |
|-------|-----------------|----------------------|-------------------|------------|-----------|
| a | (0,0) | 0.69 | 0.92 | 0 | 2 |
| b | (0, -0.0184) | 0.6624 | 0.874 | 0 | -0.98 |
| c | (0.22,0) | 0.11 | 0.31 | -18 | -0.02 |
| d | (-0.22,0) | 0.16 | 0.41 | 18 | -0.02 |
| e | (0,0.35) | 0.21 | 0.25 | 0 | 0.01 |
| f | (0,0.1) | 0.046 | 0.046 | 0 | 0.01 |
| g | (0,-0.1) | 0.046 | 0.046 | 0 | 0.01 |
| h | (-0.08, -0.605) | 0.046 | 0.023 | 0 | 0.01 |
| i | (0,-0.605) | 0.023 | 0.023 | 0 | 0.01 |
| j | (0.06, -0.605) | 0.023 | 0.046 | 0 | 0.01 |

Особливості фантома Шеппа-Логана:

- Простота конструкції: Фантом складається з еліпсів із різною інтенсивністю, що відповідає різним типам тканин.
- Математична визначеність: Всі параметри (розміри, координати центрів, коефіцієнти поглинання) описуються математичними функціями.
- Штучність: Це модель, яка не базується на реальних даних, але імітує типову структуру голови.
- Використання у симуляціях: Фантом використовується для моделювання процесу отримання зображень у комп'ютерній томографії та перевірки точності алгоритмів реконструкції.

Оригінальний 2D фантом моделює один поперечний зріз голови та складається з 10 еліпсів, які за рахунок різних розмірів, орієнтації та “рівнів сірого” моделюють основні анатомічні структури на зрізі.

Спрощена версія фантома (рис. 3.3.) використовує менше еліпсів, спрощуючи геометрію моделі, щоб прискорити розрахунки та тестування.

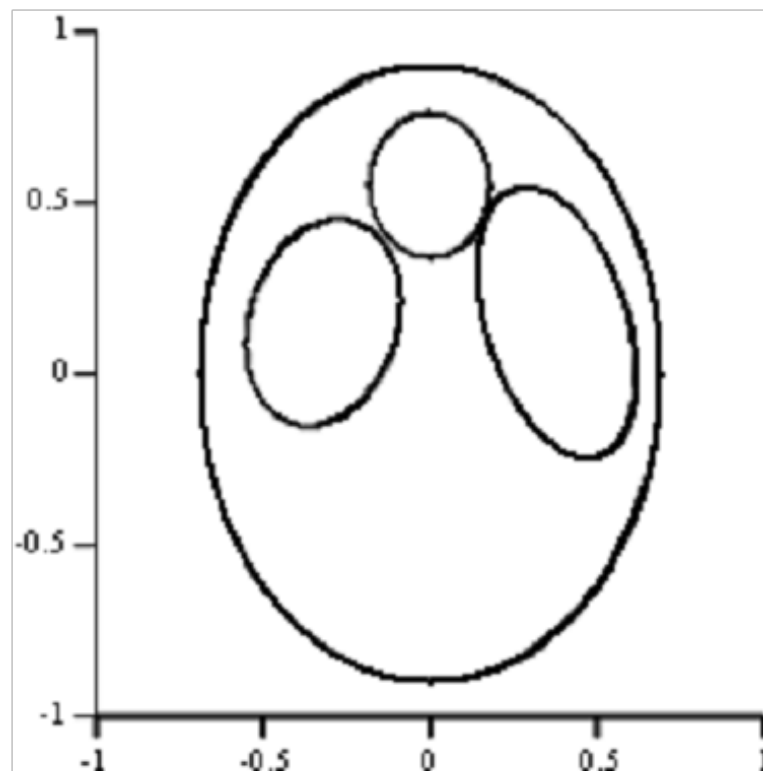


Рисунок 3.3 – Спрощений фантом Шеппа-Логана

3.3 Алгоритм розв'язання задачі ідентифікації ліній розриву 2D об'єкта за відомими проекціями вздовж заданої системи ліній

Викладемо алгоритм розв'язання задачі покроково:

- 1) введення вхідних даних (рівняння прямих (прямокутна сітка) та дві односторонні проекції вздовж кожної з цих прямих (дані Радона)) та точності;
- 2) побудова розривного інтерлінаційного сплайну в кожному елементарному прямокутнику за введеними даними;
- 3) знаходження значень шуканої функції у вузлах прямокутної сітки за допомогою мінімізації функціоналу (2.11);
- 4) зменшення кроку вдвічі та побудова інтерлінаційного сплану для нових даних;
- 5) перевірка виконання умови задовільнення наперед заданої точності.

