Н. Г. САРНАВСКИЙ, канд. техн. наук

РАСПОЗНАВАНИЕ ПРЕДИКАТА УПОРЯДОЧЕНИЯ КАК ФУНКЦИИ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Пусть E — упорядоченное множество. Тогда на E естественным образом определена функция двух аргументов $D(x,y)$, принимающая три значения:

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x < y, \\ 2, & \text{если } x > y. \end{cases} \tag{1}$$

Введем для чисел 0, 1, 2 упорядочение: $0 < 1 < 2$ и будем также рассматривать для них операции по mod 3. Функция $D(x, y)$ очевидным образом удовлетворяет следующим свойствам: 1) если $D(x,y) = a$, то $D(y,x) = b$, где $a + b \equiv 0 \pmod 3$; 2) если $D(x,y) = a$, где $a = 0,1$, то $x \leqslant y$; если $D(y,z) = b$, где $b = 0,1$, то $y \leqslant z$; если $D(x, z) = c$, где $c = \max\{a, b\}$, то $x \leqslant z$. Изучим функции $T(x,y)$, представимые в виде $T(x,y) = D(f(x), f(y))$ (2). Здесь $f: E \to L$ отображение E на упорядоченное множество L.

Из свойств 1, 2 функции $D(x, y)$ сразу вытекают следующие свойства функции $T(x,y)$, представимой в виде (2): 1′) если $T(x,y) = a$, то $T(y, x) = b$, где $a + b \equiv 0 \{\mathrm{mod}\ 3\}$; 2′) если $T(x,y) = a$ ($a = 0,1$), $T(y, z) = b$ ($b = 0, 1$), то $T(x, z) = c$, где $c = \max(a, b)$.

Из 1′ получаем, что $T(x, x) = 0$; из $T(x, y) = 0$ следует $T(y, x) = 0$ (3), а из 2′ — $T(x, y) = 0$, $T(y, z) = 0 \to T(x, z) = 0$ (4).

Покажем, что условия 1′, 2′ не только необходимы, но и достаточны для представимости функции $T(x, y)$ на $E \times E$, принимающей значения 0, 1, 2 в виде (2). Пусть $T(x, y)$ удовлетворяет условиям 1′, 2′. Определим на E отношение: $x \sim y$, если $T(x, y) = 0$. Тогда в силу (3) отношение $\sim$ симметрично и рефлексивно, а из (4) вытекает транзитивность этого отношения. Следовательно, имеет место разбиение $E = \cup E_i$ $E_i \cap E_j = \wedge$ $(i \neq j)$ (5) множества E на классы E_i эквивалентных между собой элементов.

Определим следующие отношения на множестве классов $\{E_i\}$: $E_i < E_j$, если $T(x, y) = 1$ для некоторых $x \in E_i$, $y \in E_j$.

Очевидно, что это определение корректно. Более того, легко показать, что введенное таким образом отношение $<$ на множестве классов $\{E_i\}$ превращает его в упорядоченное множество.

Положим $L = \{E_i\}$. Сопоставим каждому элементу $x \in E$ элемент $f(x) = E_i \in L$ множества L, где $x \in E_i$. Тогда $T(x,y) = D(f(x), f(y))$ (6), где функция D определена на $L \times L$.

В самом деле, если $T(x, y) = 0$, то элементы x, y принадлежат одному подмножеству E_i, а $f(x) = f(y) = E_i$ и $D(f(x), f(y)) = 0$.

Пусть $T(x, y) = 1$. Значит, $x \in E_i$, $y \in E_j$ и, согласно (1), $D(E_i, E_j) = 1$ или $T(x, y) = D(f(x), f(y))$.

Пусть, наконец, $T(x, y) = 2$. Тогда $T(y, x) = 1$ (в силу 1′). Следовательно, по доказанному $T(y, x) = D(f(y), f(x))$, откуда $T(x, y) = D(f(x), f(y))$, Это завершит доказательство.

Итак, нами установлена

Теорема 1. *Пусть E — произвольное множество, а $T(x, y)$ — функция на E, принимающая значения 0, 1, 2. Равенство $T(x, y) = D(f(x), f(y))$, где $f: E \to E_1$ — отображение E на упорядоченное множество E_1, а $D(x, y)$ — функция (1) имеет место тогда и только тогда, когда $T(x, y)$ удовлетворяет условиям 1′ и 2′.*

Значение. Пусть E — конечное упорядоченное множество. Положим, как и выше, $L = \{E_i\}$ (см. 5). Так как мощность множества L не превосходит мощности множества E, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством L и некоторым подмножеством E' множества E.

Пусть элементы множеств L и E' занумерованы так, что вы полняются неравенства $E_1 L \ldots < E_t$ ($L = E_1 \cup \ldots \cup E_t$), $\alpha_1 <$ $< \ldots < \alpha_t$. Согласно доказанному, множество L упорядочен, а E' допускает естественное упорядочение как подмножество упорядоченного множества E.

