

В. И. АНТЮФЕЕВ, канд. техн. наук,
А. С. СУЛТАНОВ, канд. техн. наук, *В. А. КУЛАКОВ*

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА АНТЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ МОДУЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ ПРИ НЕСТАБИЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ УСИЛЕНИЯ РАДИОМЕТРА

Нестабильность коэффициента усиления линейного тракта является основной причиной ухудшения чувствительности реального радиометра в отличие от идеального компенсационного [1]. На практике применяются различные схемотехнические методы [1; 2] уменьшения степени влияния флюктуаций коэффициента усиления на чувствительность радиометра. Наибольшее распространение в классе одноканальных радиометров получил модуляционный метод [1; 2], основанный на попеременном подключении (одинаковой продолжительности) входа приемника к источникам полезного сигнала и эталонного шума с последующей синхронной обработкой выходного сигнала квадратичного детектора. Переключение неизбежно ухудшает теоретическую чувствительность радиометра в отличие чувствительности идеальной компенсационной схемы [1; 2]. Следовательно, в общем случае в зависимости от величины флюктуаций коэффициента усиления и параметров элементов схемы реальная чувствительность классического модуляционного радиометра может быть как лучше, так и хуже реальной чувствительности компенсационного радиометра.

В этой связи определенный теоретический и практический интерес представляет задача об отыскании оптимального схемного построения радиометра, обладающего максимальной в классе модуляционных приемников при заданных условиях чувствительностью.

Оптимальную структуру радиометра найдем путем синтеза по методу максимума апостериорной плотности вероятности.

Представим радиометр состоящим из синтезируемой части, структуру которой необходимо найти в результате решения задачи синтеза, и заданной, состоящей из антенного входа, модулятора и усилителя высокой частоты (УВЧ). Напряжение на входе приемника запишем в виде

$$\tilde{u}(t) = \sqrt{1 + \Delta G/G} [\sqrt{m(t)} \tilde{u}_c(t) + \tilde{u}_ш(t)], \quad t \in [0, \tau], \quad (1)$$

где $m(t)$ — модулирующая функция; $\tilde{u}_c(t)$, $\tilde{u}_ш(t)$ — напряжения полезного сигнала и шума; $\Delta G/G$ — относительные флюктуации коэффициента усиления приемника; τ — время интегрирования радиометра.

На основании общепринятых предположений [1], процессы $\tilde{u}_c(t)$, $\tilde{u}_ш(t)$ считаем стационарными случайными процессами ти-

на ограниченного по полосе гауссовского белого шума с параметрами $\bar{u}_c(t) = \bar{u}_ш(t) = 0$; $\bar{u}_c^2(t) = kT_A \Delta f$; $\bar{u}_ш^2(t) = kT_ш \Delta f$, где k — постоянная Больцмана; Δf , $T_ш$ — полоса пропускания и шумовая температура заданной части радиометра; T_A — антенная температура; $\bar{f}(t)$ — оператор статистического усреднения случайной функции $f(t)$. Ограничимся наиболее характерным для практической радиометрии случаем малых отношений сигнал-шум на входе ($T_A \ll T_ш$), что позволяет в формуле (1) не учитывать модулирующее воздействие флуктуаций коэффициента усиления на полезный сигнал. Учитывая это обстоятельство, после перехода к нормированным напряжениям в выражении (1) получим

$$u(t) = \sqrt{m(t)T_A} u_c(t) + \sqrt{T_ш + \Delta T} u_ш(t), \quad (2)$$

где

$$u(t) = \tilde{u}(t)/\sqrt{k\Delta f}; \quad u_c(t) = \tilde{u}_c(t)/\sqrt{kT_A \Delta f}; \quad u_ш(t) = \tilde{u}_ш(t)/\sqrt{kT_ш \Delta f}; \quad \Delta T = T_ш \Delta G/G.$$

Предположим, что время интегрирования τ настолько мало, что при каждом единичном измерении параметры T_A , ΔT сигнала (2) остаются постоянными, но значения параметра ΔT являются случайными от измерения к измерению и распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Для радиометров, входящих в состав радиотеплолокаторов, эти допущения всегда выполняются [2].

