

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу характеристик при комп'ютерному

моделюванні перехідних режимів по ділянці

трубопроводу великого діаметру

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи САУм-23-1

Бурячук А.В.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність

124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Гусарова І.Г.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Бурячук Аліні Владиславівні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу характеристик при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів по ділянці трубопроводу великого діаметру

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи початково-крайова задача для моделювання перехідних режимів по ділянці трубопроводу великого діаметру

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Гусарова І.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 88 с., 30 табл., 8 рис., 1 дод., 12 джерел.

ЕФЕКТ ДЖОУЛЯ-ТОМСОНА, МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК, ПЕРЕХІДНИЙ РЕЖИМ, ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА.

Об'єкт дослідження – перехідний режим течії газу по ділянці трубопроводу (ТП) великого діаметру.

Мета роботи – застосування методу характеристик при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру.

Методи дослідження – методи системного аналізу, чисельний метод характеристик для розв'язання початково-крайової задачі, що описує перехідний режим.

В кваліфікаційній роботі розглядається задача комп'ютерного моделювання перехідного режиму течії газу по ділянці ТП великого діаметру та застосування методу характеристик для розв'язання початково-крайової задачі, якою описується даний режим. Після проведення системного аналізу обирається математична модель для подальшого розглядання, яка враховує ефект Джоуля-Томсона. Будується алгоритм методу характеристик, який враховує крайові умови і застосовує метод Масо, та отримується чисельний розв'язок системи рівнянь математичної моделі. Для проведення обчислювальних експериментів розроблено програмний продукт, яких полегшує обчислення параметрів газового потоку. Отримані результати аналізуються.

Результати дослідження можуть бути корисними для практичного застосування під час розробки та експлуатації газотранспортної системи. Аналіз із урахуванням ефекту Джоуля-Томсона дозволяє краще оцінити поведінку системи в різних умовах, що сприяє своєчасному виявленню та запобіганню аварійним або небезпечним ситуаціям, зменшуючи їхню ймовірність.

ABSTRACT

Introductory note: 88 pages, 30 tables, 8 figures, 1 appendix, 12 sources.

JOULE-THOMSON EFFECT, METHOD OF CHARACTERISTICS, TRANSIENT MODE, INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM.

Object of research – transient gas flow regime in a section of a large-diameter pipeline.

Purpose of work – application of the method of characteristics in computer modelling of transient regimes in a section of a large-diameter pipeline.

Methods of research – system analysis methods and the numerical method of characteristics for solving the initial-boundary value problem describing the transient regime.

The qualification work addresses the problem of computer modelling of the transient gas flow regime in a section of a large-diameter pipeline and the application of the method of characteristics for solving the initial-boundary value problem describing this regime. After conducting a system analysis, a mathematical model is selected for further consideration, which accounts for the Joule-Thomson effect. An algorithm for the method of characteristics is developed, incorporating boundary conditions and employing the Masso method, and a numerical solution to the system of equations in the mathematical model is obtained. A software product is developed to facilitate computational experiments, simplifying the calculation of gas flow parameters. The obtained results are analysed.

The findings of the study can be practically applied in the design and operation of gas transportation systems. Analysis considering the Joule-Thomson effect enables better evaluation of the system's behaviour under various conditions, aiding in the timely detection and prevention of emergency or hazardous situations, thereby reducing their likelihood.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	8
Вступ	9
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання перехідних режимів по ДТ великого діаметру	11
1.1.1 Вербальна модель системи	11
1.1.2 Морфологічний опис системи	12
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання перехідних режимів течії газу по ділянці ТП великого діаметру	12
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	19
1.3.1 Змістовна постановка задачі	19
1.3.2 Формальна постановка задачі	20
1.4 Постановка задач дослідження	22
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	24
2.1 Математична модель стаціонарного режиму течії газу по ділянці ТП великого діаметру	24
2.2 Математична модель ПРТГ по ділянці ТП великого діаметру з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона	26
2.3 Чисельний метод характеристик і алгоритм розв'язання системи рівнянь математичної моделі ПР течії газу по ділянці ТП з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона	29
Висновки за розділом 2	52
3 Програмна реалізація	53
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1	53
3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру	53
3.3 Опис програми	54

	7
Висновки за розділом 3	55
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	56
4.1 Обчислювальний експеримент для перехідного режиму	56
Висновки за розділом 4	70
Висновки	71
Перелік джерел посилання	72
Додаток А Лістинг програми	74

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

ПР – перехідний режим;

ТП – трубопровід;

ДТ – ділянка трубопроводу;

ММ – математична модель;

ГТС – газотранспортна система;

ПРТГ – перехідний режим течії газу;

ЕОМ – електронна обчислювальна машина;

ЛД – лінійна ділянка;

КДР – квазілінійне диференціальне рівняння;

ЧШ – часовий шар.

ВСТУП

Актуальність теми. Актуальність роботи зумовлена тим, що передача газу через систему трубопроводів є одним із найбільш поширених способів доставки газу споживачам, тому важливо вивчати газотранспортні системи в різних режимах функціонування. З огляду на складність системи та вплив різних чинників, таких як зміна зовнішніх умов, коливання тиску й аварії, які можуть раптово змінити крайові умови, доцільніше розглядати перехідні режими транспортування газу, які є нестационарними та неізотермічними, та удосконалювати чисельні методи для аналізу таких систем.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування методу характеристик при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Комп'ютерне моделювання перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру»;
- вибір математичної моделі ПР по ділянці ТП великого діаметру методами системного аналізу;
- застосувати метод характеристик для розв'язання системи рівнянь ММ з заданими крайовими умовами, якими описана обрана модель;
- створити програмний продукт для чисельного розрахунку параметрів потоку газу;
- провести аналіз результатів.

Об'єктом дослідження є перехідний режим течії газу по ділянці трубопроводу (ТП) великого діаметру.

Предметом дослідження є математична модель перехідного режиму течії газу по ділянці ТП великого діаметру та чисельний метод характеристик для розв'язання початково-крайової задачі, що описує перехідний режим.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи системного аналізу та чисельний метод характеристик для розв'язання поча-

тково-крайової задачі, що описує перехідний режим.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на VII Міжнародній науково-практичній конференції «Education and science of today: intersectoral issues and development of sciences» (м. Кембридж, 18 жовтня 2024 р.), VII Міжнародній науково-практичній конференції «Grundlagen der modernen wissenschaftlichen forschung» (м. Цюріх, 13 грудня 2024 р.) та на XXVII Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [1 – 3].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання перехідних режимів по ділянці трубопроводу великого діаметру

1.1.1 Вербальна модель системи

В якості об'єкта для аналізу обрано перехідні режими течії газу по ділянці трубопроводу великого діаметру.

Предметом аналізу обрано математичну модель перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру.

Метою системи маємо виведення математичної моделі ПР при неочікуваних змінах крайових умов, застосування методу характеристик для розв'язання початково-крайової задачі, отримання розрахованих параметрів потоку газу.

Система призначена для прогнозування поведінки потоку газу в газотранспортній системі у випадку аварій та для їх запобігання.

Від самого початку обираємо складну систему «Моделювання перехідних режимів по ділянці трубопроводу великого діаметру і застосування методу характеристик». Основною метою цієї системи є визначення найбільш ефективної математичної моделі серед побудованих.

На вході системі подається загальна система рівнянь газової динаміки, що доповнена крайовими та початковими умовами. Після того, як вхід буде оброблений, отримуємо вихід системи у вигляді найбільш оптимальної математичної моделі транспортування газу.

Механізмами в цій системі є дослідник, який керує системою та аналізує її роботу, і програмний продукт, який контролює якість виконаних розрахунків дослідження.

Засобом управління системою є явний метод характеристик.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Розглянемо зовнішнє середовище системи, яке складається з усіх об'єктів, що знаходяться не в межах системи, яка розглядається, але впливають на її функціонування. Схема цього зовнішнього середовища наведена на рисунку 1.1.



Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання перехідних режимів течії газу по ділянці ТП великого діаметру

Головна мета завдання полягає в розробці математичної моделі перехідного режиму протікання газу та її дослідженні за допомогою чисельного методу характеристик.

Будемо використовувати метод аналізу ієрархій для вибору конкретної моделі для дослідження [4].

Для вибору найбільш підходящої моделі візьмемо три математичні моделі

перехідних режимів, які виступатимуть в ролі альтернатив. Всі обрані моделі будуть враховувати ефект Джоуля-Томсона, через великий діаметр розглядуваної ділянки труби.

Перша модель буде містити в своїй структурі врахування кінетичної енергії. В другій моделі є врахування поправки Коріоліса. А третя модель нехтуватиме і поправкою Коріоліса і кінетичною енергією.

Критерії, за якими порівнюватимемо моделі мають наступні формулювання:

- врахування температурного режиму в моделі (ТР): повністю, частково або в більшій мірі;
- складність розрахунків в математичній моделі (СР): низька, середня, висока;
- врахування швидкості протікання газу в моделі (ШП): повністю або частково;
- врахування нерівномірності швидкості газу (НШ): враховує або не враховує.