3.4 Опис програми

У якості вхідних даних використовується тестова задача у вигляді функції $f(x, y)$, яка представляє собою спрощений фантом Шепа Логана.

В якості вхідних даних використовуємо дані Радона, тобто інтеграли вздовж заданої системи ліній. Оскільки ми маємо справу з розривами, то використовуємо односторонні інтеграли (зліва та справа). Оскільки томограф видає тільки один інтеграл вздовж заданого променя, будемо вважати їх рівними. За допомогою цих даних будується розривний інтерлінаційний сплайн, що може мати різний вигляд в кожному елементарному прямокутнику. Побудований сплайн містить невідомі параметри – значення шуканої функції у вузлах використаної сітки. Параметри знаходимо за допомогою мінімізації функціоналу (2.11). Зменшуємо крок вдвічі та знову будемо розривний інтерлінаційний сплайн. Порівнюємо два побудованих сплайни на задовільнення наперед заданої точності знаходження ліній розриву.

Алгоритм продовжуємо до тих пір, поки не отримаємо лінії розриву потрібної точності (товщини).

Результатом є двовимірне зображення (лінії рівня) спрощеного фантома з виділеними лініями розриву потрібної товщини.

Висновки за розділом 3

У розділі наведено основні характеристики системи комп'ютерної математики Mathcad, її переваги для використання. Також представлений алгоритм вирішення задачі ідентифікації розривів плоских об'єктів, що описані розривними двовимірними функціями, та опис створеної програми. В якості вхідних даних використовуються дані Радона (інтеграли вздовж заданої системи ліній). Завдяки таким даним маємо використовувати оператор інтерлінації функцій, який є природнім математичним апаратом математичного моделювання з використанням дистанційних методів дослідження. Оскільки маємо справу з розривами, то маємо вздовж кожної лінії два односторонніх інтеграли вздовж неї. Використання методу розривної інтерлінації, побудованої в кожному прямокутному елементі, та ε -неперервності дозволяють отримати графічну інтерпретацію відновлених функцій з лініями розриву заданої товщини.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Застосування алгоритму до спрощеного фантома Шеппа-Логана

Перевіримо дію алгоритму на прикладі спрощеного фантома Шеппа-Логана (рис. 4.1а). Всередині фантому розміщені еліпси (табл.4.1), що представляють собою реальні внутрішні структурні елементи голови людини. Щільність тканин у різних частинах мозку варіюється. Голова людини складається з різних тканин: кісток, м'язів, шкіри, мозку та інших органів. Кожен з цих елементів має свою власну щільність. Кістки черепа мають високу щільність, щоб захищати мозок. Мозок має набагато нижчу щільність і є м'яким матеріалом, який складається переважно з води та інших біологічних структур. М'язи та шкіра мають ще інші рівні щільності, залежно від їхнього складу.

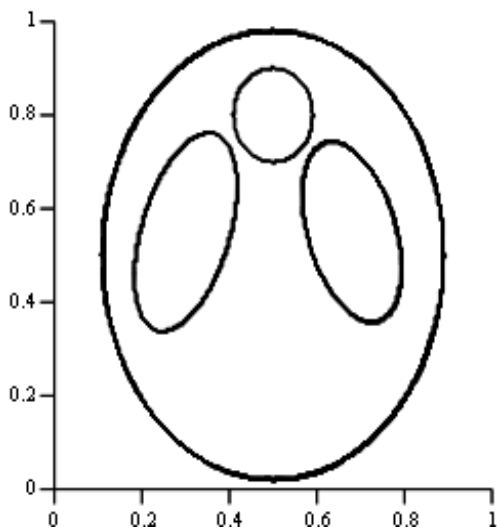
Нехай фантом розміщений в одиничному квадраті $D = [0,1^2]$. Задамо фантом математично, записавши його через аналітичну формулу.

