

ВОЗБУЖДЕНИЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО КОНУСА С ТОНКИМ СЛОЕМ ПОКРЫТИЯ

Введение

Рассеяние электромагнитных волн на сплошных идеально проводящих неограниченных канонических структурах (лента, сфера, цилиндр, клин, конус) относится к хорошо исследованным задачам электродинамики [1, 2]. Во многих практических приложениях, в частности в микроволновой технике [3], большой интерес вызывает исследование модельных задач, связанных с рассеянием волн на неидеально проводящих телах [4]. Одним из способов учета поверхностных особенностей тела является использование усредненных краевых условий (УКРУ), самыми распространенными из которых являются граничные условия Леонтовича – Щукина импедансного типа [5]. Применение УКРУ к решению модельных задач электродинамики положило начало исследованию задач дифракции волн на проволочных решетках [6, 7], полупрозрачных и импедансных поверхностях [8, 9], сверхпроводящих структурах [3]. Авторам [10] удалось найти решение задачи дифракции электромагнитных волн в высокочастотной области на импедансном полубесконечном сплошном конусе, на котором заданы краевые условия Леонтовича – Щукина, не учитывающие кривизну конической поверхности.

Цель работы – исследование модельной задачи возбуждения точечным источником неидеально проводящего полубесконечного конуса, на поверхности которого заданы односторонние краевые условия импедансного типа с учетом кривизны конуса и его поверхностных свойств.

Постановка задачи

Одной из моделей конической антенны, на поверхность которой нанесен тонкий слой, является идеально проводящий конус с тонким слоем покрытия (рис. 1), учет которого осуществляется путем использования УКРУ на конической поверхности. Электрический ($\chi = 1$) или магнитный ($\chi = 2$) радиальный диполь с единичным моментом, поле \vec{E}_0, \vec{H}_0 которого меняется по гармоническому закону $e^{j\omega t}$, $a = \pm 1$, расположен в точке B_0 и возбуждает с точной круговой полубесконечный идеально проводящий конус Σ с тонким слоем покрытия. Во введенной сферической системе координат r, θ, φ с началом в вершине конуса поверхность конуса Σ определяется уравнением $\theta = \gamma$.

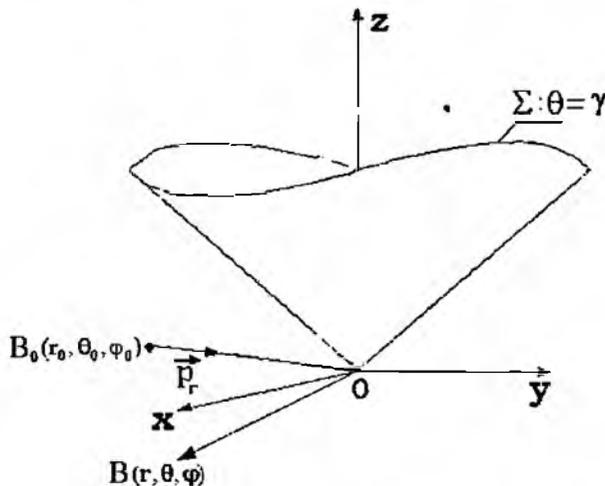


Рис. 1. Одиночный сплошной конус с тонким слоем покрытия

Присутствие конической структуры приводит к появлению рассеянного поля \vec{E}_1 и \vec{H}_1 , которое и требуется найти. Полное электромагнитное поле \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad (1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1, \quad (2)$$

удовлетворяет:

- системе уравнений Максвелла;
- одностороннему краевому условию на поверхности конуса:

$$\vec{n} \times \left\{ \vec{n} \times \left[\vec{E}^+ + \vec{E}^- \right] \right\} = -\zeta_0^{(\chi)} \vec{n} \times \vec{H}^+ \quad (3)$$

$$\vec{E}^\pm = \vec{E} \Big|_{\theta=\gamma \pm 0}; \quad \zeta_0^{(\chi)} = w R_0^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\beta(\chi)},$$

$$R_0^{(\chi)} = R_{0,1}^{(\chi)} + ia R_{0,2}^{(\chi)}, \quad R_{0,1}^{(\chi)} \geq 0,$$

w – волновое сопротивление однородной и изотропной среды с параметрами ϵ, μ , в которую помещён конус, $\vec{\rho}(\chi) = (-1)^{\chi-1} \vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности конуса;

- условию на бесконечности;
- условию ограниченности энергии.