Перша альтернатива (М1) – математична модель перехідного режиму по ділянці ТП великого діаметру з ефектом Джоуля-Томсона і врахуванням кінетичної енергії:

- ТР: частково;
- СР: висока;
- ШП: частково, в рівнянні енергії;
- НШ: не враховує.

Друга альтернатива (М2) – математична модель перехідного режиму по ділянці ТП великого діаметру з ефектом Джоуля-Томсона і врахуванням поправки Коріоліса:

- ТР: частково;
- СР: середня;
- ШП: частково;
- НШ: враховує.

Третя альтернатива (М3) – математична модель перехідного режиму по ділянці ТП великого діаметру з ефектом Джоуля-Томсона, яка нехтує і поправкою Коріоліса і кінетичною енергією:

- ТР: в більшій мірі;
- СР: низька;
- ШП: частково;
- НШ: не враховує.

На рис. 1.2 наведено структуру ієрархій проблеми вибору.



Рисунок 1.2 – Ієрархічна структура проблеми вибору

Порівнюємо попарно критерії та оцінюємо ступень важливості кожного з них за школою Т. Сааті. Оцінки наведені в таблиці 1.1.

У табл. 1.2 показані обчислення векторів локальних пріоритетів.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	ТР	СР	ШП	НШ
ТР	1	1/6	6	8
СР	6	1	8	9
ШП	1/6	1/8	1	4
НШ	1/8	1/9	1/4	1

Таблиця 1.2 – Розрахунок векторів локальних пріоритетів критеріїв

	ТР	СР	ШП	НШ	Середнє геометричне по рядкам	Вектор пріоритетів
ТР	1	1/4	4	6	$x_1 = 1,56508$	$p_1^K = 0,25472$
СР	4	1	6	8	$x_2 = 3,72242$	$p_2^K = 0,60584$
ШП	1/4	1/6	1	2	$x_3 = 0,53729$	$p_3^K = 0,08745$
НШ	1/6	1/8	1/2	1	$x_4 = 0,31947$	$p_3^K = 0,05199$
					$\Sigma = 6,14426$	

Для розрахунку індексу узгодженості CI треба знайти суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1 + 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 5,41667, \quad y_2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = 1,54167,$$

$$y_3 = 4 + 6 + 1 + \frac{1}{2} = 11,5, \quad y_4 = 6 + 8 + 2 + 1 = 17.$$

Звідси максимальне власне значення матиме такий вигляд

$$\lambda_{\max}^K = 0,25472 \cdot 5,41667 + 0,60584 \cdot 1,54167 + \\ + 0,08745 \cdot 11,5 + 0,05199 \cdot 17 = 4,20328,$$

а СІ дорівнюватиме:

$$CI^K = \frac{4,20328 - 4}{4 - 1} = 0,06776.$$

Через те, що матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею третього порядку, то випадковий індекс беремо зі значенням $RI^K = 0,9$. Відношення узгодженості дорівнює

$$CR^K = \frac{0,06776}{0,9} = 0,07529.$$

Матриця попарних порівнянь вважатимемо правильно, бо це значення близьке до 0,1.

Вектор локальних пріоритетів має вигляд:

$$\bar{p}^K = (0,25472 \quad 0,60584 \quad 0,08745 \quad 0,05199)^T.$$

Для кожного з критеріїв побудуємо матриці попарних порівнянь.

Аналізуючи перший критерій робимо висновок, що М1 краща за однаковою значущі М2 і М3.

Із другого критерію бачимо, що М3 краще за М1 і М2, та М2 краще за М1.

Розглядаючи третій критерій, зробимо висновок, що М2 краще за однаковою значущі М1 і М3.

І нарешті із четвертого критерію видно, що альтернативи М3 і М2 однаковою значущі та кращі за М1.

У наступних таблицях 1.3 – 1.6 наведемо побудовані матриці.

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь за третім критерієм

Ш	М1	М2	М3
М1	1	3	3
М2	$\frac{1}{3}$	1	1
М3	$\frac{1}{3}$	1	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь за другим критерієм

Р	М1	М2	М3
М1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
М2	3	1	$\frac{1}{7}$
М3	5	7	1

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь за четвертим критерієм

Н	М1	М2	М3
М1	1	$\frac{1}{5}$	1
М2	5	1	5
М3	1	$\frac{1}{5}$	1

Розраховуємо вектори локальних пріоритетів для кожної матриці:

$$\bar{p}_1^a = (0,5327 \quad 0,2337 \quad 0,2337)^T,$$

$$\bar{p}_2^a = (0,1355 \quad 0,2158 \quad 0,6487)^T,$$

$$\bar{p}_3^a = (0,18714 \quad 0,6257 \quad 0,18714)^T,$$

$$\bar{p}_4^a = (0,1502 \quad 0,425 \quad 0,425)^T.$$

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь за першим критерієм

Т	М1	М2	М3
М1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
М2	4	1	1
М3	4	1	1

Знаходимо індекси узгодженості за всіма критеріями:

$$CI_{K1}^a = 0,112, \quad CI_{K2}^a = 0,445, \quad CI_{K3}^a = 0,248, \quad CI_{K4}^a = 0,132.$$

Через те, що матриці попарних порівнянь альтернатив – це матриці третього порядку, тоді випадковий індексом візьмемо $RI^K = 0,58$. Знаходимо відношення узгодженості:

$$CR_{K1}^a = 0,193, \quad CR_{K2}^a = 0,31,$$

$$CR_{K3}^a = 0,42, \quad CR_{K4}^a = 0,23.$$

Матриця, складена з векторів глобальних пріоритетів кожного з критеріїв:

$$P^a = \begin{pmatrix} 0,5327 & 0,1355 & 0,1871 & 0,1502 \\ 0,2337 & 0,2158 & 0,6257 & 0,425 \\ 0,2337 & 0,6487 & 0,1871 & 0,425 \end{pmatrix}.$$

Розраховуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,5327 & 0,1355 & 0,1871 & 0,1502 \\ 0,2337 & 0,2158 & 0,6257 & 0,425 \\ 0,2337 & 0,6487 & 0,1871 & 0,425 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25472 \\ 0,60584 \\ 0,08745 \\ 0,05199 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2419 \\ 0,2671 \\ 0,4909 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, третя альтернатива у векторі глобальних пріоритетів має максимальну компоненту, тому віддамо їй перевагу. Тому для подальшого аналізу обираємо модель с ефектом Джоуля-Томсона, яка не враховує ні кінетичну енергію, ні поправку Коріоліса.

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Об'єкт дослідження – перехідний процес течії газу по ділянці трубопроводу великого діаметру.

Предмет дослідження – математична модель перехідного режиму течії газу по ділянці ТП великого діаметру та чисельний метод характеристик для розв'язання початково-крайової задачі, що описує перехідний режим.

Мета кваліфікаційної роботи – застосування методу характеристик при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру.

Передача газу через систему трубопроводів є одним із найбільш пошире-

них способів доставки газу споживачам, тому важливо вивчати газотранспортні системи в різних режимах функціонування. Зазвичай досліджується стаціонарний режим роботи ГТС, але з огляду на складність системи та вплив різних чинників, таких як зміна зовнішніх умов, коливання тиску й аварії, які можуть раптово змінити крайові умови, стаціонарний режим лише приблизно відображає реальні процеси в ГТС. У таких ситуаціях доцільніше розглядати перехідні режими транспортування газу.

Завдяки розвитку науки й техніки, зокрема прогресу в області електронних обчислювальних машин і методів математичного моделювання, з'явилася можливість детальніше досліджувати такі системи та отримувати точніші дані про їхню роботу.

У загальному випадку, перехідний режим транспорту газу через трубопровід великого діаметру моделюється квазілінійною системою диференціальних рівнянь у часткових похідних або за допомогою інтегральних рівнянь.

У кваліфікаційній роботі розглядатимемо ділянку трубопроводу великого діаметру заданої довжини, яка має жорсткі стінки. Параметри газового потоку (масова витрата та/або тиск та/або температура) на межах ділянки ТП мають властивість різко змінюватись. Також при розв'язанні задачі будемо відстежувати час перехідного процесу, для цього будемо використовувати явний метод характеристик.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Газотранспортну систему [5] можемо описати як мережу компресорних станцій і лінійних ділянок, які впливають на різні режими транспортування газу.

Наприклад, можна дослідити ділянку трубопроводу певної довжини для проведення дослідів. Будемо розглядати ДТ довжини L (рис. 1.3).

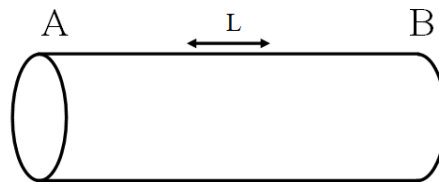


Рисунок 1.3. – Ділянка ТП

На рис. 1.4 зображено схематичний вигляд ДТ великого діаметру, на якій A – є входом, а B – виходом цієї ділянки.