Таблиця 4.1 – Параметри еліпсів у спрощеному фантомі Шеппа-Логана

| Номер еліпса | C_x | C_y | r_x | R_y | Нахил градусів | Щільність |
|--------------|-------|-------|-------|-------|----------------|-----------|
| 1 | 0,500 | 0,500 | 0,390 | 0,480 | 0,000 | 2,000 |
| 2 | 0,680 | 0,550 | 0,200 | 0,100 | -72,00 | 1,000 |
| 4 | 0,320 | 0,550 | 0,220 | 0,100 | 72,00 | 1,500 |
| 5 | 0,500 | 0,800 | 0,090 | 0,110 | 0,000 | 1,7000 |

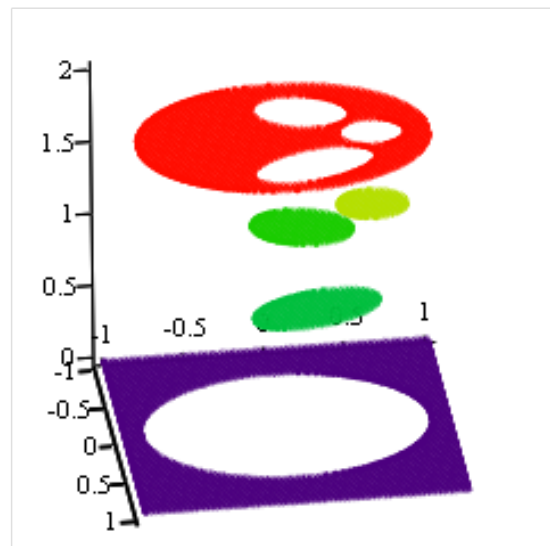
$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \frac{(x-0,5)^2}{0,39^2} + \frac{(y-0,5)^2}{0,48^2} \leq 1; \\ 1, & \frac{[(x-0,68) \cdot \cos(-0,4\pi) + (y-0,55) \cdot \sin(-0,4\pi)]^2}{0,2^2} + \\ & \frac{[-(x-0,68) \cdot \sin(-0,4\pi) + (y-0,55) \cdot \cos(-0,4\pi)]^2}{0,1^2} \leq 1; \\ 1,5, & \frac{[(x-0,3) \cdot \cos(0,4\pi) + (y-0,55) \cdot \sin(0,4\pi)]^2}{0,22^2} + \\ & \frac{[-(x-0,3) \cdot \cos(0,4\pi) + (y-0,55) \cdot \sin(0,4\pi)]^2}{0,1^2} \leq 1; \\ 1,7, & \frac{(x-0,5)^2}{0,09^2} + \frac{(y-0,8)^2}{0,1^2} \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Ця функція має розриви першого роду, що розташовані на еліпсах. Представимо функцію $f(x, y)$ графічно за допомогою ліній рівня (рис. 4.1а).



f

(а)



(б)

Рисунок 4.1 – Фантом Шеппа-Логана у спрощеному вигляді:

а) в лініях рівня; б) просторовий вигляд

Нехай задана рівномірна сітка за віссю x :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,25, \quad x_3 = 0,5, \quad x_4 = 0,25, \quad x_5 = 1.$$

По осі y оберемо таку ж рівномірну сітку. Будемо вважати заданими односторонні дані Радона (тобто проекції функції вздовж заданих ліній). З приводу того, що комп'ютерний томограф видає лише одну проекцію вздовж певної лінії, будемо вважати проекції справа і зліва від заданої лінії рівними. Сучасні комп'ютерні томографи дають змогу отримати зображення з дуже малим кроком — від 0,5 до 10 мм. Тому для початку будемо використовувати лише ті проекції, що рухаються вздовж заданих ліній. Тобто проекції, що отримані вздовж ліній, перпендикулярних вісі Ox для заданої функції будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_1^{2(+)} &= \int_0^1 f(x_1 + 0, y) dy = 0, & \gamma_2^{2(-)} &= \int_0^1 f(x_2 - 0, y) dy = 1,305, \\ \gamma_2^{2(+)} &= \int_0^1 f(x_2 + 0, y) dy = 1,305, & \gamma_3^{2(-)} &= \int_0^1 f(x_3 - 0, y) dy = 1,86, \\ \gamma_3^{2(+)} &= \int_0^1 f(x_3 + 0, y) dy = 1,86, & \gamma_4^{2(-)} &= \int_0^1 f(x_4 - 0, y) dy = 1,196, \\ \gamma_4^{2(+)} &= \int_0^1 f(x_4 + 0, y) dy = 1,196, & \gamma_5^{2(-)} &= \int_0^1 f(x_5 - 0, y) dy = 0 \end{aligned}$$