Электродинамическая краевая задача в такой постановке имеет единственное решение [11]. Для решения этой задачи используем потенциалы Дебая $v^{(x)}$ для полного поля (1), (2), $v_0^{(x)}$ для поля источника, $v_1^{(x)}$ для рассеянного поля, через которые выражаются составляющие электромагнитного поля [11]. Вследствие этого решение исходной электродинамической задачи сводится к решению внешней третьей краевой задачи математической физики для уравнения Гельмгольца относительно потенциалов $v^{(x)}$, удовлетворяющих принципу предельного поглощения, условию ограниченности энергии, а на поверхности конуса таким краевым условиям, которые получаются из (3):

$$L^{(x)} v^{(x)} \Big|_{\Sigma} = -R_0^{(x)} (q \sin \gamma)^{\beta(x)} L^{(x+\beta)} v^{(x)} \quad (4) \quad L^{(1)} v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - q^2 \right) (rv), \quad v^+ = v \Big|_{\theta=\gamma+0},$$

$$L^{(2)} v = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad v^- = v \Big|_{\theta=\gamma-0},$$

$$q = iak, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}.$$

В соответствии со структурой полного поля (1), (2) потенциал для полного поля представим в виде

$$v^{(x)} = v_0^{(x)} + v_1^{(x)}.$$

Неизвестный потенциал $v_1^{(x)}$ ищем с помощью интегрального преобразования Конторовича-Лебедева [12], в связи с чем представим его в виде

$$v_1^{(x)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau s h \pi \tau \hat{v}_1^{(x)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (5)$$

$$\hat{v}_1^{(x)} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{*(x)} b_{m\tau}^{*(x)}(\gamma, \theta_0) \hat{U}_{m,i\tau}^{*(x)}(\theta, \varphi),$$

$$a_{m\tau}^{*(x)} = \frac{1}{4r_0} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \frac{1}{ch\pi\tau} \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau) K_{i\tau}(qr_0)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau) \sqrt{r_0}},$$

$$b_{m\tau}^{*(x)}(\gamma, \theta_0) = \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta_0), \quad \theta_0 < \gamma$$

$$b_{m\tau}^{*(\chi)}(\gamma, \theta_0) = \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0), \quad \gamma < \theta_0$$

$$\tilde{U}_{m,\tau}^{*(\chi)} = \begin{cases} \hat{\alpha}_{m\tau}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, & 0 < \theta < \gamma, \\ \hat{\beta}_{m\tau}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) e^{im\varphi}, & \gamma < \theta < \pi, \end{cases} \quad (6)$$

где $K_{\tau}(qr)$ – функция Макдональда, $\Gamma(\varepsilon)$ – гамма-функция. Следует отметить, что неизвестные коэффициенты $\hat{\alpha}_{m\tau}^{(\chi)}$, $\hat{\beta}_{m\tau}^{(\chi)}$ функции $\tilde{U}_{m,\tau}^{*(\chi)}$ (6) не зависят от волнового числа k и находятся из краевого условия. Рассмотрим импедансный параметр как функцию расстояния от вершины конуса:

$$R_0^{(\chi)} = \zeta_0^{(\chi)} (qr)^{-\hat{\rho}(\chi)}, \quad (7)$$

где $\zeta_0^{(\chi)} = \zeta_0^{(\chi)'} + i\zeta_0^{(\chi)''} \in \mathbb{C}$ – постоянная величина. Рассеивающие структуры, поверхностные свойства которых определяются подобными импедансными параметрами, характеризуются тем, что вдоль них могут распространяться поверхностные волны, обусловленные переменным импедансом [13]. В случае импедансного параметра (7) потенциал Дебая (5) принимает вид