Задача синтеза оптимального радиометра, обеспечивающего максимум апостериорной плотности вероятности, формулируется следующим образом. Требуется найти оценку параметра T_A сигнала $\sqrt{m(t)T_A} u_c(t)$, наблюдаемого в смеси с шумом $\sqrt{T_ш + \Delta T} u_ш(t)$, при наличии мешающего параметра ΔT с гауссовским распределением вероятностей, а также построить оптимальную структуру радиометра и оценить его потенциальную чувствительность.

В соответствии с методом максимума апостериорной вероятности [3] оценка T_A должна осуществляться совместно с оценкой ΔT . Разобьем интервал $[0, \tau]$ на $n = 2\Delta f \tau$ дискретов, отстоящих друг от друга на интервал Котельникова $\Delta t = (2\Delta f)^{-1}$ и являющихся статистически независимыми. Построим многомерную плотность вероятности отсчетов сигнала (2), взятых в моменты времени $t_i (t_{i+1} - t_i = \Delta t, i = \overline{1, n})$, которая в силу сделанных предположений нормальная с дисперсией $\sigma_u^2(t_i) = m(t_i)T_A + T_ш + \Delta T$

$$w_n(u) = \left[2\pi \prod_{i=1}^n \sigma_u^2(t_i) \right]^{-n/2} \exp[-u^2(t_i)/2\sigma_u^2(t_i)], \quad (3)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_i = u(t_i)$. Плотность вероятности (3), рассматриваемая как функция параметров T_A , ΔT , по известному определению является функцией правдоподобия и обозначается

$w(u/T_A, \Delta T)$ [3]. Тогда плотность апостериорной вероятности параметров $T_A, \Delta T$

$$w(T_A, \Delta T|u) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Delta T^2}{2\sigma^2}\right) \left[2\pi \prod_{i=1}^n \sigma_u^2(t_i)\right] \exp\left[-\frac{u^2(t_i)}{2\sigma_u^2(t_i)}\right].$$

Учитывая, что для произвольной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы Котельникова, справедлива цепочка равенств

$$\sum_{i=1}^n \varphi(t_i) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n \varphi(t_i) \Delta t = 2\Delta f \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \varphi(t) dt = 2\Delta f \int_0^{\tau} \varphi(t) dt,$$

для логарифма апостериорной плотности вероятности получим соотношение

$$w(T_A, \Delta T|u) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\Delta T^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \Delta f \int_0^{\tau} \left\{ \ln[m(t)T_A + T_{ш} + \Delta T] + \frac{u^2(t)}{m(t)T_A + T_{ш} + \Delta T} \right\} dt. \quad (4)$$

Оценка потенциальной чувствительности. Используя выражение (4), найдем элементы информационной матрицы Фишера [3]

$$\begin{aligned} -\left\langle \frac{\partial^2 \ln w}{\partial T_A^2} \right\rangle &= \Delta f \int_0^{\tau} \frac{m^2(t) dt}{[m(t)\hat{T}_A + T_{ш} + \Delta\hat{T}]^2}; & -\left\langle \frac{\partial^2 \ln w}{\partial T_A \partial \Delta T} \right\rangle &= \\ &= \Delta f \int_0^{\tau} \frac{m(t)}{[m(t)\hat{T}_A + T_{ш} + \Delta\hat{T}]^2}; & -\left\langle \frac{\partial^2 \ln w}{\partial (\Delta T)^2} \right\rangle &= \\ &= \frac{1}{\sigma^2} + \Delta f \int_0^{\tau} \frac{dt}{[m(t)\hat{T}_A + T_{ш} + \Delta\hat{T}]^2}, \end{aligned}$$

где $\hat{T}_A, \Delta\hat{T}$ — оценки параметров $T_A, \Delta T$. Ограничимся важным для практической радиометрии случаем малых флуктуаций коэффициента усиления ($\Delta T \ll T_{ш}$). Тогда матрица Фишера принимает вид

$$F = \frac{\Delta f \tau}{T_{ш}^2} \begin{bmatrix} \langle m^2 \rangle & \langle m \rangle \\ \langle m \rangle & Q^{-1} \end{bmatrix}; \quad Q = \left(1 + \frac{T_{ш}^2}{\sigma^2 \Delta f \tau}\right)^{-1};$$

$$\langle m \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} m(t) dt; \quad \langle m^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} m^2(t) dt.$$

Диагональные элементы обратной матрицы равны дисперсиям оценок параметров $T_A, \Delta T$ [3]. В результате вычислений получим

следующее выражение для дисперсии оценки антенной температуры:

$$D_{T_A} = \frac{(\delta T_K)^2}{\langle m^2 \rangle - Q \langle m \rangle^2}. \quad (5)$$

Здесь δT_K — предельная чувствительность идеального компенсационного радиометра, $\delta T_K = T_{\text{ш}} (\Delta f \tau)^{-1/2}$.