Значення проекцій вздовж ліній, перпендикулярних Oy , будуть мати наступний вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_1^{1(+)} &= \int_0^1 f(x, y_1 + 0) dy = 0, & \gamma_2^{1(-)} &= \int_0^1 f(x, y_2 - 0) dy = 1,333, \\ \gamma_2^{1(+)} &= \int_0^1 f(x, y_2 + 0) dy = 1,333, & \gamma_3^{1(-)} &= \int_0^1 f(x, y_3 - 0) dy = 1,258, \end{aligned}$$

$$\gamma_3^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_3 + 0) dy = 1,258, \quad \gamma_4^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_4 - 0) dy = 1,25,$$

$$\gamma_4^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_4 + 0) dy = 1,25, \quad \gamma_5^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_5 + 0) dy = 0.$$

Наявні лінії утворюють прямокутні елементи (в нашому випадку квадрати). Згідно формули (2.8) конструємо розривний сплайн інтерлінаційного типу. Невідомі інтерполяційні дані, що входять у цю формулу, будемо знаходити шляхом мінімізації функціоналу (2.11). Графічне зображення побудованого сплайну у вигляді ліній рівня наведено на рис. 4.2а.

З рис. 4.2 бачимо, що, всі прямокутні елементи, куди потрапили лінії розриву, зафарбувалися (тобто всі елементи). Зменшимо крок сітки вдвічі за двома змінними та знову побудуємо розривний сплайн-інтерліант (рис. 4.2, б)

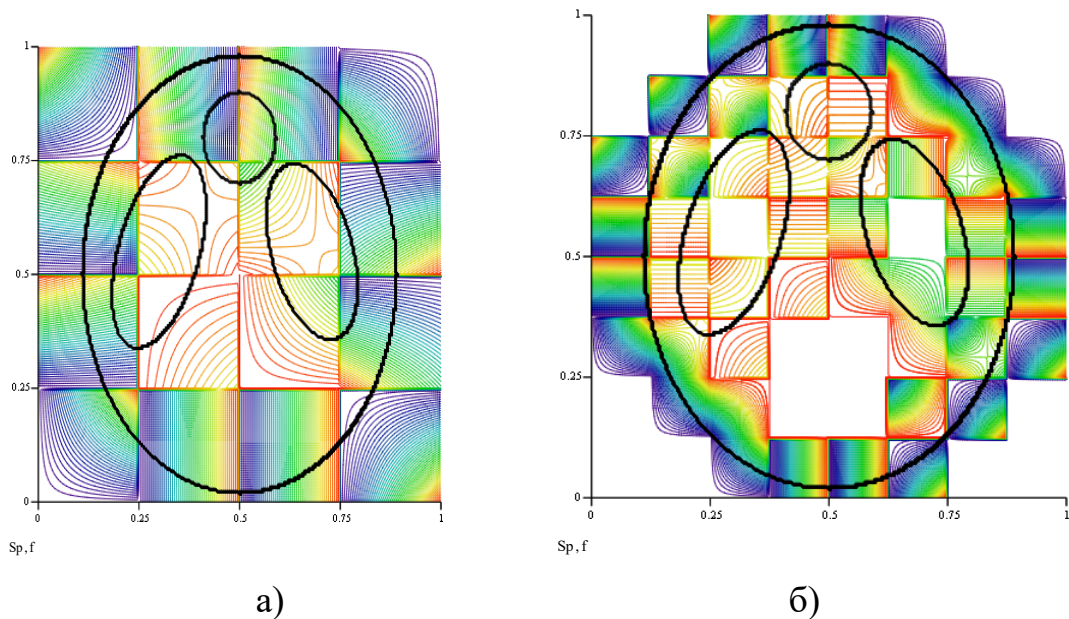


Рисунок 4.2 – Графічне зображення фантома та ліній рівня інтерлінаційного сплайну на ітераціях: *а* – I-а; *б* – II-га

З рис. 4.2 б можна зробити висновок, що на прямокутних елементах, куди не потрапляють лінії еліпсів (розриви), ліній рівня немає (тобто вони не замальовані), оскільки інтерлінаційний сплайн кусково неперервну функцію набли-

жує точно.

Ітераційний процес можна продовжувати до отримання лінії розриву тієї довжини, яка потрібна досліднику. Наведемо на рис. 4.3 ще декілька подальших ітерацій.