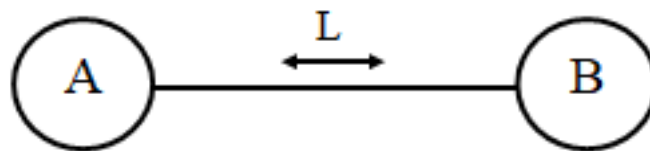


Рисунок 1.4 – Схема ділянки ТП

Так як, хоча б на одному з кінців ділянки, відбувається різка зміна крайових умов даний режим течії газу по ДТ класифікуватимемо як перехідний. Математичною моделлю такого режиму є система диференціальних рівнянь в частинних похідних з заданими крайовими, які змінюються, та заданими початковими умовами.

У роботі розглядається трубопровід великого діаметру, тому при моделюванні робочого процесу враховуватимемо ефект Джоуля-Томсона, який виникає під час транспортування газу трубами з діаметром не менше 1,2 м.

Крайові умови на межах ділянки, тобто на початку та на кінці, мають вигляд:

$$\begin{cases} P(0,t) = \hat{P}^0(t), \\ G(0,t) = \hat{G}^0(t), \\ T(0,t) = \hat{T}^0(t), \text{ при } G(0,t) > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} P(L,t) = \hat{P}^1(t), \\ G(L,t) = \hat{G}^1(t), \\ T(L,t) = \hat{T}^1(t), \text{ при } G(L,t) < 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

де $G = SW$ – масова витрата газу (кг/с);

$\hat{P}^0(t), \hat{T}^0(t), \hat{G}^0(t), \hat{P}^1(t), \hat{T}^1(t), \hat{G}^1(t)$ – задані функції.

Початкові умови подаються у наступному вигляді:

$$P(x,0) = \tilde{P}(x), W(x,0) = \tilde{W}(x), T(x,0) = \tilde{T}(x), x \in (0,L), \quad (1.3)$$

де $\tilde{P}(x), \tilde{W}(x), \tilde{T}(x)$ – задані функції.

1.4 Постановка задач дослідження

Дивлячись на результати з проведеного системного аналізу предметної області, можна дійти висновку, що розглянута математична модель є ММ ПР для ділянки ТП великого діаметру з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона.

ПР описується за допомогою початково-крайової задачі. Режим кваліфікується як перехідний через різку зміну умов на кінцях ділянки. На початковому етапі нам відомі довжина ділянки ТП і початковий розподіл параметрів течії газу.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування методу характеристик при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні задачі:

- вибір математичної моделі ПР по ділянці ТП великого діаметру методами системного аналізу;
- застосувати метод характеристик для розв'язання системи рівнянь ММ

- з заданими крайовими та початковими умовами, якими описана обрана модель;
- розробити програмний продукт для знаходження визначних параметрів газового потоку та оцінки часу розповсюдження перехідного процесу;
 - провести аналіз результатів чисельних експериментів.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Математична модель стаціонарного режиму течії газу по ділянці ТП великого діаметру

Через те, що розглядається режим перебігу газу по ділянці ТП великого діаметру, обов'язково необхідно враховувати ефект Джоуля-Томсона, який виникає у випадку транспортування газу по трубах великого діаметру.

Коефіцієнт Джоуля-Томсона має наступний вигляд

$$D_j = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta P} \right)_i = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_i. \quad (2.1)$$

Цей коефіцієнт дає розуміння про швидкість зміни температури газу при зміні тиску в ізоентальпійному процесі.

Для розрахунку цього коефіцієнту виведемо формулу, для чого використаємо термічне і колориметричне рівняння:

$$D_j = T^2 \cdot R \cdot \frac{1}{C_p \cdot P} \frac{\partial z}{\partial T}. \quad (2.2)$$

У роботі розглядається горизонтальний газопровід. Формула (2.3) описує розподіл температури в такому газопроводі, при цьому другий доданок враховує ефект Джоуля-Томсона, за якого температура знижується під час руху газу

$$T_x = e^{-x\theta} (T_n - T_{zp}) - (1 - e^{-x\theta}) \left(P_n^2 - P_x^2 \right) \frac{1}{2\theta P_{cep} x} D_j + T_{zp}, \quad (2.3)$$

де D_j – коефіцієнт Джоуля-Томсона;

T_{zp} – середня температура ґрунту на глибині, де проходить газопровід;

x – відстань від початку ДТ до точки на цій ділянці з координатою x ;

T_n – температура газу на початку ДТ;

P_n – початковий тиск на ДТ;

$\theta = \frac{\pi K_T D}{C_p G}$ – допоміжне значення;

$P_{сер}$ – середнє значення тиску на ділянці трубопроводу $[0; x]$;

P_x – тиск в точці x .

Подібно до попередньої формули, записується формула для середньої температури на всій ділянці трубопроводу:

$$T_{сер} = \frac{1}{L\theta} (T_n - T_{zp}) (1 - e^{-L\theta}) + T_{zp} - (P_n^2 - P_k^2) \frac{1}{2\theta P_{сер} L} D_j \left(1 - (1 - e^{-L\theta}) \frac{1}{L\theta} \right),$$

де P_k – кінцевий тиск на ДТ;

L – довжина ДТ.

Використовуючи формулу (2.2), рівняння стану (2.4) і формулу коефіцієнта стисливості газу (2.5), можемо отримати формулу, яка обчислює коефіцієнт Джоуля-Томсона (2.6):

$$P = g \rho R z T, \quad (2.4)$$

$$z(P, T) = 1 - (0,015 + (0,345 \cdot 0,01 \cdot \Delta - 0,446 \cdot 0,001)(P - 6)) \cdot (1,3 - 0,014(T - 283,2)),$$

$$D_j(P, T) = \frac{1,0045 \cdot T^2}{P \cdot 1046,7 \cdot C_p \cdot \Delta} (0,015 + (0,345 \cdot 0,01 \cdot \Delta - 0,446 \cdot 0,001)(P - 6)), \quad (2.5)$$

де Δ – відносна щільність газу за повітрям.

Для спрощення розрахунків можна використовувати спрощений підхід,

замінюючи поточні значення тиску і температури їхніми середніми значеннями, визначеними в стаціонарному режимі:

$$D_j = D_j(P_{сер}, T_{сер}),$$

але будемо користуватись формулою (2.6) для поточних значень тиску і температури.

Сфера застосування стаціонарної моделі досить обмежена, оскільки в реальному житті режим роботи газопроводу майже ніколи не можна назвати стаціонарним. Тому надалі розглядатимемо перехідні режими течії газу, які легше пристосувати до реальних умов, де початковий розподіл відповідає стаціонарному режиму.

2.2 Математична модель ПРТГ по ділянці ТП великого діаметру з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона

Для загального випадку ПРТГ по ділянці ТП, що являє собою циліндричну трубу великого діаметру, описується квазілінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка отримується із основних рівнянь газової динаміки. Надалі, при побудові моделі будемо ігнорувати теплофізичні властивості середовища та масообмін з навколишнім середовищем, враховуватимемо стаціонарність режимів теплообміну з навколишнім середовищем.

Запишемо початкову систему [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} \left[P + \rho \cdot (1 + \beta_0) \cdot V^2 \right] = -\rho \left[\frac{gdh}{dx} + |V|V\lambda \cdot \frac{1}{2D} \right], \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E\rho) + \frac{\partial}{\partial x}\left(VE\rho + \frac{VP\rho}{\rho}\right) = K \frac{(T_{zp} - T)^4}{D} - g \cdot V \cdot \rho \frac{dh}{dx}, \quad (2.8)$$

де λ – коефіцієнт гідравлічного опору;

h – глибина залягання труби;

E – повна енергія одиниці маси

K – коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту;

$\rho(x, t)$ – щільність газу;

$P(x, t)$ – тиск газу;

D – діаметр труби;

$V(x, t)$ – швидкість газу;

t, x – часова і просторова координата;

$T(x, t)$ – температура газу;

T_{zp} – температура ґрунту;

g – прискорення вільного падіння;

β_0 – поправка Коріоліса на нерівномірний розподіл швидкостей в перетині.

Щоб спростити цю систему ми будемо ігнорувати зміну температури та поправку Коріоліса в виразах (2.7) – (2.8), проте врахуємо ефект Джоуля-Томсона [6].