Построим теперь функцию $f: E \to E'$, определенную услови $f(x) = \alpha_i$, если $x \in E_i$. Тогда $T(x, y) = D(f(x), f(y))$. В самом деле, если $T(x, y) = 0$, то $x, y \in E_i$ (для некоторого i) и $f(x) = f(y) =$ $= \alpha_i$.

Если $T(x, y) = 1$ и $x \in E_i$, $y \in E_j$, то, как было показано выш это означает, что $E_i < E_j$, и тогда $\alpha_i < \alpha_j$ и $D(f(x), f(y)) =$ $= D(\alpha_i, \alpha_j) = 1$. Если же $T(x, y) = 2$, то $T(y, x) = 1$ и, значи $T(y, x) = D(f(y), f(x))$, откуда $T(x, y) = D(f(x), f(y))$.

Исследуем теперь функции $T(x, y)$, представимые в ви $T(x, y) = D(f_1(x), f_2(x))$ (7), где f_1, f_2 — отображения множест E на некоторое упорядоченное множество L.

Найдем сначала необходимые условия, которым должна удо летворять функция $T(x, y)$ вида (7).

1) Для любого $x \in E$ ($y \in E$) существует элемент $y \in E$ ($x \in E$) такой, что $T(x, y) = 0$.

Доказательство. Так как f_2 есть сюръективное отображе ние E на L, то для любого $x \in E$ существует такой элемент $y \in E$ что $f(x) = f(y)$.

Тогда $T(x, y) = D(f(x), f(y)) = 0$ (аналогичное рассуждени при перестановке аргументов x и y).

2) Если x_1, $x_2 \in E$ (y_1, $y_2 \in E$) и хотя бы для одного элемент $y \in E$ ($x \in E$) выполняется равенство $T(x, y) = T(x_2, y) = 0$ (со ответственно $T(x, y_1) = T(x, y_2) = 0$), то $T(x_1, y) = T(x_2, y)$ дл всех $y \in E$ (соответственно $T(x, y_1) = T(x, y_2)$ для всех $x \in E$).

Доказательство. Пусть $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 0$ для не которого элемента $y_1 \in E$, т. е. $D(f_1(x), f_2(y_1)) = D(f_1(x), f_2(y_1)) =$ $= 0$. Тогда в силу определения функции $D(x, y)$ $f_1(x_1) = f_2(y_1)$ $f_1(x_2) = f_2(y_1)$ и $f_1(x_1) = f_1(x_2)$. Следовательно, для всех $y \in E$ имеем $T(x_1, y) = D(f_1(x_1), f_2(y)) = D(f_1(x_2), f_2(y)) = T(x_2, y)$ (Аналогичное рассуждение при перестановке аргументов x и y.)

3) Если $T(x_1, y) = 2$, $T(x_1, z) = 0$, $T(x_2, z) = 2$, то $T(x_2, y) = 2$. Если $T(x_1, y) = 1$, $T(x_1, z) = 0$, $T(x_3, z) = 1$, то $T(x_3, y) = 1$.

Доказательство. Пусть $T(x_1, y) = 2$, $T(x_1, z) = 0$, $T(x_2, z) = 2$. Тогда $f_1(x_1) > f_2(y)$, $f_1(x_1) = f_2(z)$, $f_1(x_2) > f_2(z)$, откуд $f_1(x_2) > f_1(x_1) = f_2(y)$, т. е. $T(x_2, y) = D(f_1(x_2), f_2(y)) = 2$. Анало гично доказывается второй пункт условия 3.

Покажем теперь, что условия 1—3 для функции $T(x, y)$ н любом множестве E достаточны для ее представимости в вид (7). В самом деле, предикат $T(x, y)$ определяет два отношени эквивалентности на E: а) $x_1 \sim x_2$, если $T(x_1, y) = T(x_2, y)$ $\forall y \in E$; б) $y_1 \sim y_2$, если $T(x, y_1) = T(x, y_2)$ $\forall x \in E$.

Эти определения эквивалентности можно ослабить следующим образом: $x_1 \sim x_2$, если существует элемент $y \in E$, что $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 0$. Действительно, из этого равенства в силу 2 следует $T(x_1, y) = T(x_2, y)$, $\forall y \in E$, т. е. $x_1 \sim x_2$. (Аналогичное утверждение имеет место для эквивалентности *б*).

Рассмотрим разбиение множества E на классы эквивалентных между собой элементов (по отношению к эквивалентностям *а* и *б*): $E = \cup E_i$, $E_i \cap E_j = \wedge$ $(i \neq j)$ **(8)**; $E = \cup E_i'$, $E_i' \cap E_j' = \wedge$ $(i \neq j)$ **(9)**.