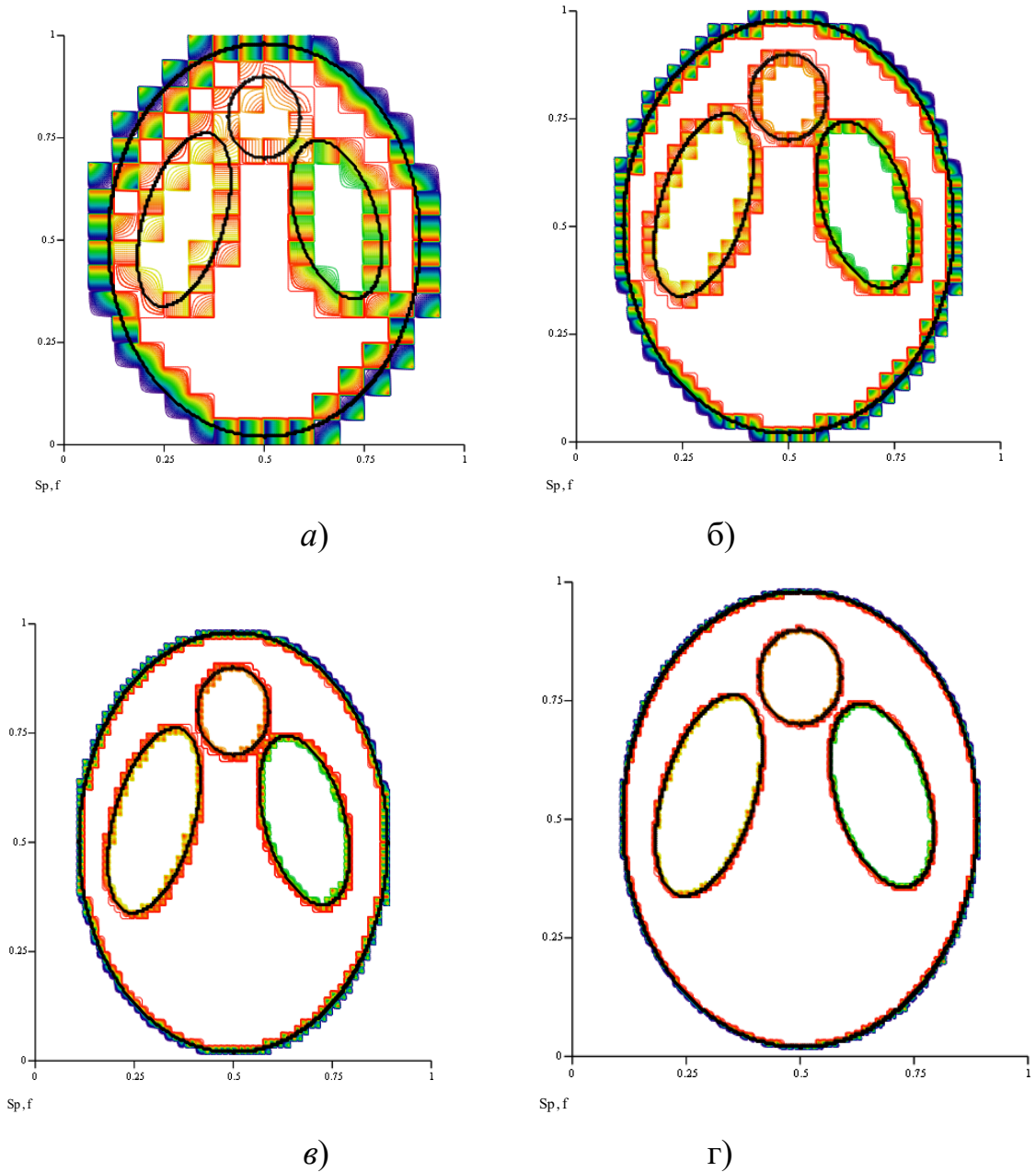


Рисунок 4.3 – Графічне зображення фантома Шеппа-Логана та ліній рівня сплайн-інтерліанта розривного типу

при наступному розбитті:

а – $m = 17, n = 17$; б – $m = 33, n = 33$;

в – $m = 65, n = 65$; г – $m = 131, n = 131$

На рис. 4.3, в графічно представлений сплайн-інтерліант розривного типу, за допомогою якого можна чітко розрізнити лінії розриву спрощеного фантома Шеппа-Логана.

Таблиця 4.2 – Результати досліджень

| n | 5 | 9 | 17 | 65 | 131 |
|-------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| ε (товщина лінії) | 0,25 | 0,125 | 0,063 | 0,016 | 0,008 |

Висновки за розділом 4

У даному розділі проводиться тестування алгоритму ідентифікації ліній розриву функцій двох змінних на прикладі фантома Шеппа-Логана, який імітує зріз головного мозку. Запропонований алгоритм реконструкції розривної внутрішньої структури головного мозку, використовуючи дані Радона, що поступають з реального томографу, пропонується використовувати для моделювання тіл та процесів за допомогою дистанційних методів дослідження. Цей метод дає змогу наблизити розривну функцію та виявити лінії розриву розривної функції двох змінних. В результаті обчислювального експерименту можна зробити висновок що за допомогою розривної сплан-інтерліанації можна математично моделювати об'єкти, що досліджуються методами комп'ютерної томографії, тобто коли в якості вхідних виступають лінійні інтеграли вздовж заданої системи ліній (дані Радона).