$$v_1^{(\chi)} = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \alpha_{m\tau}^{*(\chi)} b_{m\tau}^{*(m)} \bar{y}_m^{(\chi)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\pm \cos \theta) K_{\tau}(qr)}{\frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\pm \cos \gamma) \sqrt{r}} d\tau, \quad (8)$$

$$\bar{y}_m^{(\chi)} = \frac{(\tau^2 + 1/4)^{\rho(\chi)} T_{m\tau}^{(\chi)}(\gamma) - \zeta_0^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\hat{\rho}(\chi)} \Delta_{\tau}^{(m, 1-\chi)}(\gamma)}{(\tau^2 + 1/4)^{\hat{\rho}(\chi)} T_{m\tau}^{(\chi)}(\gamma) - \zeta_0^{(\chi)} (\sin \gamma)^{\hat{\rho}(\chi)} \Delta_{\tau}^{(m, \chi)}}. \quad (9)$$

$$T_{m\tau}^{(\chi)}(\gamma) = \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma),$$

$$\Delta_{\tau}^{(m, \chi)}(\gamma) = \frac{d^{2-\chi}}{d\gamma^{2-\chi}} P_{-1/2-i\tau}^m(-\cos \gamma) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma).$$

Верхние знаки у подынтегральной функции (8) соответствуют области $0 < \theta < \gamma$, а нижние $-\gamma < \theta < \pi$. В случае осесимметричного возбуждения конуса с тонким слоем покрытия ($\theta_0 = \pi$, $m = 0$) представления (8), (9) упрощаются и принимают вид ($\chi = 1$)

$$v_1^{(1)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \alpha_{0\tau}^{(1)} b_{0\tau}^{*(0)} \bar{y}_0^{(1)} \frac{P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \theta) K_{\tau}(qr)}{P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \gamma) \sqrt{r}} d\tau, \quad (10)$$

$$\bar{y}_0^{(1)} = \frac{(\tau^2 + 1/4) P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) - \zeta_0^{(1)} \sin \gamma \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2-i\tau}(-\cos \gamma)}{(\tau^2 + 1/4) P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma) - \zeta_0^{(1)} \sin \gamma \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma) P_{-1/2-i\tau}(\cos \gamma)}.$$

Отсюда нетрудно заключить, что $0 \leq \bar{y}_0^{(1)} \leq 1$. Для наглядности влияния наличия тонкого слоя покрытия удобно представить $v_1^{(1)}$ (10) так:

$$v_1^{(1)} = v_{1,ид\,уп}^{(1)} + v_{1,покр}^{(1)}, \quad (11)$$

где $v_{1,ид\,уп}^{(1)}$ – является потенциалом Дебая в случае возбуждения идеально проводящего конуса электрическим радиальным диполем [14], а $v_{1,покр}^{(1)}$ – поправочное слагаемое, учитывающее влияние тонкого покрытия. причём

$$v_{1, \text{вн}}^{(1)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau a_{0\tau}^{*(1)} \frac{P_{-\nu/2+i\tau}(\cos \gamma)}{P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma)} P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \theta) \frac{K_r(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad \gamma < \theta < \pi,$$

$$v_{1, \text{покр}}^{(1)} = \zeta_0^{(1)} \frac{4}{\pi^3} \int_0^{+\infty} \frac{\tau \operatorname{sh} 2\pi \tau a_{0\tau}^{*(1)}}{\Delta_{i\tau}} \frac{P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \theta)}{P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma)} \frac{K_r(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad \gamma < \theta < \pi$$

$$\Delta_{i\tau} = (\tau^2 + 1/4) P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma) - \zeta_0^{(1)} \sin \gamma \frac{d}{d\gamma} P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma).$$

