УДК 621.385.69

УРАВНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ДОБРОТНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА СО СВОБОДНОЙ ПРИОСЕВОЙ ОБЛАСТЬЮ И ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ НАСТРОЙКИ

СЛИПЧЕНКО Н.И.

Решается граничная электродинамическая задача для резонатора с двумя настроечными элементами и свободной приосевой областью. Выводится дисперсионное уравнение относительно собственных частот. Приводится формула расчета добротности.

1. Введение

Фундаментальные исследования по генерации, излучению, рассеянию и распространению электромагнитных волн с применением полученных результатов к освоению диапазонов волн, а также исследования стационарных колебаний и нестационарных электромагнитных полей связаны с планами, обозначенными Генеральной Ассамблеей URSI еще в 1996 г. [1]. Составной частью многих современных технических устройств являются резонаторы. В связи с исследованием электромагнитных колебаний в закрытых резонансных объемах продолжается их изучение и усовершенствование. Создание резонаторов с заданными характеристиками связано с рассмотрением структур со сложной геометрией внутренней поверхности. Проблема заключается в выборе конфигурации резонансной системы и построении адекватной математической модели.

Изучению собственных колебаний и возбуждению объемных резонаторов разной геометрической конфигурации уделяется внимание во многих работах, начиная от фундаментальных, ставших уже классическими [2-6], и заканчивая рядом современных публикаций [7-9]. Обычно сначала решается задача на собственные значения, которая сводится к нахождению собственных полей и частот полого резонатора. При этом следует найти решение уравнений Максвелла в объемной области V, ограниченной поверхностью S, которое удовлетворяет соответствующим условиям на границе. На структуру и свойства электромагнитного поля в объемном резонаторе влияют его геометрические размеры, способ возбуждения, а также свойства среды, которой может заполняться резонатор.

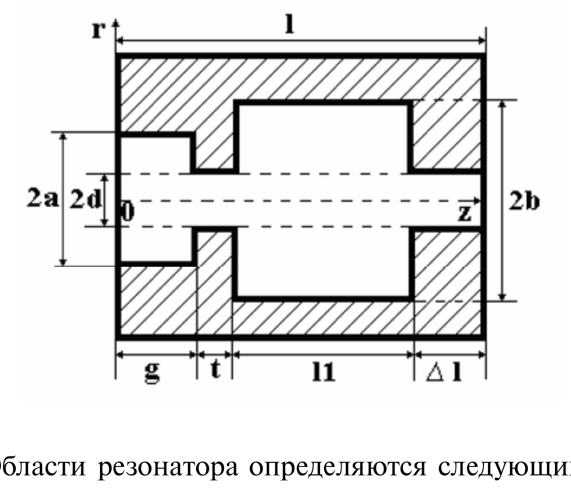
В связи с исследованием электромагнитных характеристик полупроводниковых, магнитных и сверхпроводящих изотропных и анизотропных материалов применяется резонаторный метод измерений. В качестве моделей резонаторов с изменяющейся частотой колебаний используются, в частности, замкнутые цилиндрические резонаторы сложной формы как с коаксиально расположенными элементами [10], так и со свободной приосевой областью.

В [11] рассматривается электродинамическая система типа коаксиальный резонатор с диагностируемым изотропным веществом, размещенным в области укорачивающей емкости. Применительно к данной системе используется модифицированный метод Трефтца. Предложенный вычислительный алгоритм позволил провести анализ влияния элементов конфигурации резонатора и параметров среды на резонансную частоту основного типа и его добротность.

Несмотря на усовершенствование некоторых математических подходов по отношению к расчетам резонаторов сложной структуры, классические методы остаются востребованными [12-16].

2. Постановка и геометрия задачи

Объектом исследования является электромагнитное поле в цилиндрическом резонаторе со сложной формой внутренней ограничивающей поверхности. Это дает возможность сформулировать граничную задачу для уравнений Максвелла, решение которой позволит определить собственные частоты в соответствии с геометрическими параметрами резонатора. Рассматриваемая структура представлена на рисунке.