Після доповнення системи (2.6) – (2.8) рівнянням стану (2.4), врахування, що $E_{кінет} = 0$, позначення $\mu = \alpha S$ і спрощення запису маємо [1]:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \left(1 - \mu \hat{T} \hat{W}^2 \frac{1}{\hat{P}^2}\right) \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + 2 \hat{T} \hat{W} \frac{\mu}{\hat{P}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} + \beta S \hat{T} \hat{W} \frac{|\hat{W}|}{\hat{P}} + \frac{\hat{P}}{\hat{T}} \frac{g}{\mu} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \hat{T} \mu \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\hat{T}^2 \hat{W} \mu}{\hat{T} - \hat{P} \gamma D_j} \frac{\gamma}{\hat{P}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \left(\gamma \frac{\hat{T}}{\hat{T} - \hat{P} \gamma D_j} - 1\right) \frac{\mu \hat{T}^2}{\hat{P}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} - \frac{\hat{W} \gamma \mu D_j}{\hat{T} - \hat{P} \gamma D_j} \frac{\hat{T}^2}{\hat{P}} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} +$$

$$+\frac{4(\gamma-1)\hat{T}^2 K}{D\hat{P}} \frac{(\hat{T}-T_{cp})}{(\hat{T}-\hat{P}\gamma D_j)} + \frac{\hat{W}(\gamma-1)}{\hat{T}-\gamma\hat{P}D_j} \frac{\hat{T}^2 g}{\hat{P}} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (2.11)$$

де $\mu = Rzg$;

$\hat{W} = V \cdot \rho$ – питома масова витрата газу;

$$\gamma = C_p \frac{1}{C_p - Rzg};$$

$$\beta = \mu \frac{1}{2SD} \lambda;$$

S – площа поперечного перерізу;

C_p – питома теплоємність газу.

Матрична форма системи (2.10) – (2.12) матиме вигляд [6]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B(x, t, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi(x, t, \varphi), \quad (2.12)$$

де

$$B(x, t, \varphi) = \begin{bmatrix} 2\mu\hat{W} \frac{\hat{T}}{\hat{P}} & 1 - \mu\hat{W}^2 \frac{\hat{T}}{\hat{P}^2} & 0 \\ \hat{T}\mu & 0 & 0 \\ \left(\frac{\hat{T}\gamma}{\hat{T} - \gamma\hat{P}D_j} - 1 \right) \frac{\mu\hat{T}^2}{\hat{P}} & -\frac{\hat{W}\gamma\mu D_j}{\hat{T} - \gamma\hat{P}D_j} \frac{\hat{T}^2}{\hat{P}} & \frac{\hat{W}\gamma\mu}{\hat{T} - \gamma\hat{P}D_j} \frac{\hat{T}^2}{\hat{P}} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(x, t, \varphi) = \begin{bmatrix} -\beta\hat{W}|\hat{W}| \frac{S\hat{T}}{\hat{P}} - \frac{g}{\mu\hat{T}} \hat{P} \frac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\frac{4(\gamma-1)}{(\hat{T} - D_j\hat{P}\gamma)} \frac{\hat{T}^2 K (\hat{T} - T_{cp})}{\hat{P}D} - \frac{g\hat{W}(\gamma-1)}{\hat{P}} \frac{\hat{T}^2}{\hat{T} - D_j\hat{P}\gamma} \frac{dh}{dx} \end{bmatrix},$$

$$\varphi(x, t) = (\hat{W}(x, t), \hat{P}(x, t), \hat{T}(x, t)).$$

Знаходимо корені рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - 2\lambda \frac{\hat{T}\mu\hat{W}}{\hat{P}} & -\left(\lambda - \frac{\mu\hat{T}\hat{W}^2\lambda}{\hat{P}^2}\right) & 0 \\ -\hat{T}\mu\lambda & 1 & 0 \\ -\left(\frac{\hat{T}\gamma\lambda}{\hat{T} - \gamma\hat{P}D_j} - \lambda\right) \frac{\mu\hat{T}^2}{\hat{P}} & \frac{\lambda\gamma D_j}{\hat{T} - \gamma\hat{P}D_j} \frac{\mu\hat{T}^2\hat{W}}{\hat{P}} & 1 - \frac{\mu\gamma\lambda}{\hat{T} - \gamma\hat{P}D_j} \frac{\hat{T}^2\hat{W}}{\hat{P}} \end{vmatrix} = 0$$

за допомогою формули $0 = \det(E - \tilde{\lambda}B)$, де E – одинична матриця.

Знайдені корені [2] мають вигляд

$$\lambda_1 = \frac{1}{\hat{W} \frac{\hat{T}\mu}{\hat{P}} + \sqrt{\mu\hat{T}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\hat{T}\hat{P} - \gamma D_j \hat{P}^2}{\gamma \mu \hat{T}^2 \hat{W}}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\hat{W} \hat{T} \frac{\mu}{P} - \sqrt{\mu\hat{T}}}.$$

Корені різні, тому система (2.12) є гіперболічною. Таким чином, математична модель ПР течії газу це гіперболічна система рівнянь (2.12) з крайовими умовами (1.1) – (1.2) та початковими умовами (1.3).

2.3 Чисельний метод характеристик і алгоритм розв'язання системи рівнянь математичної моделі ПР течії газу по ділянці ТП з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона

Метод характеристик [7 – 11] належить до чисельних методів розв'язування гіперболічних систем квазілінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних (КЛДР). Суть цього методу полягає в проходженні характеристичних (інтегральних) кривих системи КЛДР та обчисленні значень розв'язку вздовж кожної з них.

Спершу необхідно визначити властивості системи КДР за допомогою характеристикних рівнянь. Далі розв'язок системи КДР та його похідні вздовж кожної характеристики можна подати через початкові умови на цих характеристиках. Це зводить задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь, яку можна розв'язати, наприклад, методом Ейлера або іншими методами чисельного інтегрування.

Розглянемо систему, що містить n першопорядкових диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{b_{ij} \partial u_j}{\partial t} + \frac{a_{ij} \partial u_j}{\partial x} \right) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.13)$$

де a_{ij} , b_{ij} , f_i – задані функції змінних x , t , u_1 , u_2, \dots, u_n – є неперервними та неперервно диференційованими у деякій області зміни своїх аргументів. Системи, що мають такі властивості називаються квазілінійними.

Візьмемо $u_1(x, t)$, $u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ як деякий розв'язок системи (2.13). Він є неперервно диференційованим в області G площини x , t , а F – деяка гладка крива без кратних точок, яка розміщується в області G . Ставимо питання: чи можна за допомогою системи (2.13), на кривій F по значенням розв'язку $u_1(x, t)$, $u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ знайти значення частинних похідних $q_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$,

$p_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}$ та вирішуємо його.

На кривій F значення частинних похідних q_i , p_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) зв'язані n -ю кількістю співвідношень, які мають вигляд

$$\sum_{j=1}^n (q_j b_{ij} + p_j a_{ij}) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.14)$$

які отримуються з системи (2.1), і n -ю кількістю диференціальних співвідношень

$$p_i dx = du_i - q_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.15)$$

де диференціали необхідно обирати вздовж кривої F . Тоді, отримується система $2n$ першопорядкових лінійних рівнянь для того, щоб визначити p_i , q_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Вважаємо, що систему (2.15) можна переписати в розглядуваній точці кривої F $dx \neq 0$. Ця система матиме вигляд:

$$p_i = \frac{du_i}{dx} - \frac{q_i dt}{dx}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.16)$$

Далі відкидаємо невідомі p_i із системи (2.14). Для знаходження q_i маємо наступну систему рівнянь:

$$\sum_{j=1}^n (b_{ij} dx \cdot q_j - a_{ij} dt \cdot q_j) = f_i dx - \sum_{j=1}^n a_{ij} du_j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.17)$$

Після знаходження $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ із цієї системи, із системи (2.16) можна знайти й $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Це при умові, що в розглядуваній точці кривої F $dx \neq 0$. В іншому ж випадку $dt \neq 0$, тоді систему (2.15) переписуємо у вигляді

$$-\frac{p_i dx}{dt} + \frac{du_i}{dt} = q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Після відкидання q_i з системи (2.14) маємо систему у вигляді:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} dt \cdot p_j - b_{ij} dx \cdot p_j) = f_i dt - \sum_{j=1}^n b_{ij} du_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Визначник цієї системи може відрізнитись, тільки лише знаком від визначника системи (2.17). Позначаємо визначник матриці коефіцієнтів системи (2.17) $\tilde{\Delta}$, тобто

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} -a_{11}dt + b_{11}dx & -a_{12}dt + b_{12}dx & \dots & -a_{1n}dt + b_{1n}dx \\ -a_{21}dt + b_{21}dx & -a_{22}dt + b_{22}dx & \dots & -a_{2n}dt + b_{2n}dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}dt + b_{n1}dx & -a_{n2}dt + b_{n2}dx & \dots & -a_{nn}dt + b_{nn}dx \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Розглянемо два випадки. У випадку 1 визначник $\tilde{\Delta}$ не дорівнює нулю ні в одній з точок кривої F . Тоді система (2.17) має єдиний розв'язок відносно q_i , а тоді, у кожній точці кривої F за значеннями $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ на F і системою (2.13) є можливим однозначне знаходження частинних похідних цих функцій.