В предельном случае идеально проводящего конуса, который получается в результате исчезновения покрытия ($\zeta_0^{(1)} = 0$), $v_1^{(1)}$ (11) превращается в потенциал Дебая для идеально проводящего конуса [14]. Коэффициент $\tilde{y}_0^{(1)}$ в (10) запишем в виде

$$\tilde{y}_0^{(1)} = 1 - \zeta_0^{(1)} g_{i\tau}^{(1)}(\zeta_0^{(1)}, \gamma). \quad (12)$$

$$g_{i\tau}^{(1)} = \frac{2}{\pi P_{-\nu/2+i\tau}(\cos \gamma)} \frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{(\tau^2 + 1/4) P_{\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma) - \zeta_0^{(1)} \sin \gamma \frac{d}{d\gamma} P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma)}. \quad (13)$$

В случае действительного импедансного параметра ($\zeta_0^{(1)} \geq 0$) с учётом свойств функции Лежандра [15] заключаем, что $g_{i\tau}^{(1)}(\zeta_0^{(1)}, \gamma) \geq 0$. Следует отметить, что в предельном случае идеально проводящего конуса $\tilde{y}_0^{(1)} = 1$. Коэффициент $\tilde{y}_0^{(1)}$ (12) найден в результате использования краевого условия (3) с учётом кривизны конуса (множитель $(\sin \gamma)^{\beta(x)}$). Выясним влияние учёта кривизны конуса в крайевых условиях на $\tilde{y}_0^{(1)}$, который входит в подынтегральное выражения потенциала $v_1^{(1)}$ (10). Для этого рассмотрим краевое условие вида

$$\vec{n} \times \left\{ \vec{n} \times [\vec{E}^+ + \vec{E}^-] \right\} = -w \vec{R}_0^{(x)} \vec{n} \times \vec{H}^+, \quad (14)$$

$$\vec{R}_0^{(x)} = Z_0^{(x)} (qr)^{-\beta(x)}, \quad \vec{R}_0^{(x)} = \vec{R}_{0,1}^{(x)} + ia \vec{R}_{0,2}^{(x)}, \quad \vec{R}_{0,1}^{(x)} \geq 0.$$

В случае осесимметричного возбуждения конуса с покрытием электрическим радиальным диполем получаем

$$\tilde{y}_0^{(1)*} = 1 - Z_0^{(1)} \tilde{g}_{i\tau}^{(1)}(Z_0^{(1)}, \gamma). \quad (15)$$

$$\tilde{g}_{i\tau}^{(1)} = \frac{2}{\pi \sin \gamma P_{-\nu/2+i\tau}(\cos \gamma)} \frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{(\tau^2 + 1/4) P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma) - Z_0^{(1)} \frac{d}{d\gamma} P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma)}. \quad (16)$$

Для удобства сравнения считаем, что $Z_0^{(1)} = \zeta_0^{(1)}$, $0 \leq \zeta_0^{(1)}$, тогда $0 \leq g_{i\tau}^{(1)} \leq \tilde{g}_{i\tau}^{(1)}$ и $0 \leq \tilde{y}_0^{(1)*} \leq \tilde{y}_0^{(1)} \leq 1$. Отсюда заключаем, что учёт кривизны конуса в крайевых условиях (3), (14) влечёт уменьшение потерь на конусе. О характере зависимости коэффициентов $\tilde{y}_0^{(1)}$ и $\tilde{y}_0^{(1)*}$ от импедансных параметров и угла полуоткрытия конуса γ можно видеть из (12), (13), (15), (16). В случае малых значений параметра $\zeta_0^{(1)}$ ($\zeta_0^{(1)} \ll 1$) коэффициент $\tilde{y}_0^{(1)}$ можно представить так:

$$\tilde{y}_0^{(1)} = 1 - \zeta_0^{(1)} \frac{2}{\pi P_{-\nu/2+i\tau}(\cos \gamma) (\tau^2 + 1/4) P_{-\nu/2+i\tau}(-\cos \gamma)} + O\left(\left(\zeta_0^{(1)}\right)^2\right),$$