Положим $L = \{E_i\}$, $L' = \{E_i'\}$. Согласно 1, для каждого фиксированного класса $E_i \in L$ существует такой класс $E_j' \in L'$, что $T(x, y) = 0$ для $x \in L$, $y \in L'$. Если $T(x, y_1) = T(x, y_2) = 0$, то по доказанному $y_1 \sim y_2$. Следовательно, класс E_j' однозначно определяется классом E_i. Далее для каждого класса $E_j' \in L'$ существует такой класс $E_i \in L$, что $T(x, y) = 0$, где $x \in E_i$, $y \in E_j'$. Значит, отображение $\theta(E_i) = E_j'$ **(10)** определяет взаимно однозначное соответствие между множествами L и L'.

Условимся обозначать класс $\theta(E_i)$ через E_i'. Покажем, что множество классов эквивалентности L и L' допускают упорядочение.

Положим $E_i < E_j$, если существует элемент $y \in E$, такой, что для $x_1 \in E_i$, $x_2 \in E_j$, $T(x_1, y) = 0$, $T(x_2, y) = 2$; $E_i > E_j$, если существует элемент $y \in E$, такой, что $T(x_1, y) = 0$, $T(x_2, y) = 1$ $x_1 \in E_i$, $x_2 \in E_j$). Легко доказать корректность этих определений. Аналогично определяется упорядочение на L^1.

Ранее мы ввели отображение θ множества L на L^1: $\theta(E_i) = E_i^1$ (мы употребляем предыдущие обозначения). Покажем, что отображение θ сохраняет порядок: если $E_i < E_j$, то $\theta(E_i) < \theta(E_j)$.

В самом деле, пусть $E_i < E_j$. Тогда для $x_1 \in E_i$, $x_2 \in E_j$ и $z \in E_i^1$ выполняются равенства $T(x_1, z) = 0$, $T(x_2, z) = 2$. Пусть $y_1 \in E_i^1$, $y_2 \in E_j^1$. Имеем $T(x_1, y_1) = 0$, $T(x_2, y_2) = 0$. Вычислим $T(x_1, y_2)$.

Если $T(x_1, y_2) = 0$, то из этого равенства и $T(x_1, y_1) = 0$ вытекает, что $y_1 \sim y_2$, а это невозможно, так как $E_i^1 \neq E_j^1$ (отображение θ взаимно однозначно). Пусть $T(x_1, y_2) = 2$. Тогда из этого равенства и равенства $T(x_2, y_2) = 0$ в силу определения упорядочения на L следует неравенство $E_j < E_i$, что противоречит условию. Следовательно, $T(x_1, y_2) = 1$, и это равенство в сочетании с $T(x_1, y_1) = 0$ показывает, что $E_i^1 < E_j^1$, это и требовалось доказать.

Итак: $\theta : L \to L'$ есть изоморфизм упорядоченных множеств L и L'.

Построим теперь два сюръективных отображения f_1 и f_2 множества E на упорядоченное множество L: $f_1 : x \to E_i$, где $E_i \ni x$;

$f_2 : x \to \theta^{-1} E_i'$, где $E_i \in x$. Покажем, что $T(x, y) = D(f_1(x), f_2(y))$ (12). Действительно, если $T(x, y) = 0$, то $x \in E_i$, $y \in E_i'$ (для некоторого i). Значит, $f_1(x) = E_i$, $f_2(y) = E_i'$ и

$$D(f_1(x), f_2(y)) = D(E_i, E_i') = 0.$$

Пусть $T(x, y) = 1$ и $x \in E_i$, $y \in E_j'$. Пусть, далее, $T(x_1, y) = 0$. Тогда $x_1 \in E_j$ в силу определения соответствия $E_i \leftrightarrow E_i'$ $E_i = f(x)$.

Из равенств $T(x_1, y) = 0$, $T(x, y) = 1$ следует, в силу определения упорядочения в L, что $E_j > E_i$. Следовательно,

$$T(x, y) \equiv D(f_1(x), f_2(y)) = D(E_i, E_j) = 1.$$

Пусть, наконец, $T(x, y) = 2$. Пусть $x \in E_i$, $y \in E_j'$ и $T(x_1, y) = 0$. Тогда $x_1 \in E_j = f_2(y)$. Из равенств $T(x, y) = 2$, $T(x_1, y) = 0$ вытекает на основании определения упорядоченности в L, что $E_j < E_i$. Значит, $D(f_1(x), f_2(y)) = D(E_i, E_j) = 2$. Итак, нами установлена следующая

Теорема 2. *Пусть $T(x, y)$ — функция на множестве $E \times E$, принимающая значения 0, 1, 2. Функция $T(x, y)$ тогда и только тогда представима в виде $T(x, y) = D(f_1(x), f_2(y))$, где f_1 и f_2 — отображения подмножества E на некоторое упорядоченное множество L, когда $T(x, y)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3.*

Список литературы: 1. *Курош А. Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967.—140 с.
2. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.—150 с.

Поступила в редколлегию 17.06.81.