А у випадку 2 визначник $\tilde{\Delta}$ тотожно дорівнює нулю на кривій F . Тоді, система (2.17) має безліч розв'язків так як визначник її дорівнює нулю, бо ми судимо за існуючим розв'язком системи (2.13), а система (2.17) має бути сумісною. Тоді маємо, що за таких умов за значеннями $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ на F і системою (2.13) неможливе однозначне визначення частинних похідних розв'язку на F . В таких випадках ця крива називається характеристикою системи (2.13), що відповідає даному розв'язку системи. Криву F спільно зі значеннями розв'язку вздовж неї, тобто криву в $(n+2)$ -вимірному просторі $x, t, u_1, u_2, \dots, u_n$, називатимемо характеристичною кривою. Характеристика F є її проекція на площину x, t .

Кут нахилу дотичної до характеристики F має тангенс $\lambda = \frac{dt}{dx}$, що відпо-

відає рівнянню

$$\begin{vmatrix} -\lambda a_{11} + b_{11} & -\lambda a_{12} + b_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} + b_{1n} \\ -\lambda a_{21} + b_{21} & -\lambda a_{22} + b_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} + b_{n1} & -\lambda a_{n2} + b_{n2} & \dots & -\lambda a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

При умові заданого розв'язку $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t)$ гіперболічної системи (2.13) у кожній із точок області G , де цей розв'язок є відомим, рівняння (2.19) має n дійсних коренів, що задають n напрямків дотичних до характеристик, які відповідають цьому розв'язку. Позначимо корені рівняння (2.19), що є функціями x та t , при заданому розв'язку $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t)$, як $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, та отримаємо n диференціальних рівнянь

$$\lambda_i(x,t) dx = dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.20)$$

Кожне із цих рівнянь визначає однопараметричне сімейство кривих, а саме інтегральних кривих цього рівняння, що покриває область G . Під час аналізу рівняння (2.19) як першогопорядкового диференціального рівняння n -ого ступеня, ми отримаємо при умові заданого розв'язку $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t)$ системи (2.13) n характеристичних сімейств. Кожну точку області G буде перетинати тільки одна характеристика з кожного сімейства.

Припустимо, що крива F площини x, t є характеристикою системи (2.13), яка відповідає заданому розв'язку $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t)$. Визначник $\tilde{\Delta}$ на кривій F рівний нулю, тоді через те, що система (2.17) є сумісною усі визначники, які отримані через заміну в $\tilde{\Delta}$ k -ого стовпця стовпцем правих частин системи (2.17), повинні також рівнятись нулю. Визначник, отриманий заміною в $\tilde{\Delta}$ k -ого стовпця стовпцем вільних членів системи (2.17), позначимо як

$\tilde{\Delta}_k$. Тоді функції $u_1(x, t)$, $u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ на кривій F пов'язуватимуться $n + 1$ співвідношеннями

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_2 = \dots = \tilde{\Delta}_n = 0.$$

Розглянемо рівняння характеристик у випадку, коли $n = 3$. В цьому випадку рівняння для напрямків характеристик запишемо наступним чином

$$\lambda_i(x, t) dx = dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.21)$$

де λ_i – є коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\lambda + b_{11} & -a_{12}\lambda + b_{12} & -a_{13}\lambda + b_{13} \\ -a_{21}\lambda + b_{21} & -a_{22}\lambda + b_{22} & -a_{23}\lambda + b_{23} \\ -a_{31}\lambda + b_{31} & -a_{32}\lambda + b_{32} & -a_{33}\lambda + b_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.22)$$

Тоді на характеристиках диференціальні співвідношення набудуть вигляду

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} -a_{13}\lambda_i + b_{11} & -a_{13}\lambda_i + b_{12} & f_1 dx - a_{12} du_2 - a_{11} du_1 - a_{13} du_3 \\ -a_{23}\lambda_i + b_{21} & -a_{23}\lambda_i + b_{22} & f_2 dx - a_{22} du_2 - a_{21} du_1 - a_{23} du_3 \\ -a_{33}\lambda_i + b_{31} & -a_{33}\lambda_i + b_{32} & f_3 dx - a_{32} du_2 - a_{31} du_1 - a_{33} du_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.23)$$

У випадку, якщо умова (2.23) тотожно задовольнятиметься на якійсь характеристиці, замість цієї умови на цій характеристиці необхідно обирати іншу. Її можна отримати замінивши у визначнику (2.22) інший стовпець стовпцем із вільними членами системи (2.17).

Розв'язки системи (2.12), умовами (1.1) – (1.3) знаходимо методом характеристик.

Запишемо корені рівняння (2.22), що були знайдені в попередньому розділі:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\hat{W} \frac{\mu \hat{T}}{\hat{P}} + \sqrt{\mu \hat{T}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\hat{T} \hat{P} - \gamma D_j \hat{P}^2}{\gamma \mu \hat{T}^2 \hat{W}}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\hat{W} \hat{T} \frac{\mu}{\hat{P}} - \sqrt{\mu \hat{T}}}.$$

Маємо три сімейства із характеристик в області G в отриманому розв'язку системи. Кожне з цих сімейств має своє диференціальне співвідношення. Для знаходження цих співвідношень на характеристиках всіх цих сімей розглядатимемо рівняння:

$$\tilde{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda_i b_{11} & -\lambda_i b_{12} & \Phi_1 dx - b_{12} dP - b_{11} dW \\ -\lambda_i b_{21} & 1 & -b_{21} dW \\ -\lambda_i b_{31} & -\lambda_i b_{32} & \Phi_3 dx - b_{32} dP - b_{31} dW - b_{33} dT \end{vmatrix} = 0.$$

Знаходимо даний визначник:

$$\begin{aligned} & (\Phi_1 dx - b_{12} dP - b_{11} dW) \begin{vmatrix} -\lambda_i b_{21} & 1 \\ -\lambda_i b_{31} & -\lambda_i b_{32} \end{vmatrix} + b_{21} dW \begin{vmatrix} 1 - \lambda_i b_{11} & -\lambda_i b_{12} \\ -\lambda_i b_{31} & -\lambda_i b_{32} \end{vmatrix} + \\ & + (\Phi_3 dx - b_{32} dP - b_{31} dW - b_{33} dT) \begin{vmatrix} 1 - \lambda_i b_{11} & -\lambda_i b_{12} \\ -\lambda_i b_{21} & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ & (\Phi_1 dx - b_{12} dP - b_{11} dW) (\lambda_i^2 b_{32} b_{21} + \lambda_i b_{31}) + b_{21} dW (\lambda_i^2 b_{11} b_{32} - \lambda_i b_{32} - \lambda_i^2 b_{31} b_{12}) + \\ & + (\Phi_3 dx - b_{32} dP - b_{31} dW - b_{33} dT) (1 - \lambda_i b_{11} - \lambda_i^2 b_{21} b_{12}) = 0. \end{aligned}$$

Після розкриття дужок, зведення подібних доданків і спрощення коефіцієнтів при dW і dP маємо:

$$(-b_{21} \lambda_i b_{32} - b_{31}) dW + (-b_{12} \lambda_i b_{31} + b_{32} \lambda_i b_{11} - b_{32}) dP +$$

$$+(-b_{33} + \lambda_i b_{33} b_{11} + \lambda_i^2 b_{33} b_{12} b_{21}) dT + (\Phi_1 b_{21} \lambda_i^2 b_{32} + \Phi_3 + \Phi_1 b_{31} \lambda_i - \Phi_3 b_{11} \lambda_i) dx = 0.$$

Для зручності проведення розрахунків робимо заміни в λ_i та в матрицях Φ і B

$$\sqrt{\mu T} = a \text{ і } T - P\gamma D_j = r.$$

Запишемо новий вигляд цих матриць

$$B(x, t, \varphi) = \begin{bmatrix} 2\hat{W} \frac{a^2}{\hat{P}} & 1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2} & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \\ \hat{T} a^2 \left(\frac{\hat{T}\gamma}{r} - 1 \right) \frac{1}{\hat{P}} & -\frac{\gamma \hat{W} D_j a^2 \hat{T}}{r \hat{P}} & \frac{\hat{W} \gamma \hat{T} a^2}{r \hat{P}} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(x, t, \varphi) = \begin{bmatrix} -\hat{W} \beta |\hat{W}| \frac{S \hat{T}}{\hat{P}} \\ 0 \\ -\frac{4 \hat{T}^2 (\gamma - 1) K(\hat{T} - T_{2p})}{\hat{P} D} \frac{1}{r} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{a + \hat{W} \frac{a^2}{\hat{P}}}, \lambda_2 = r \frac{\hat{P}}{\hat{T} a^2 \hat{W} \gamma}, \lambda_3 = \frac{1}{-a + \hat{W} \frac{a^2}{\hat{P}}}.$$