Наложим на модулирующую функцию условие $0 \leq m(t) \leq 1$ (6)

и найдем такую функцию $\hat{m}(t)$, которая доставляет минимум дисперсии (5), для чего достаточно минимизировать функционал $F(m) = Q \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2$ (7) при ограничении вида (6). Задачу целесообразно решать в пространстве $L^2(0, \tau)$ интегрируемых с квадратом на интервале $[0, \tau]$ функций.

Введем в $L^2(0, \tau)$ конус положительных элементов [4] $C = \{m \in L^2(0, \tau) | m(t) \geq 0\}$, задающий на $L^2(0, \tau)$ отношение порядка, обозначаемое \leq , по правилу $m \leq n \leftrightarrow n - m \in C$. Тогда ограничение (6) можно представить в виде $h(m) \leq 0$ (8). Здесь $h: L^2(0, \tau) \rightarrow L^2(0, \tau)$, $h(m) = m(1 - m)$. Функцию (7) запишем следующим образом: $F(m) = (m, 1)^2 Q / \tau^2 - (m, m) / \tau$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L^2(0, \tau)$. Можно показать, что функции F, h удовлетворяют условиям бесконечномерного обобщения теоремы

Куна—Таккера [4], которая утверждает, что элемент $\hat{m} \in L^2(0, \tau)$ доставляет минимум функции F при ограничении (8) только в случае, когда существует элемент $\hat{p} \in L^2(0, \tau)$, $\hat{p} \leq 0$, такой, что (\hat{m}, \hat{p}) — седловая точка лагранжиана $L(m, p) = F(m) - (p, h(m))$, т. е. $L(\hat{m}, p) \leq L(\hat{m}, \hat{p}) \leq L(m, \hat{p})$. При этом должно выполняться условие дополнительной нежесткости $(\hat{p}, h(\hat{m})) = 0$ (9). Можно показать [5], что для экстремального элемента $\hat{m} \in L^2(0, \tau)$ дифференциал Гато функции F в точке \hat{m} по любому направлению $n \in L^2(0, \tau)$ должен обращаться в нуль, т. е. $DL(\hat{m}, \hat{p}; n) = ((m, 1) \cdot 1, n) Q / \tau^2 - (\hat{m}, n) / \tau - (\hat{p}(\hat{m} - 1/2), n) = 0 \quad \forall n \in L^2(0, \tau)$, откуда следует уравнение

$$\frac{Q}{\tau^2} \int_0^{\tau} \hat{m}(\xi) d\xi - \frac{\hat{m}(t)}{\tau} - \{\hat{m}(t) - 1/2\} \hat{p}(t) = 0. \quad (10)$$

Запишем подробнее условие (9): $\int_0^{\tau} \hat{p}(t) [\hat{m}(t) - 1] \hat{m}(t) dt = 0$. Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, то $\hat{p}(t) \times [\hat{m}(t) - 1] \hat{m}(t) = 0$ (11). Обозначим $S = \{t \in [0, \tau] | 0 < \hat{m}(t) < 1\}$.

Тогда согласно (11) $\hat{p}(t) = 0$ для $t \in S$; $\hat{p}(t) \leq 0$ при $t \in [0, \tau]/S$. Для $t \in S$ уравнение (10) принимает вид $\frac{Q}{\tau} \int_0^{\tau} \hat{m}(\xi) d\xi = \hat{m}(t)$. Следовательно, $\hat{m}(t) = 0$ при $t \in S$, т. е. множество значений оптимальной модулирующей функции равно $\{0, 1\}$.

