

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВОПРОСУ О МИНИМИЗАЦИИ СОСТОЯНИЙ АВТОМАТА $A_k(I)$

А. П. Стахов, Н. В. Алипов

Харьков

В предыдущей нашей статье был описан метод структурного синтеза деревообразных автоматов, суть которого состоит в представлении деревообразного автомата некоторой системой более «простых» автоматов. В указанной работе не ставилась задача построения автоматов системы с минимальным количеством состояний. Настоящая статья посвящена разработке методов минимизации состояний автомата $A_k(I)$.

Минимизацией количества состояний автомата $A_k(I)$ назовем отождествление двух или более символов входного алфавита деревообразного автомата (ДА) с одним состоянием автомата $A_k(I)$ при условии, что не нарушается взаимно-однозначное соответствие между множеством входных слов ДА и множеством весовых функций, построенных согласно (3)*.

Два или более символов входного алфавита считаем непротиворечивыми, если они никогда не вызывают переходов деревообразного автомата из одного и того же состояния. Очевидно, что два или более непротиворечивых символов входного алфавита можно отождествлять с одним состоянием автомата $A_k(I)$.

Два или более символов входного алфавита, вызывающих переходы деревообразного автомата из одного и того же состояния, примем противоречивыми. Легко показать, что противоречивые символы входного алфавита нельзя отождествлять с одним и тем же состоянием автомата $A_k(I)$, поскольку нарушается взаимно-однозначное соответствие между множеством входных слов ДА и множеством весовых функций, построенных согласно (3) указанной работы.

Прежде чем приступить к разработке алгоритма минимизации, необходимо определить то возможное количество состояний, которое должен иметь тупиковый автомат $A_k(I)$. Тупиковым будем называть такой автомат $A_k(I)$, поставленный в соответствие ДА, у которого при отождествлении хотя бы двух символов входного алфавита ДА с одним состоянием автомата $A_k(I)$ нарушается однозначное соответствие между множеством входных слов ДА и множеством весовых функций, построенных согласно (3) упомянутой выше работы.

Показана истинность следующего утверждения.

1. Количество состояний тупикового автомата $A_k(I)$ будет не меньше, чем максимальное количество стрелок, выходящих из одной вершины графа, задающего деревообразный автомат.

Непосредственно из графа трудно определить противоречивость (непротиворечивость) символов входного алфавита, поэтому с целью наглядного изображения противоречивости (непротиворечивости) входных

* См. статью «Метод структурного синтеза деревообразных автоматов» в настоящем выпуске.

символов построим таблицу противоречивости. Она имеет k столбцов и k строк; i -я строка и i -й столбец таблицы отождествлены с символом x_i . Элементами ее являются символы «0» и «1»; «0» ставится на пересечении столбца и строки, которым поставлены в соответствие непротиворечивые символы, «1» — на пересечении столбца и строки, которым поставлены в соответствие противоречивые символы.

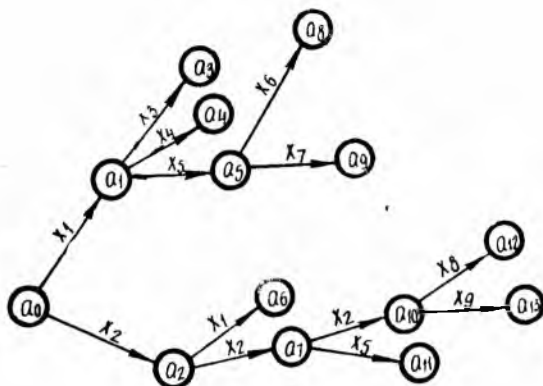


Рис. 1.

Пример. Пусть деревообразный автомат задан графом (см. рисунок). Тогда противоречивость символов входного алфавита задается табл. 1.

Таблица 1

Входные символы	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	1	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0
x_5	0	1	1	1	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_9	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Над таблицей противоречивости зададим операции: логическое соединение строк, столбцов; вычеркивание строки-столбца.