Підставимо значення матриць Φ , B і кореня λ_1 :

$$\left(\frac{-a^2 (-a^2) \hat{T} \gamma D_j \hat{W}}{\hat{P} \left(a + \hat{W} \frac{a^2}{\hat{P}} \right) r} - \hat{T} \left(\frac{\gamma \hat{T}}{r} - 1 \right) \frac{a^2}{\hat{P}} \right) d\hat{W} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{-\left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2}\right) \hat{T} a^2 \left(\frac{\gamma \hat{T}}{r} - 1\right)}{a \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) \hat{P}} + \frac{a^2 \hat{W} \gamma D_j \hat{T}}{r \hat{P}} - \frac{a^2 \gamma \hat{W} D_j \hat{T} 2a^2 \hat{W}}{\hat{P} a \hat{P} \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) r} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(-\frac{a^2 \hat{W} \gamma \hat{T}}{r \hat{P}} + \frac{\hat{T} a^2 \gamma \hat{W} 2a^2 \hat{W}}{\hat{P} a \hat{P} \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) r} + \frac{a^2 \gamma \hat{W} \hat{T} \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2}\right) o^2}{a^2 \hat{P} \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right)^2 r} \right) d\hat{T} + \\
& + \left(\frac{\beta \gamma \hat{T} \hat{W} a^2 S a^2 D_j |\hat{W}| \hat{T} \hat{W}}{\hat{P} a^2 \hat{P} \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right)^2 r} + \frac{-\beta \hat{T} \hat{W} \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1\right) |\hat{W}| \hat{T} a^2}{\hat{P} a \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) \hat{P}} - \frac{(\gamma - 1) 4T^2 (\hat{T} - T_{sp}) K}{Dr \hat{P}} \right) + \\
& + \left(\frac{4\hat{T}^2 (\hat{T} - T_{sp}) K 2a^2 \hat{W} (\gamma - 1)}{\hat{P} a \hat{P} \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) Dr} + \frac{(\gamma - 1) 4\hat{T}^2 (\hat{T} - T_{sp}) K \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2}\right) a^2}{\hat{P} a^2 \left(1 + \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right)^2 Dr} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Після всіх спрощень записуємо рівняння першої сім'ї характеристик:

$$\begin{aligned}
dt &= \tilde{\lambda}_1 dx, \\
& \left(\frac{a^3 \hat{T} \gamma D_j \hat{W}}{\left(\hat{P} + a \hat{W}\right) r} - \frac{\left(\hat{T} \gamma - r\right) T a^2}{r P} \right) d\hat{W} + \\
& + \left(\frac{-\hat{T} \left(\hat{P} - a \hat{W}\right) a \left(T \gamma - r\right)}{\hat{P}^2 r} + \frac{a^2 \gamma \hat{W} D_j \hat{T}}{r \hat{P}} - \frac{2 \gamma \hat{T} D_j \hat{W}^2 a^3}{\hat{P} \left(\hat{P} + a \hat{W}\right) r} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(\frac{\beta \hat{T}^2 \hat{W}^2 a^2 \gamma D_j |\hat{W}|}{\left(\hat{P} + a \hat{W}\right)^2 r} - \frac{\beta \hat{T}^2 \hat{W} \hat{S} \left(\hat{T} \gamma - a\right) a |\hat{W}|}{\left(\hat{P} + a \hat{W}\right) r \hat{P}} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Таким же чином підставляємо λ_2 :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-a^2 \hat{W} r \hat{P} (-a^2) \gamma D_j \hat{T}}{\hat{P} a^2 \hat{T} \gamma \hat{W} r} - \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1 \right) \frac{a^2 \hat{T}}{\hat{P}} \right) d\hat{W} + \\
& + \left(\frac{-r \hat{P} \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2} \right) a^2 \hat{T} \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1 \right)}{a^2 \hat{W} \hat{T} \gamma \hat{P}} + \frac{a^2 \hat{W} \hat{T} \gamma D_j \hat{T}}{r \hat{P}} - \frac{2 \gamma r \hat{W} \hat{P} a^2 D_j \hat{T} a^2 \hat{W}}{\hat{P} \hat{P} a^2 \hat{T} \gamma r \hat{W}} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(-\frac{a^2 \hat{T} \gamma \hat{W}}{r \hat{P}} + \frac{2 \hat{W} \hat{P} r a^2 \gamma \hat{W} \hat{T} a^2}{\hat{P} a^2 r \hat{P} \hat{T} \gamma \hat{W}} + \frac{\hat{P}^2 r^2 a^2 \gamma \hat{W} \hat{T} \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2} \right) a^2}{\hat{W}^2 a^4 \hat{T}^2 \hat{P} \gamma^2 r} \right) d\hat{T} + \\
& + \left(\frac{\hat{P}^2 \hat{T} r^2 \beta S \hat{W} a^2 |\hat{W}| \hat{T} a^2 \gamma D_j \hat{W}}{\hat{P} a^4 \hat{T}^2 \gamma^2 r \hat{W}^2 \hat{P}} + \frac{-\hat{P} \beta \hat{W} S r \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1 \right) a^2 \hat{T} |\hat{W}| \hat{T}}{\hat{P} a^2 \hat{T} \gamma \hat{W} \hat{P}} - \frac{4(\gamma-1) \hat{T}^2 (\hat{T} - T_{cp}) K}{r D \hat{P}} + \right. \\
& \left. + \frac{2 r \hat{P} 4(\gamma-1) \hat{T}^2 \hat{W} (\hat{T} - T_{cp}) K a^2}{\hat{P} a^2 \hat{T} \gamma W D r \hat{P}} + \frac{\hat{P}^2 r^2 4(\gamma-1) \hat{T}^2 (\hat{T} - T_{cp}) K \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2} \right) a^2}{a^4 \hat{T}^2 D \gamma^2 \hat{P} \hat{W}^2 r} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Після всіх спрощень запишемо рівняння другої сім'ї характеристик:

$$\begin{aligned}
& dt = \tilde{\lambda}_2 dx, \\
& \left(a^2 D_j - \frac{(\hat{T} \gamma - r) a^2 \hat{T}}{r \hat{P}} \right) d\hat{W} + \left(-\frac{(\hat{P}^2 - a^2 \hat{W}^2) (\hat{T} \gamma - r)}{\hat{W} \hat{P}^2 \gamma} + \frac{\hat{W} a^2 \gamma D_j \hat{T}}{r \hat{P}} - \frac{2 \hat{W} a^2 D_j}{\hat{P}} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(-\frac{\hat{W} a^2 \gamma \hat{T}}{r \hat{P}} + \frac{2 \hat{W} a^2}{\hat{P}} + \frac{r (\hat{P}^2 - a^2 \hat{W}^2)}{\hat{P} \hat{T} \gamma \hat{W}} \right) d\hat{T} + \left(\frac{r \beta S |\hat{W}| D_j}{\gamma} - \frac{\beta |\hat{W}| S (T \gamma - r) \hat{T}}{\hat{P} \gamma} - \right. \\
& \left. - \frac{4(\gamma-1) (T - T_{cp}) T^2 K}{D r P} + 8 \frac{T (\gamma-1) K (T - T_{cp})}{D \gamma P} + \frac{4 r K (\gamma-1) (\hat{T} - T_{cp}) (\hat{P}^2 - \hat{W}^2 a^2)}{\hat{P} a^2 \gamma^2 \hat{W}^2 D} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

І нарешті підставимо λ_3 :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-a^2 \hat{W} (-a^2) \gamma D_j \hat{T}}{\left(-a + \hat{W} \frac{a^2}{\hat{P}}\right) r \hat{P}} - a^2 \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1\right) \frac{\hat{T}}{\hat{P}} \right) d\hat{W} + \\
& + \left(\frac{-\hat{T} \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2}\right) a^2 \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1\right)}{-a \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) \hat{P}} + \hat{W} \frac{a^2 \gamma \hat{T} D_j}{r \hat{P}} - \frac{a^2 \hat{W} \gamma \hat{T} D_j \hat{W} 2a^2}{-\hat{P} a \hat{P} \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) r} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(-\hat{T} \frac{\hat{W} a^2 \gamma}{r \hat{P}} + \hat{W} \frac{a^2 \gamma \hat{W} \hat{T} 2a^2}{-\hat{P} a \hat{P} \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) r} + \hat{W} \frac{a^2 \gamma \hat{T} \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2}\right) a^2}{\hat{P} a^2 \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right)^2 r} \right) d\hat{T} + \\
& + \left(\hat{W} \frac{\beta \hat{W} \hat{T} |\hat{W}| a^2 S a^2 \gamma D_j \hat{T}}{\hat{P} a^2 \hat{P} \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right)^2 r} + \frac{-\beta S W \hat{T} |W| \left(\frac{\hat{T} \gamma}{r} - 1\right) a^2 \hat{T}}{-\hat{P} a \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) \hat{P}} - \hat{T}^2 \frac{4(\gamma - 1)(\hat{T} - T_{ep}) K}{D r \hat{P}} + \right. \\
& \left. + 4 \frac{\hat{T}^2 (\gamma - 1)(\hat{T} - T_{ep}) 2K a^2 \hat{W}}{-\hat{P} a \hat{P} \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right) D r} + K \frac{(\gamma - 1)(\hat{T} - T_{ep}) \left(1 - \hat{W}^2 \frac{a^2}{\hat{P}^2}\right) 4a^2 \hat{T}^2}{\hat{P} a^2 \left(1 - \hat{W} \frac{a}{\hat{P}}\right)^2 r D} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Спростивши, отримаємо співвідношення 3-ої сім'ї характеристик:

$$dt = \tilde{\lambda}_3 dx,$$

$$\left(-\hat{W} \frac{D_j \hat{T} a^3 \gamma}{(P - \hat{W} a) r} - \frac{(T \gamma - r) a^2 T}{r \hat{P}} \right) d\hat{W} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{(\hat{P} + \hat{W}a)\hat{T}(\hat{T}\gamma - r)a}{\hat{P}^2 r} + D_j \frac{\hat{W}a^2 \gamma \hat{T}}{r\hat{P}} + \frac{2\hat{W}^2 \gamma D_j a^3 \hat{T}}{\hat{P}(\hat{P} - \hat{W}a)r} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(\frac{\beta S \hat{W}^2 a^2 \gamma \hat{T}^2 |\hat{W}| D_j}{(P - \hat{W}a)^2 r} + \frac{\beta \hat{T}^2 \hat{W} (\hat{T}\gamma - r) Sa |\hat{W}|}{(\hat{P} - \hat{W}a)r\hat{P}} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

В решті-решт маємо 3 рівняння, що описують напрямки характеристик та 3 диференціальних співвідношення:

$$dt = \tilde{\lambda}_1 dx,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a^3 \hat{T} \gamma D_j \hat{W}}{(\hat{P} + a\hat{W})r} - \frac{(\hat{T}\gamma - r)Ta^2}{rP} \right) d\hat{W} + \\
& + \left(\frac{-\hat{T}(\hat{P} - a\hat{W})a(T\gamma - r)}{\hat{P}^2 r} + \frac{a^2 \gamma \hat{W} D_j \hat{T}}{r\hat{P}} - \frac{2\gamma \hat{T} D_j \hat{W}^2 a^3}{\hat{P}(\hat{P} + a\hat{W})r} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(\frac{\beta \hat{T}^2 \hat{W}^2 a^2 \gamma D_j |\hat{W}|}{(\hat{P} + a\hat{W})^2 r} - \frac{\beta \hat{T}^2 \hat{W} \hat{S} (\hat{T}\gamma - a)a |\hat{W}|}{(\hat{P} + a\hat{W})r\hat{P}} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

$$dt = \tilde{\lambda}_2 dx,$$

$$\begin{aligned}
& \left(a^2 D_j - \frac{(\hat{T}\gamma - r)a^2 \hat{T}}{r\hat{P}} \right) d\hat{W} + \left(-\frac{(\hat{P}^2 - a^2 \hat{W}^2)(\hat{T}\gamma - r)}{\hat{W}\hat{P}^2 \gamma} + \frac{\hat{W}a^2 \gamma D_j \hat{T}}{r\hat{P}} - \frac{2\hat{W}a^2 D_j}{\hat{P}} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(-\frac{\hat{W}a^2 \gamma \hat{T}}{r\hat{P}} + \frac{2\hat{W}a^2}{\hat{P}} + \frac{r(\hat{P}^2 - a^2 \hat{W}^2)}{\hat{P}\hat{T}\gamma\hat{W}} \right) d\hat{T} + \left(\frac{r\beta S |\hat{W}| D_j}{\gamma} - \frac{\beta |\hat{W}| S (T\gamma - r)\hat{T}}{\hat{P}\gamma} - \right. \\
& \left. - \frac{4(\gamma - 1)(T - T_{cp})T^2 K}{DrP} + 8 \frac{T(\gamma - 1)K(T - T_{cp})}{D\gamma P} + \frac{4rK(\gamma - 1)(\hat{T} - T_{cp})(\hat{P}^2 - \hat{W}^2 a^2)}{\hat{P}a^2 \gamma^2 \hat{W}^2 D} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

$$dt = \tilde{\lambda}_3 dx,$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\hat{W} \frac{D_j \hat{T} a^3 \gamma}{(\hat{P} - \hat{W} a) r} - \frac{(\hat{T} \gamma - r) a^2 \hat{T}}{r \hat{P}} \right) d\hat{W} + \\
& + \left(\frac{(\hat{P} + \hat{W} a) \hat{T} (\hat{T} \gamma - r) a}{\hat{P}^2 r} + D_j \frac{\hat{W} a^2 \gamma \hat{T}}{r \hat{P}} + \frac{2 \hat{W}^2 \gamma D_j a^3 \hat{T}}{\hat{P} (\hat{P} - \hat{W} a) r} \right) d\hat{P} + \\
& + \left(\frac{\beta S \hat{W}^2 a^2 \gamma \hat{T}^2 |\hat{W}| D_j}{(\hat{P} - \hat{W} a)^2 r} + \frac{\beta \hat{T}^2 \hat{W} (\hat{T} \gamma - r) S a |\hat{W}|}{(\hat{P} - \hat{W} a) r \hat{P}} \right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Застосуємо метод Масо [7], щоб розв'язати отримані раніше диференціальні співвідношення. Даний метод полягатиме в заміні диференціальних рівнянь характеристик із застосуванням кінцево-різницевого методів. Важливим є те, що в попередніх розділах знайдені корені λ_1 , λ_2 , λ_3 були упорядковані за збільшенням модулів їх значень.

Використовуватимемо алгоритм методу Масо для розрахунку параметрів газового потоку перехідного режиму протікання газу, пов'язаних з раптовою зміною крайових умов. Алгоритм слідує наступним крокам:

а) одержуємо точки x_i , $i = 1, 2, \dots, N + 1$, шляхом розділення відрізка $[0, L]$ на N частин. Тоді будуть відомі параметри $(x_i, t_i, \hat{W}_i(x_i, t_i), \hat{P}_i(x_i, t_i), \hat{T}_i(x_i, t_i))$ для будь-якої точки i на k -му часовому шарі (рис. 2.1).

б) кількість часових шарів, які потрібно обчислити позначатимемо як k_{\max} .

На цьому етапі розглядатимемо процедуру розрахунку параметрів газового потоку для третього вузла на часовому шарі $(k + 1)$, де $k + 1 = 2, 4, \dots$, тобто на парному ЧШ. Для цього використаємо параметри другого вузла на попередньому часовому шарі з непарним номером (рис. 2.1).

Пункт 1-й. Припускаємо, що задаються крайові умови

$$\hat{P}(0,t) = \hat{P}^0(t), \quad \hat{T}(0,t) = \hat{T}^0(t).$$

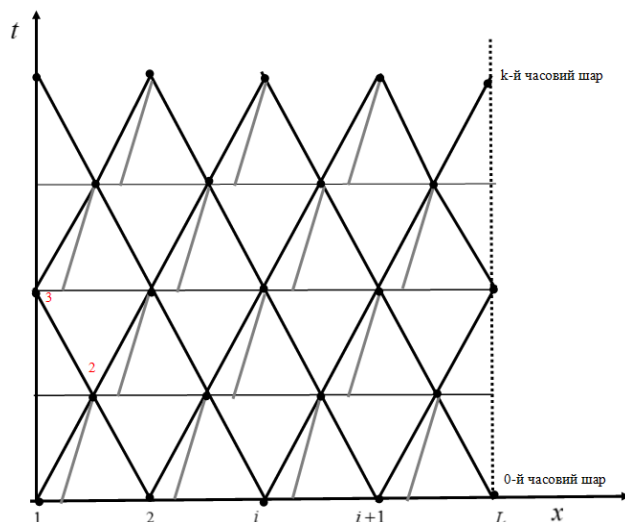


Рисунок 2.1 – Сітка для розрахунку параметрів у вузлах

Пункт 2-й. Взятши параметри у вузлі 2 $(x_2, t_2, \hat{W}_2(x_2, t_2), \hat{P}_2(x_2, t_2), \hat{T}_2(x_2, t_2))$ на непарному ЧШ, і знаходимо параметри у вузлі 3 (рис 2.1) $(x_3, t_3, \hat{W}_3(x_3, t_3), \hat{P}_3(x_3, t_3), \hat{T}_3(x_3, t_3))$ на наступному (парному) ЧШ.

Пункт 3-й. У третьому вузлі матиме параметр x_3 рівний нулю, тобто він розташований на осі ординат. З цього випливає, що

$$t_3^{(1)} = t_2 - x_2 \tilde{\lambda}_{32}.$$

Якщо провести пряму від другої точки до осі ординат, то $t_3^{(1)}$ є точкою їх перетину.