Области резонатора определяются следующими интервалами изменения координат:

$$(\mathrm{I}):\ 0 \le z \le l,\ \ d \le r \le d\,,$$

$$(\mathrm{II}):\ \ g_1 \le z \le l - \Delta l,\ \ d \le r \le b,\ g_1 = g + t\,,$$

$$(\mathrm{III}):0 \le z \le g,\ d \le r \le a$$

и могут заполняться материалами с различными диэлектрическими константами $\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon' - j\varepsilon'')$. Компоненты электромагнитного поля определяются по формулам

$$E_z^{(m)}(r,z) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi^{(m)}(r,z)\,,\ \ j = \sqrt{-1}\,, \tag{1}$$

$$H_\varphi^{(m)}(r,z) = -\frac{\partial \Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r}, \quad (2)$$

$$E_r^{(m)}(r,z) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial^2 \Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r \partial z}, \quad m = I, II, III. \quad (3)$$

Потенциальные функции $\Pi^{(m)}(r,z)$ являются решениями скалярного однородного уравнения Гельмгольца и для трех областей резонатора определяются следующим образом:

$$\Pi^{(m)}(r,z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i Z_0^I(k_{ri}^I r)\cos(k_{zi}^I z), \text{ область I;} \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} B_i Z_0^{II}(k_{ri}^{II} r)\cos(k_{zi}^{II}(z-g_1)), \text{ область II;} \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i Z_0^{III}(k_{ri}^{III} r)\cos(k_{zi}^{III} z), \text{ область III;} \end{cases} \quad (4)$$

где $k_{zi}^I = \pi i / l$, $k_{zi}^{II} = \pi i / l_1$, $k_{zi}^{III} = \pi i / g$,
$k_{ri}^{(m)} = \sqrt{k^2 - (k_{zi}^{(m)})^2}$.

Цель работы – получить уравнение собственных частот и формулу вычисления добротности цилиндрического резонатора со свободной приосевой областью и двумя независимыми элементами настройки.

3. Метод решения и основное содержание работы

В связи с потребностями практики возникает необходимость исследования все более сложных граничных задач. Учет новых электродинамических и геометрических факторов приводит к усложнению вида уравнений, при этом точные решения удается получить редко. В этих случаях используются приближенные методы, среди которых квазистационарный, метод “возмущений”, метод эквивалентных схем или импедансный, вариационный, метод факторизации [12-17]. Однако для учета геометрии областей на аналитическом уровне применяется метод частичных областей. Он основывается на разделении резонансных объемов на области более простой формы, для которых известны собственные функции, и строгом удовлетворении условий непрерывности поля на поверхности раздела частичных областей.

Для рассматриваемого резонатора необходимо учесть следующие условия: на границе раздела частичных областей электрическое и магнитное поля должны быть непрерывными; касательные составляющие вектора электрического поля должны обращаться в нуль на идеально проводящих стенках резонатора, т.е.

$$E_z^{(I)} = \begin{cases} E_z^{(II)}, \ g_1 \le z \le (l - \Delta l), \\ 0, g \le z \le g_1, (g_1 + l_1) \le z \le l, \\ E_z^{(III)}, 0 \le z \le g, \end{cases} \quad (5)$$

$$H_\varphi^{(I)} = \begin{cases} H_\varphi^{(II)}, \ g_1 \le z \le (l - \Delta l), \\ H_\varphi^{(III)}, 0 \le z \le g. \end{cases} \quad (6)$$

Составляющие E_z и H_φ, определенные формулами (1)-(3), подчиняются граничным условиям (5), (6). В результате получается система функциональных уравнений, откуда следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i, равный нулю определитель которой представляет собой искомое уравнение собственных частот:

$$\det\{x_i^I Z_1^I(x_i^I)[\delta_{ji}(1+\delta_{j0})x_j^I Z_0^I(x_j^I)/(2Z_1^I(x_j^I)) -$$
$$- 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i_2(j,n)i_2(i,n)}{(1+\delta_{n0})l_1}\frac{x_n^{II} Z_0^{II}(x_n^{II})}{Z_1^{II}(x_n^{II})} -$$
$$- 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i_1(j,n)i_1(i,n)}{(1+\delta_{n0})g}\frac{x_n^{III} Z_0^{III}(x_n^{III})}{Z_1^{III}(x_n^{III})}]\} = 0, \quad (7)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $x_j^I = k_{rj}^I d$, $x_j^{II} = k_{rj}^{II} d$, $x_j^{III} = k_{rj}^{III} d$. Функции Z_s^I, Z_s^{II}, Z_s^{III} в соответствующих частичных областях резонатора определяются как:

$$Z_s^I(k_{ri}^I r) = J_s(k_{ri}^I r),$$

$$Z_s^{II}(k_{ri}^{II} r) = J_s(k_{ri}^{II} r)N_s(k_{ri}^{II} b) - J_s(k_{ri}^{II} b)N_s(k_{ri}^{II} r),$$

$$Z_s^{III}(k_{ri}^{III} r) = J_s(k_{ri}^{III} r)N_s(k_{ri}^{III} a) - J_s(k_{ri}^{III} a)N_s(k_{ri}^{III} r),$$