Таким образом, использующиеся на практике «прямоугольные» модулирующие функции

$$\hat{m}(t) = \begin{cases} 1, & i\theta \leq t \leq i\theta + \eta; \\ 0, & i\theta + \eta \leq t < (i+1)\theta, \end{cases} \quad i = \overline{0, N-1}, \quad N = \tau/\theta, \quad (12)$$

являются оптимальными. Для такой функции выражение (5) принимает вид $D_{T_A} = (\delta T_K)^2 / (\eta - Q\eta^2)$ и достигает минимума при

$$\eta_{\text{опт}} = \begin{cases} 1, & 0 \leq Q \leq 1/2; \\ 0, & 1/2 < Q \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Предельную чувствительность $\delta T = \sqrt{D_{T_A \text{ мин}}}$ определим из соотношения

$$\delta T = \delta T_K \begin{cases} (1-Q)^{-1/2}, & 0 \leq Q \leq 1/2; \\ 2\sqrt{Q}, & 1/2 < Q \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

График функции $\frac{\delta T}{\delta T_K}(Q)$ представлен на рис. 1.

Синтез оптимальной структуры. Оптимальную в смысле максимума апостериорной плотности вероятности структуру опишем системой уравнений [3]

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \ln \omega}{\partial T_A} \right|_{T_A = \hat{T}_A, \Delta T = \hat{\Delta T}} = 0; \\ \left. \frac{\partial \ln \omega}{\partial \Delta T} \right|_{T_A = \hat{T}_A, \Delta T = \hat{\Delta T}} = 0, \end{cases}$$

которая имеет вид

$$\int_0^{\tau} \left[\frac{m(t)}{m(t)\hat{T}_A + T_{\text{ш}} + \Delta \hat{T}} \left(1 - \frac{u^2(t)}{m(t)\hat{T}_A + T_{\text{ш}} + \Delta \hat{T}} \right) \right] dt = 0;$$

$$\frac{\Delta \hat{T}}{\sigma^2} + \int_0^{\tau} \left[\frac{1}{m(t)\hat{T}_A + T_{\text{ш}} + \Delta \hat{T}} \left(1 - \frac{u^2(t)}{m(t)\hat{T}_A + T_{\text{ш}} + \Delta \hat{T}} \right) \right] dt = 0,$$

а ее решение

$$\hat{T}_A = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \{K_1 m(t) u^2(t) - K_2 [1 - m(t)] u^2(t) - T_{ш}'\} dt, \quad \hat{T}_A, \Delta \hat{T} \ll T_{ш}, \quad (15)$$

где

$$K_1 = \frac{1 - Q \langle m \rangle}{\langle m^2 \rangle - Q \langle m \rangle^2}; \quad K_2 = \frac{Q \langle m \rangle}{\langle m^2 \rangle - Q \langle m \rangle^2};$$

$$T_{ш}' = \frac{\langle m \rangle (1 - Q) T_{ш}}{\langle m^2 \rangle - Q \langle m \rangle^2}.$$

Структура радиометра, синтезированная в соответствии с соотношением (15), представлена на рис. 2. Здесь 1 — антенный

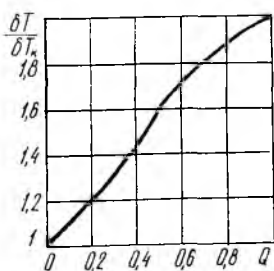


Рис. 1

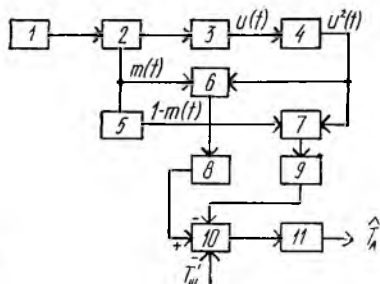


Рис. 2

вход; 2 — модулятор; 3 — УВЧ; 4 — квадратичный детектор; 5 — генератор опорных напряжений; 6, 7 — умножители; 8, 9 — усилители с коэффициентами передачи K_1 , K_2 соответственно; 10 — сумматор; 11 — интегратор. Для оптимальной модулирующей функции вида (5) с параметром $\eta = \eta_{\text{опт}}$, определяемым формулой (13), имеем

$$K_1 = 1; \quad K_2 = Q/(1 - Q); \quad T_{ш}' = T_{ш}; \quad m(t) \equiv 1, \quad 0 \leq Q \leq 1/2;$$

$$K_1 = K_2 = 2Q; \quad T_{ш}' = 2T_{ш}(1 - Q), \quad 1/2 < Q \leq 1.$$

При возрастании дисперсии флуктуаций коэффициента усиления σ^2 от 0 до $(\sigma T_k)^2$, $Q \in [0, 1/2]$, чувствительность радиометра изменяется от σT_k до $\sqrt{2} \sigma T_k$ (рис. 1), модуляция отсутствует ($m(t) \equiv 1$), в работе участвует верхний по схеме канал, и структура приемника соответствует структуре компенсационного радиометра.