а для узкого конуса ($\gamma \ll 1$) этот коэффициент имеет вид

$$\tilde{y}_0^{(1)} = 1 - \frac{1}{\ln(2/\gamma)} \frac{\zeta_0^{(1)}}{(\tau^2 + 1/4)} + O\left(1/\ln^2(2/\gamma)\right).$$

При осесимметричном возбуждении электрическим радиальным диполем узкого конуса асимптотическое разложение потенциала $u_1^{(1)}$ (11) записывается в виде

$$u_1^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\ln(2/\gamma)} \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau a_{0\tau}^{*(1)} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta) \frac{K_{\pi}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{1}{\ln^2(2/\gamma)} \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau \Phi_{\tau} a_{0\tau}^{*(1)} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta) \frac{K_{\pi}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau + O(1/\ln^3(2/\gamma)), \quad \gamma < \theta < \pi,$$

$$\Phi_{\tau}(\zeta_0^{(1)}) = \frac{\zeta_0^{(1)}}{(\tau^2 + 1/4)} - \psi(-1/2 + i\tau) - C + \frac{1}{2} \pi \text{th} \pi \tau,$$

где $\psi(z)$ – пси-функция [15], $C = -\psi(1)$.

На рис. 2 приведены зависимости модуля радиальной составляющей плотности поверхностного тока от величины qr , $qr \in \mathbb{R}$, при фиксированных значениях импедансного параметра ($\theta_0 = \pi$). Кривые соответствуют различным значениям действительной части импедансного параметра при фиксированной мнимой части. Анализ этих зависимостей показал, что при увеличении действительной части импедансного параметра кривые зависимостей опускаются вниз, что свидетельствует об уменьшении плотности поверхностного тока по мере увеличения потерь покрытия.

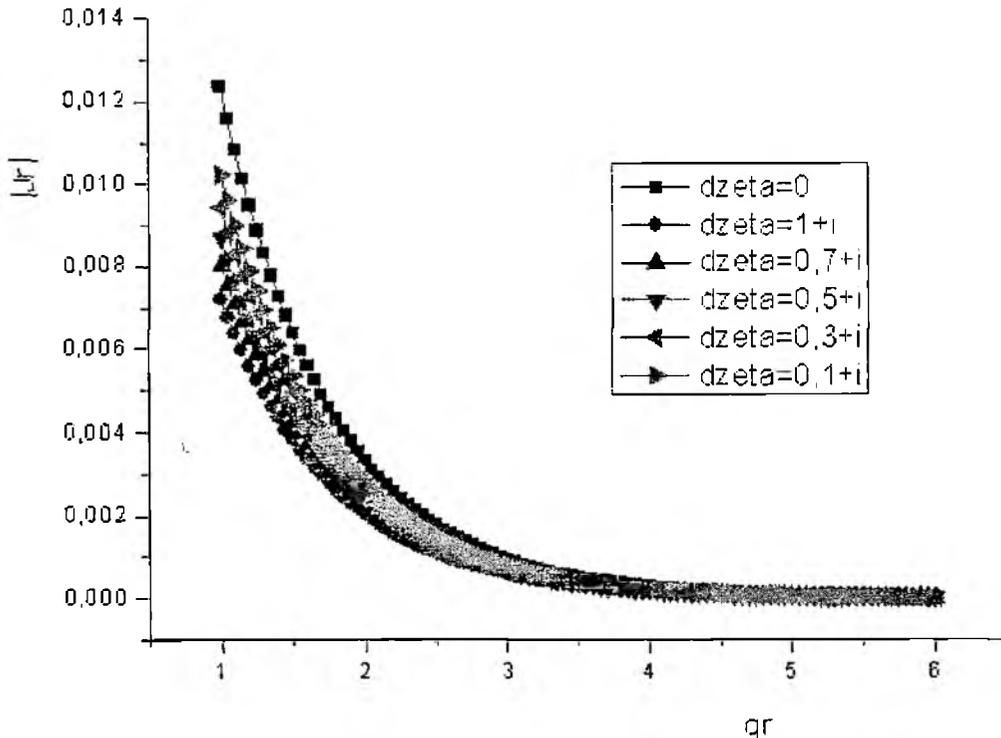


Рис. 2. Модуль плотности поверхностного тока

на идеально проводящем конусе с покрытием $\left(\gamma = \frac{\pi}{8}, |qr_0| = 1 \right)$.