$i, j = 0, 1, 2, \ldots$; $s = 0, 1$. При мнимых значениях k_r, т.е. $k_r^2 < 0$, имеет место $k_r = -jk_r' = -j\sqrt{k_z^2 - k^2}$, тогда Z_s являются модифицированными функциями Бесселя и Неймана:

$$Z_n^I(k_r^I r) = -\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)I_n(k_r'^I r),$$

$$Z_n^{II}(k_r^{II} r) = -\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)[I_n(k_r'^{II} r)K_0(k_r'^{II} b) -$$
$$- (-1)^n I_0(k_r'^{II} b)K_0(k_r'^{II} r)],$$

$$Z_n^{III}(k_r^{III} r) = -\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)[I_n(k_r'^{III} r)K_0(k_r'^{III} a) -$$
$$- (-1)^n I_0(k_r'^{III} a)K_0(k_r'^{III} r)], \ n = 0, 1, 2.$$

Составляющие $i_1(j,n)$ и $i_2(j,n)$ вычисляются как определенные интегралы:

$$i_1(j,i) = \int_0^g \cos(k_{zj}^I z)\cos(k_{zj}^{III} z)dz,$$

$$i_2(j,i) = \int_{g_1}^{l-\Delta l} \cos(k_{zj}^I z)\cos k_{zj}^{II}(z - g_1)dz.$$

4. Выражения для расчета характеристик резонатора

Добротность резонатора определяется формулой:

$$Q = \omega_0 W / P_V,$$

где ω_0 – резонансная частота; W – сумма электрической и магнитной энергий $W = W_e + W_m$; P_V – потери собственных колебаний на частоте ω_0. Электрическая и магнитная энергии согласно [17] вычисляются так:

$$W_e = \frac{\pi A_m^2}{4\varepsilon_0\omega_0^2}\{\frac{1}{\varepsilon_1'}\sum_{i=0}^{\infty} A_i'^2\{(1+\delta_{i0})(k_{ri}^I)^2 \times$$

$$\times[(2/\pi)^2 - (x_i^I)^2(Z_0^{I2}(x_i^I) + Z_1^{I2}(x_i^I))] +$$

$$+(k_{zi}^I)^2[(2/\pi)^2 - (x_i^I)^2(Z_1^{I2}(x_i^I) - Z_0^I(x_i^I)Z_2^I(x_i^I))]\} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_2'}\sum_{i=0}^{\infty} B_i'^2\{(1+\delta_{i0})(k_{ri}^{II})^2 \times$$

$$\times[(x_i^{II})^2(Z_0^{II2}(x_i^{II}) + Z_1^{II2}(x_i^{II})) - (2/\pi)^2] +$$

$$+(k_{zi}^{II})^2[(x_i^{II})^2(Z_1^{II2}(x_i^{II}) - Z_0^{II}(x_i^{II})Z_2^{II}(x_i^{II})) - (2/\pi)^2]\} +$$

$$+\frac{g}{\varepsilon_3'}\sum_{i=0}^{\infty} C_i'^2\{(1+\delta_{i0})(k_{ri}^{III})^2 \times$$

$$\times[(x_i^{III})^2(Z_0^{III2}(x_i^{III}) + Z_1^{III2}(x_i^{III}))] +$$

$$+(k_{zi}^{III})^2[x_i^{III2}(Z_1^{III2}(x_i^{III}) - Z_0^{III}(x_i^{III})Z_2^{III}(x_i^{III}))]\} = \sum_{j=I}^{III}\hat{W}_{ej}, \tag{8}$$

$$W_m = \frac{\pi\mu_0 A_m^2}{4}\{l\sum_{i=0}^{\infty} A_i'^2(1+\delta_{i0}) \times$$