Операцию логического соединения строки столбцов определим следующим образом:

пусть i -я, j -я строки (столбцы) имеют вид

$$a_{1i} \ a_{2i} \ \dots \ a_{qi} \ \dots \ a_{ki},$$

$$a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{qj} \ \dots \ a_{kj}.$$

Тогда в результате операции логического соединения получим строку (столбец)

$$(a_{1i} \vee a_{1j})(a_{2i} \vee a_{2j}) \dots (a_{qi} \vee a_{qj}) \dots (a_{ki} \vee a_{kj}),$$

где a_{qi} — q -й элемент i -й строки (столбца) таблицы;

a_{qj} — q -й элемент j -й строки (столбца) таблицы;

$$q = 1, 2, \dots, k;$$

$$i, j = 1, 2, \dots, k;$$

$$a_{qi}, a_{qj} \in \{0, 1\}.$$

Символ $\vee$ есть знак дизъюнкции. Суть операции вычеркивания состоит в вычеркивании j -го столбца j -й строки, если элементами j -й строки и j -го столбца являются символы «1», за исключением элемента a_{ji} ($i = 1, 2, \dots, k$).

В результате операции вычеркивания строки-столбца получаем из таблицы порядка k таблицу порядка $k-1$, в результате применения операции логического соединения строк (столбцов) к i -м, j -м строкам и i -м, j -м столбцам получаем строку (столбец), который (которому) соответствует символ $(x_i \vee x_j)$.

Вновь организованный символ $(x_i \vee x_j)$ противоречит и тем символам входного алфавита, которым противоречит символ x_i , и тем символам входного алфавита, которым противоречит символ x_j . Символ $(x_i \vee x_j)$ назовем объединенным.

Относительно таблицы противоречивости сформулируем ряд утверждений.

II. Таблица противоречивости состоит из символов «0». Тогда все символы входного алфавита следует отождествить с одним и тем же состоянием автомата $A_k(I)$.

III. Таблица противоречивости состоит из символов «1», за исключением элементов матрицы a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, k$). При этом следует каждому символу входного алфавита взаимно-однозначно поставить в соответствие состояние автомата $A_k(I)$.

IV. К i -й строке и i -му столбцу таблицы противоречивости применена операция вычеркивания. В этом случае нужно символу x_i взаимно-однозначно поставить в соответствие состояние автомата $A_k(I)$.

Утверждения I, II, III, IV дают возможность сформулировать алгоритм минимизации состояний автомата $A_k(I)$.

1. Построить таблицу противоречивости, перейти на 2.

2. Проанализировать, удовлетворяет ли таблица противоречивости утверждениям II или III. Если удовлетворяет, то перейти на 10, иначе 3.

3. Выяснить, возможно ли к i -й строке и i -му столбцу применить операцию вычеркивания строки-столбца. Если возможно, то 4, иначе 5.

4. Применить к i -й строке и i -му столбцу таблицы противоречивости операцию вычеркивания строки-столбца, построить из таблицы порядка m таблицу порядка $m-1$, перейти на 5.

5. Выбрать j -ю строку таблицы противоречивости, содержащую наибольшее количество символов «0», перейти на 6.

6. Произвести логическое соединение j -й строки таблицы со строками, которым поставлены в соответствие символы входного алфавита, непротиворечивые с символом x_j , перейти на 7.

7. Произвести логическое соединение j -го столбца таблицы со столбцами, которым поставлены в соответствие символы входного алфавита, непротиворечивые с x_j , перейти на 8.

8. Из всех результатов операции логического соединения строк (столбцов) выбрать тот, который содержит максимальное количество символов «0», перейти на 9.

9. Из таблицы порядка n построить таблицу порядка $n-1$ введением вместо символов в x_j и x_i объединенного символа $(x_j \vee x_i)$, перейти на 2.

10. Подсчитать количество (p_1) состояний автомата $A_k(I)$, полученных в результате применения описанного алгоритма, и сравнить его с

количеством (ρ_2) состояний тупикового автомата $A_k(I)$. Если $\rho_1 = \rho_2$, то остановить алгоритм, иначе 2.