ВИСНОВКИ

В процесі виконання було проведено попередній аналіз предметної області, а також огляд актуальності і сучасного стану проблеми наближення розривних функцій двох змінних.

В результаті даної роботи запропоновано алгоритм для знаходження ліній розриву функції двох змінних на основі інтерлінації. Цей метод дає змогу наближити розривну функцію та виявити лінії розриву розривної функції двох змінних.

Цей алгоритм було протестовано на спрощеному фантомі Шеппа – Логана. У результаті побудований розривний інтерлінаційний сплайн описує лінії розриву заданого фантома. При зменшенні кроку сітки за координатами можна досягти бажаної точності.

Розроблений алгоритм відновлення розривної функції двох змінних на основі проекційних даних (наприклад, отриманих із томографа) може бути використаний для моделювання об'єктів і процесів із застосуванням дистанційних методів дослідження.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Першина Ю. І., Кошеленко В. В. Виявлення ліній розриву двовимірного на основі інтерлінації. *13-а Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ICT-2024»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків 26-28 листопада 2024 р.). Харків : ХНУРЕ, 2024. С. 78–79.
2. Першина Ю. І., Кошеленко В. В. Знаходження розривів 2D об'єкта за допомогою інтерлінації функцій. *VIII міжнародна науково-практична конференція здобувачів вищої освіти та молодих учених «Студенти та молодь – для майбутнього країни»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків 14-15 листопада 2024 р.). Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2024. С. 82–84.
3. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function / Gottlieb D., Shu C. W., Solomonoff A., Vandeven H. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1992. №43 P. 81–98.
4. Gottlieb D., Shu C. W. Resolution properties of the Fourier method for discontinuous waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1994. №116. P. 27–37.
5. Don W. S., Quillen C. Numerical simulation of Reactive Flow, Part I : Resolution. *Journal of Computational Physics*. 1995. № 122. P. 244–265.
6. Ma H. Chebyshev-Legendre Super Spectral Viscosity Method for Nonlinear Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998. №35. P. 893–908.
7. Costarelli D., Minotti A., Vinti G. Approximation of discontinuous signals by sampling Kantorovich series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2017, Vol. 450. № 2, P. 1083–1103.
8. Spline approximation of discontinuous multivariate functions from scattered data / López de Silanes M.C., Parra M.C., Pasadas M., Torrens J.J. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. Vol. 131. № 1 – 2, P. 281–298.
9. Gelb A., Tadmor E. Detection of edges in spectral data. *Applied Computational Harmonic Analysis*. 1999. № 7. P. 101–135.

10. Gelfand I.M., Goncharov A.B. Recovery of a Compactly Supported Function Starting from Its Integrals over Line Interesting a Given Set of Points in Space. 1998. № 15. P. 373–376.
11. Gottlieb D., Tadmor E. Recovering Pointwise Values of Discontinuous Data Within Spectral Accuracy. *Progress in Scientific Computing*. 1985. Vol. 6. P. 357–375.
12. Gottlieb S., Jae-Hun Jung, Kim S. A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon. *Commun. Comput. Phys.* 2011. Vol. 9, № 3. P. 497–519.
13. Arge E., Floater M. Approximating scattered data with discontinuities Numer. *Algorithms*. 1994. № 8. P. 149–166.
14. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія. Київ : Наук. думка, 2017. 314 с.
15. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерліантами з використанням трапецевидних елементів. *Таврійський вісник інформатики та математики*. 2011. № 2. С. 59–70.
16. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid. *Journal of Numerical Analysis. Industrial and Apply Mathematics*. 2007. Vol. 1. № 1. P. 1–13.
17. Saaty T. L. How to make a decision: The analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*. 1990. Vol. 48. P. 9–26.
18. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisserMannigfaltigkeiten.Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl. 1917.
19. Shepp, Larry A.; Logan, Benjamin F. (June 1974). "The Fourier Reconstruction of a Head Section". *IEEE Transactions on Nuclear Science*. NS-21 (3): 21–43.
20. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 504 с.