$$\times[(2/\pi)^2 - (x_i^I)^2(Z_1^{I2}(x_i^I) - Z_0^I(x_i^I)Z_2^I(x_i^I))] +$$

$$+l_1\sum_{i=0}^{\infty} B_i'^2(1+\delta_{i0}) \times$$

$$\times[(x_i^{II})^2(Z_1^{II2}(x_i^{II}) - Z_0^{II}(x_i^{II})Z_2^{II}(x_i^{II})) - (2/\pi)^2] +$$

$$+g\sum_{i=0}^{\infty} C_i'^2(1+\delta_{i0}) \times$$

$$\times[(x_i^{III})^2(Z_1^{III2}(x_i^{III}) - Z_0^{III}(x_i^{III})Z_2^{III}(x_i^{III}))]\}. \tag{9}$$

Здесь коэффициент A_m, $m = 0,1,2,...$ – произвольный нормирующий множитель; A_i', B_i', C_i' – нормированные коэффициенты A_i, B_i, C_i, соответственно:

$$B_j' = \frac{2\sum_{i=0}^{\infty} A_i' x_i^I Z_1^I(x_1^I) i_2(i,j)}{(1+\delta_{j0}) l_1 x_j^{II} Z_1^{II}(x_j^{II})}, \; j = 0,1,2,...,$$

$$C_j' = \frac{2\sum_{i=0}^{\infty} A_i' x_i^I Z_1^I(x_1^I) i_1(i,j)}{(1+\delta_{j0}) g x_j^{III} Z_1^{III}(x_j^{III})}, \; j = 0,1,2,... .$$

Потери в резонаторе определяются суммой диэлектрических потерь P_{vd} и потерь на нагревание P_{vs}:

$P_V = P_{vd} + P_{vs}$, где P_{vd} и P_{vs} задаются формулами:

$$P_{vd} = \omega_0 \sum_{j=I}^{III}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)\hat{W}_{ej},$$

здесь $\hat{W}_{ej}$ определены формулой (8),

$$P_{vs} = \pi A_m^2\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_i' A_j'\{R_4 i_3(i,j) x_i^I Z_1^I(x_i^I) x_j^I Z_1^I(x_j^I) +$$

$$+(1-\delta_{ij})[(-1)^{i+j}R_2 + R_5] \times$$

$$\times\frac{(x_i^I)^2 Z_0^I(x_i^I) x_j^I Z_1^I(x_j^I) - x_i^I Z_1^I(x_i^I)(x_j^I)^2 Z_0^I(x_j^I)}{(x_i^I)^2 - (x_j^I)^2} +$$

$$+\delta_{ij}[R_1(1+\delta_{i0})(2/\pi)^2(l_1/2b) + (R_2 + R_5)/2 \times$$

$$\times[(2/\pi)^2 - (x_i^I)^2(Z_1^{I2}(x_i^I) - Z_0^I(x_i^I)Z_2^I(x_i^I))]]\} +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} B_i' B_j'\{(1-\delta_{ij})[(-1)^{i+j}R_2 + R_4] \times$$

$$\times\frac{x_i^{II} Z_1^{II}(x_i^{II}) x_j^{II} Z_0^{II}(x_j^{II}) - (x_i^{II})^2 Z_0^{II}(x_i^{II}) x_j^{II} Z_1^{II}(x_j^{II})}{(x_i^{II})^2 - (x_j^{II})^2} +$$

$$+\delta_{ij}[R_3(1+\delta_{i0})(2/\pi)^2 l_1/2a + (R_2 + R_4)/2 \times$$

$$\times[(x_i^{II})^2(Z_1^{II2}(x_i^{II}) - Z_0^{II}(x_i^{II})Z_2^{II}(x_i^{II})) - (2/\pi)^2]]\} +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i' C_j'\{(1-\delta_{ij})[(-1)^{i+j}R_4 + R_5] \times$$

$$\times[x_i^{III} Z_1^{III}(x_i^{III})(x_j^{III})^2 Z_0^{III}(x_j^{III}) -$$

$$-(x_i^{III})^2 Z_0^{III}(x_i^{III}) x_j^{III} Z_1^{III}(x_j^{III})]/(x_i^{III})^2 - (x_j^{III})^2 +$$

$$+\delta_{ij}\frac{R_4 + R_5}{2}(x_i^{III})^2 \times$$

$$\times(Z_1^{III2}(x_i^{III}) - Z_0^{III}(x_i^{III})Z_2^{III}(x_i^{III}))\}.$$

В выражении для P_{vs} величины R_k, k=1,2,3,4,5 вычисляются по формуле $R_k = \sqrt{\omega_0\mu_0/2\sigma_k}$, где σ_k означает поверхностное сопротивление k-й частичной поверхности.