Из приведенных графиков можно сделать вывод о том, что на расстояниях от вершины конуса меньших трёх длин волн полученные результаты для полубесконечного конуса могут быть использованы при анализе плотности поверхностного тока, наведенного на поверхности конечного конуса в осесимметричном случае его возбуждения.

Заключение

Проведено исследование в строгой постановке задачи возбуждения гармоническим точечным источником полубесконечного кругового идеально проводящего конуса с тонким

слоем покрытия. Моделирование тонкого покрытия проводилось с использованием усреднения односторонних краевых условий импедансного типа, в которых впервые учитывается кривизна конической поверхности. Решение краевой электродинамической задачи проводилось с привлечением потенциалов Дебая и интегральных преобразований Конторовича – Лебедева. В работе рассмотрен специальный тип импедансного параметра, зависящий от расстояния до вершины конуса, получено аналитическое решение в случае возбуждения конуса радиальным диполем. Для изучения влияния учета кривизны конуса в УКРУ приведено аналитическое решение, найденное без учета множителя кривизны. Проведено сравнение решений и сделан вывод о влиянии учета этого множителя на решение задачи и потери, обусловленные наличием тонкого слоя покрытия. На основе приведенных графических зависимостей модуля радиальной составляющей плотности поверхностного тока, наведенного на поверхности тонкого слоя, от соотношения длины волны и расстояния до вершины конуса, показано возможное использование полученного строгого решения в случае осесимметричного возбуждения полубесконечного идеально проводящего конуса с тонким слоем для изучения поля, рассеянного конечным конусом.

Список литературы: 1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции: Пер с нем./ Под ред. Г.Д. Малюжинца. М.: Мир, 1964. 428с. 2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М: Радио и связь, 1988. 440с. 3. Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. М: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 280с. 4. Senior T.B.A., Volakis J.L. Approximate boundary conditions in electromagnetics // The Institution of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 1995. 353 p. 5. Леонтович М.А. Исследования по распространению радиоволн. 1948. Сб.2. М.: Изд-во АН СССР. С.5-12. 6. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск: Изд-во Томск. ун-та. 1987. 127с. 7. Конторович М.И., Астрахан М.И., Акимов В.П. и др. Электродинамика сетчатых структур. М.: Радио и связь, 1987. 136с. 8. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н. и др. Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями: Методы конструктивного синтеза. М.: Наука, 1989. 176с. 9. Звездина М.Ю. Рассеяние электромагнитного поля импедансной цилиндрической поверхностью произвольного сечения // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т.6. №4. С.38-40. 10. Bernard J. M. L., Lyalinov M. A. Spectral domain solution and asymptotics for the diffraction by an impedance cone // IEEE Trans. on Antennas & Propagat. 2001. V.AP-49, №.12. P.1633-1637. 11. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свеишиков А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991. 224с. 12. Doroshenko V.A., Kravchenko V.F. The scattering of plane electromagnetic waves from a cone with longitudinal slots // Journal of Communications Technology and Electronics. 2001. Vol.46, №3. P.271-278. 13. Felsen L.B. Electromagnetic properties of wedge and cone surfaces with a – linearly varying surface impedance // IRE Trans. on Antennas & Propagat. 1959. AP-7, №.12. P.231-243. 14. Колодий Б.И., Курцияк Д.Б. Осесимметричные задачи дифракции электромагнитных волн на конических поверхностях. Киев: Наук. думка, 1995. 167с.(на укр. яз). 15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. М.: Наука, 1973. Т.1. 407с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редакцию 14.04.2009