Показана истинность утверждения:

V. Количество состояний автомата $A_k(I)$, полученное в результате применения алгоритма минимизации, равно:

$$\rho_1 = N + m, \text{ если истинно III,} \quad (1)$$

$$\rho_1 = N + 1, \text{ если истинно II,} \quad (2)$$

где N — количество операции вычеркивания;

m — порядок таблицы, полученный в результате работы последнего цикла алгоритма.

Пример. Пусть требуется минимизировать количество состояний автомата $A_k(I)$, поставленного в соответствие деревообразному автомату, заданного графом (см. рисунок).

Для минимизации количества состояний автомата $A_k(I)$ применим описанный алгоритм.

1. Построим табл. 1, перейдем на 2.

2. Так как табл. 1 не удовлетворяет утверждениям II, III, перейдем на 3.

3. Поскольку ни к одной строке-столбцу нельзя применить операцию вычеркивания, перейдем к 5.

5. Максимальное количество символов «0» содержат строки 1, 6, 7,

8, 9. Возьмем первую строку, перейдем на 6.

6. Произведем логическое соединение строк 1,3; 1,4; 1,5; 1,7; 1,8; 1,9; перейдем на 7.

7. Выполним логическое соединение столбцов 1,3; 1,4; 1,5 1,6; 1,7; 1,8 1,9; перейдем на 8.

8. Из всех результатов операции логического соединения строк (столбцов) выберем результат, содержащий максимальное количество символов «0» (результат операции логического соединения 1-й и 4-й строки, результат операции логического соединения 1-го и 4-го столбца), перейдем на 9.

9. Из табл. 1 порядка 9 образуем табл. 2 порядка 8, перейдем на 2.

Т а б л и ц а 2

Входные символы	$x_1 \vee x_4$	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$x_1 \vee x_4$	0	1	1	1	0	0	0	0
x_2	1	0	0	1	0	0	0	0
x_3	1	0	0	1	0	0	0	0
x_5	1	1	1	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0
x_7	0	0	0	0	1	0	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0	0	1
x_9	0	0	0	0	0	0	1	0

В дальнейшем, не расписывая алгоритм по пунктам, будем записывать только конечный результат одного цикла работы алгоритма.

Так как табл. 2 не удовлетворяет утверждениям II, III, а к строкам и столбцам таблицы нельзя применить операцию вычеркивания строк-столбцов, то, применяя операцию логического соединения строк (столбцов), составим табл. 3.

Таблица 3

Входные символы	$x_1 \vee x_4$	x_2	x_3	x_5	$x_6 \vee x_8$	x_7	x_9
$x_1 \vee x_4$	0	1	1	1	0	0	0
x_2	1	0	0	1	0	0	0
x_3	1	0	0	1	0	0	0
x_5	1	1	1	0	0	0	0
$x_6 \vee x_8$	0	0	0	0	0	1	1
x_7	0	0	0	0	1	0	0
x_9	0	0	0	0	1	0	0

Аналогично можно получить табл. 4.

Таблица 4

Входные символы	$x_1 \vee x_4$	$x_2 \vee x_6 \vee x_8$	$x_3 \vee x_7 \vee x_9$	x_5
$x_1 \vee x_4$	0	1	1	1
$x_2 \vee x_6 \vee x_8$	1	0	1	1
$x_3 \vee x_7 \vee x_9$	1	1	0	0
x_5	1	1	0	0

Применив к табл. 4 дважды операцию вычеркивания (к 1-й строке и 1-му столбцу; 2-й строке и 2-му столбцу), составим табл. 5.

Таблица 5

Входные символы	$x_3 \vee x_4 \vee x_9$	x_5
$x_3 \vee x_4 \vee x_9$	0	0
x_5	0	0

Табл. 5 удовлетворяет утверждению II. Значит, перейдем на 10.
10. Определим количество состояний автомата $A_k(I)$ согласно (2).

$$\rho_1 = N + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Поскольку $\rho_2 = 3$, то следует остановить алгоритм, а символы x_1 и x_4 отождествить с одним состоянием автомата $A_k(I)$, символы x_2 , x_6 и x_8 — с другим состоянием автомата $A_k(I)$, символы x_3 , x_5 , x_7 , x_9 — с третьим состоянием автомата $A_k(I)$.