5. Выводы

1. В строгой постановке решена задача отыскания собственных частот колебаний электрического типа в цилиндрическом резонаторе со свободной приосевой областью и двумя независимыми элементами настройки.

2. Для рассматриваемой структуры получено дисперсионное уравнение, из которого определяются собственные значения. Оно представляет собой равный нулю определитель бесконечной системы. Его порядок зависит от необходимой точности расчетов. На основе [17] можно ожидать, что расчетная частота уже при порядке системы $N \geq 7$ и таком же количестве слагаемых должна хорошо согласовываться с экспериментальной.

3. Выведена формула для определения добротности и резонансного сопротивления структуры. Полученные точные аналитические представления дают возможность произвести необходимые численные расчеты, что представляет перспективу данного исследования. При вычислении добротности учитывается конечная проводимость разных участков поверхности резонатора.

Литература: **1.** *Ukrainian* URSI Committee // Радиофизика и радиоастрономия. 1996. Т.1, №1. С. 125-158. **2.** *Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б.* Коаксиальные резонаторы // Радиотехника и электроника. 1973. Т.18. Вып. 9. С. 1777-1784. **3.** *Гапонов А.В.* К теории тонких антенн в полых резонаторах // ЖТФ. 1955. Т. 25. Вып. 6. С. 1069-1084. **4.** *Гапонов А.В.* Возбуждение полых резонаторов тонкими антеннами // ЖТФ. 1955. Т. 25. Вып. 6. С. 1085-1099. 5. *Капица П.Л.* Свободный плазменный шнур в высокочастотном поле при высоком давлении // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. Вып. 6. С. 1801-1866. **6.** *Капица П.Л., Филимонов С.И.* Установка для получения свободного плазменного шнура. Определение тока и сопротивления шнура // ЖЭТФ. 1971. Т. 62. Вып. 3(9). С. 1016-1037. **7.** *Кириленко А.А., Масалов С.А., Шестопалов В.П., Шинкаренко В.Ф.* Исследование спектра собственных частот магнитных типов колебаний в цилиндрическом резонаторе с коаксиальным кольцевым выступом. Харьков: Институт радиофизики и электроники АН УССР. Препринт №37. 1974. 53с. **8.** *Pournaropoulos C.L., Misra D.K.* The coaxial aperture electromagnetic sensor ant its application in material characterization. Means. Sci. Technol. 8(1997). P. 1191-1202. **9.** *Xu Y. and Basisio R.G.* Nondestructive measurements of the resistivity of thin conductive films and the dielectric constant of thin substrates using an open-end coaxial line. IEE Proc. H 139, 1992. P.500-506. **10.** *Третьяков О.А., Чумаченко С.В.* Построение модового базиса для резонатора сложной формы // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 1. С. 12-18. **11.** *Слипченко Н.И., Костычев Ю.Г., Золотарев В.А.* Оценка эффективности метода Трефтца при анализе электродинамических систем для СВЧ диагностики полупроводников и диэлектриков // Радиоэлектроника и информатика. 2001. № 1. С. 20-24. **12.** *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 320с. **13.** *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544с. **14.** *Орлов С.И.* Расчет и конструирование коаксиальных резонаторов. М.: Сов. радио, 1970. 254 с. **15.** *Основы* теории колебаний / В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н.Парыгин / Под ред. В.В. Мигулина. М.: Наука, 1978. 392с.**16.** *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с. **17.** *Kuhn E.* Untersuchung eines kapazitiv belasteten koaxialen Hohlraumresonators//Archiv Der Elektrischen Ubertragung (A.E.U.). 1968. Band 22. №12. S.557–566.

Поступила в редколлегию 24.12.2004

Рецензент: д-р физ.-мат наук, проф. Чурюмов Г.И.

Слипченко Николай Иванович, канд. техн. наук, профессор, проректор по научной работе ХНУРЭ. Научные интересы: радиофизика и электроника. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 702-10-20.