Если $\sigma^2 > (\sigma T_k)^2$, то $Q \in (1/2, 1)$, чувствительность радиометра лежит в пределах $(\sqrt{2} - 2) \sigma T_k$ (рис. 1), а структура соответствует схеме модуляционного приемника с несимметричной в общем случае модулирующей функцией.

В случае отсутствия априорных сведений о распределении флуктуаций коэффициента усиления ($\sigma^2 \rightarrow \infty$, $Q \rightarrow 1$) имеем $T_{ш}' =$

$=0$, $\eta_{\text{опт}}=1/2$, т. е. оптимальной является модулирующая функция типа «меандр», а синтезированная структура полностью соответствует схеме классического модуляционного радиометра.

Таким образом, в результате решения задачи синтеза оптимальной в смысле максимума апостериорной плотности вероятности структуры показано, что оптимальный радиометр по структуре и чувствительности в зависимости от соотношения между дисперсией флюктуаций коэффициента усиления и параметрами приемника $T_{\text{ш}}$, Δf , τ занимает промежуточное положение между идеальной компенсационной (при $\sigma=0$) и классической модуляционной (при $\sigma \rightarrow \infty$) схемами и в предельных случаях сводится к последним.

В промежуточных случаях для $0 < \sigma \leq T_{\text{ш}}(\Delta f\tau)^{-1/2}$ целесообразно построение радиометра по компенсационной схеме, а при $\sigma > T_{\text{ш}}(\Delta f\tau)^{-1/2}$ — по модуляционной.

Классический модуляционный радиометр с модулирующей функцией типа «меандр» является оптимальным при отсутствии априорных сведений о распределении флюктуаций коэффициента усиления (при $\sigma \rightarrow \infty$), т. е. по критерию максимума правдоподобия.

Список литературы: 1. Башаринов А. Е., Гурвич А. С., Егоров С. Т. Радиополучение Земли как планеты. — М.: Наука, 1974. — 188 с. 2. Есепкина Н. А., Корольков Д. В., Парийский Ю. Н. // Радиотелескопы и радиометры. М., 1973. — С. 300—325. 3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с. 4. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979. — 400 с. 5. Sakawa Y. Optimal control of certain type of linear distributed-parameter systems // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1966. — 11, № 1. — P. 35—45.

Поступила в редколлегию 20.03.86

УДК 621.391

В. Н. БОНДАРЕНКО, В. А. МИСЮРА, д-р техн. наук,
В. Н. ФЕДОРЕНКО, А. М. ЦЫМБАЛ, канд. физ.-мат. наук

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРЦАНИИ РАДИОСИГНАЛОВ УКВ-ДИАПАЗОНА НА ВЫСОКИХ ШИРОТАХ

Неоднородности электронной концентрации вызывают мерцания радиосигналов, проходящих через ионосферу. Особенно интенсивны мерцания на экваториальных и высоких широтах. Для обеспечения качественной и надежной работы различных радиосистем в таких условиях необходимо знать статистические характеристики мерцаний. Таковыми, в частности, являются функции распределения, интервалы временной и пространственной корреляции амплитуды и фазы, длительность замираний.

Представим результаты измерений этих характеристик на высоких широтах по регистрациям сигналов искусственных спутников Земли (ИСЗ) типа «Транзит» на частоте 150 МГц. Измерения проводились в 1975—1984 гг. Полученные данные относятся в основном к магнитоспокойным условиям. В большинстве случаев (около 70 %) во все сезоны мерцания наблюдались ночью, в период 21.00—05.00 по местному времени. Значительно реже они регистрировались вечером (20 %) и утром (10 %). Практически не было мерцаний с индексами $S_4 > 0,1$ в дневное время.