Пункт 4-й. З крайових умов можемо знайти $\hat{T}_3(x_3, t_3)$ і $\hat{P}_3(x_3, t_3)$, так як на початку ділянки температура і тиск задані у вигляді функцій часу. Це за умови відомого параметру \hat{t}_3 .

$$\hat{T}_3^{(1)} = \hat{T}^0(t_3^{(1)}),$$

$$\hat{P}_3^{(1)} = \hat{P}^0(t_3^{(1)}).$$

Пункт 5-й. Візьмемо характеристику, тобто відрізок між другим та третім вузлами, та за допомогою диференціального співвідношення запишемо рівняння для знаходження першого наближення $\hat{W}(x, t)$ у третьому вузлі, тобто $\hat{W}_3^{(1)}$

$$\begin{aligned} & \left(-\hat{W}_2 \frac{D_j \hat{T}_2 a^3 \gamma}{(\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r} - \frac{(\hat{T}_2 \gamma - r) a^2 \hat{T}_2}{r \hat{P}_2} \right) (\hat{W}_3^{(1)} - \hat{W}_2) + \\ & + \left(\frac{(\hat{P}_2 + \hat{W}_2 a) \hat{T}_2 (\hat{T}_2 \gamma - r) a}{\hat{P}_2^2 r} + D_j \frac{\hat{W}_2 a^2 \gamma \hat{T}_2}{r \hat{P}_2} + \frac{2 \hat{W}_2^2 \gamma D_j a^3 \hat{T}_2}{\hat{P}_2 (\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r} \right) (\hat{P}_3^{(1)} - \hat{P}_2) + \\ & + \left(\frac{\beta S \hat{W}_2^2 a^2 \gamma \hat{T}_2^2 |\hat{W}_2| D_j}{(P_2 - \hat{W}_2 a)^2 r} + \frac{\beta \hat{T}_2^2 \hat{W}_2 (\hat{T}_2 \gamma - r) S a |\hat{W}_2|}{(\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r \hat{P}_2} \right) (x_3^{(1)} - x_2) = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2^{(1)} &= -\hat{W}_2 \frac{D_j \hat{T}_2 a^3 \gamma}{(\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r} - \frac{(\hat{T}_2 \gamma - r) a^2 \hat{T}_2}{r \hat{P}_2}, \\ \tilde{N}_2^{(1)} &= \frac{(\hat{P}_2 + \hat{W}_2 a) \hat{T}_2 (\hat{T}_2 \gamma - r) a}{\hat{P}_2^2 r} + D_j \frac{\hat{W}_2 a^2 \gamma \hat{T}_2}{r \hat{P}_2} + \frac{2 \hat{W}_2^2 \gamma D_j a^3 \hat{T}_2}{\hat{P}_2 (\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r}, \\ \tilde{C}_2^{(1)} &= \frac{\beta S \hat{W}_2^2 a^2 \gamma \hat{T}_2^2 |\hat{W}_2| D_j}{(P_2 - \hat{W}_2 a)^2 r} + \frac{\beta \hat{T}_2^2 \hat{W}_2 (\hat{T}_2 \gamma - r) S a |\hat{W}_2|}{(\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r \hat{P}_2}, \quad \widetilde{P P}_2^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння, використовуючи нові позначення

$$\tilde{M}_2^{(1)} (\hat{W}_3^{(1)} - \hat{W}_2) + \tilde{N}_2^{(1)} (\hat{P}_3^{(1)} - \hat{P}_2) + \tilde{C}_2^{(1)} (x_3^{(1)} - x_2) = 0.$$

Покладемо $l = 1$.

Зробимо уточнення параметрів у вузлі 3 після знаходження його параметрів $(x_3, t_3^{(l)}, \hat{W}_3^{(l)}, \hat{P}_3^{(l)}, \hat{T}_3^{(l)})$ за допомогою наступних пунктів.

Пункт 6-й. Обчислюємо

$$\tilde{\lambda}_{33}^{(l)} = \frac{1}{\hat{W}_3^{(l)} \frac{a}{\hat{P}_3^{(l)}} - a}.$$

Пункт 7-й. Розраховуємо

$$\tilde{\lambda}_{32}^{(l+1)} = (\tilde{\lambda}_{33}^{(l)} + \tilde{\lambda}_{32}^{(l)}) \frac{1}{2}.$$

Пункт 8-й. Підставивши параметри другого та третього вузлів маємо

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2^{(l+1)} &= -\frac{1}{2} \left(\left(\hat{W}_2 \frac{D_j a^3 \gamma \hat{T}_2}{(\hat{P}_2 - a \hat{W}_2) r} + \frac{(\hat{T}_2 \gamma - r) a^2 \hat{T}_2}{r \hat{P}_2} \right) + \left(\hat{W}_3^{(l)} \frac{D_j a^3 \gamma \hat{T}_3^{(l)}}{(\hat{P}_3^{(l)} - a \hat{W}_3^{(l)}) r} + \frac{(\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r) a^2 \hat{T}_3^{(l)}}{r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right), \\ \tilde{N}_2^{(l+1)} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{(\hat{P}_2 + a \hat{W}_2) a \hat{T}_2 (\hat{T}_2 \gamma - r)}{\hat{P}_2^2 r} + \hat{W}_2 \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_2}{r \hat{P}_2} + \hat{W}_2^2 \frac{\gamma a^3 D_j 2 \hat{T}_2}{(\hat{P}_2 - a \hat{W}_2) r \hat{P}_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(\hat{P}_3^{(l)} + a \hat{W}_3^{(l)}) a \hat{T}_3^{(l)} (\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r)}{\hat{P}_3^{(l)2} r} + \hat{W}_3^{(l)} \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_3^{(l)}}{r \hat{P}_3^{(l)}} + \hat{W}_3^{(l)2} \frac{\gamma a^3 D_j 2 \hat{T}_3^{(l)}}{(\hat{P}_3^{(l)} - \hat{W}_3^{(l)} a) r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right), \\ \tilde{C}_2^{(l+1)} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\beta \hat{T}_2^2 \hat{W}_2^2 S a^2 \gamma |\hat{W}_2| D_j}{(\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a)^2 r} + \frac{\beta S |\hat{W}_2| \hat{T}_2^2 \hat{W}_2 (\hat{T}_2 \gamma - r) a}{(\hat{P}_2 - \hat{W}_2 a) r \hat{P}_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\beta \hat{T}_3^{2(l)} \hat{W}_3^{(l)2} S a^2 \gamma |\hat{W}_3^{(l)}| D_j}{(\hat{P}_3^{(l)} - \hat{W}_3^{(l)} a)^2 r} + \frac{\beta |\hat{W}_3^{(l)}| \hat{T}_3^{2(l)} \hat{W}_3^{(l)} S (\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r) a}{(\hat{P}_3^{(l)} - a \hat{W}_3^{(l)}) r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\widetilde{PP}_2^{(l+1)} = 0.$$

Пункт 9-й. Знаходимо координату уточненого третього вузла за формулою:

$$t_3^{(l+1)} = t_2 - x_2 \tilde{\lambda}_{32}^{(l+1)}.$$

Пункт 10-й. За допомогою співвідношення з пункту 8 та крайових умов знайдемо $\hat{P}_3^{(l+1)}$ і $\hat{T}_3^{(l+1)}$

$$\hat{T}_3^{(l+1)} = \hat{T}^0(t_3^{(l+1)}),$$

$$\hat{P}_3^{(l+1)} = \hat{P}^0(t_3^{(l+1)}).$$

Пункт 11-й. Знаходимо $\hat{W}_3^{(l+1)}$, використовуючи рівняння

$$\tilde{M}_2^{(l+1)}(\hat{W}_3^{(l+1)} - \hat{W}_2) + \tilde{N}_2^{(l+1)}(\hat{P}_3^{(l+1)} - \hat{P}_2) + \widetilde{PP}_2^{(l+1)}(\hat{T}_3^{(l+1)} - \hat{T}_2) - \tilde{C}_2^{(l+1)}x_2 = 0.$$

Пункт 12-й. Значення $\hat{W}_3^{(l+1)}$, $t_3^{(l+1)}$, $\hat{P}_3^{(l+1)}$, $\hat{T}_3^{(l+1)}$, x_3 вважаються знайденими тільки за умови виконання наступних нерівностей

$$|\hat{W}_3^{(l+1)} - \hat{W}_3^{(l)}| < \hat{\varepsilon}$$

$$|t_3^{(l+1)} - t_3^{(l)}| < \hat{\varepsilon}.$$

Ці значення – це параметри у третьому вузлі на наступному $(l+1)$ -му часовому шарі. Далі можна шукати параметри останньої точки на цьому $(l+1)$ -му часовому шарі. Якщо ж ці нерівності не виконуються збільшуємо l на 1 і повертаємось до 5-го пункту.

Розглянемо наступний алгоритм, який застосуємо для знаходження параметрів потоку газу для вузла з номером $N + 1$ на часовому шарі з парним номером. Для їх знаходження знадобляться параметри вузла з таким же номером на двох попередніх часових шарах (рис. 2.2) [3].

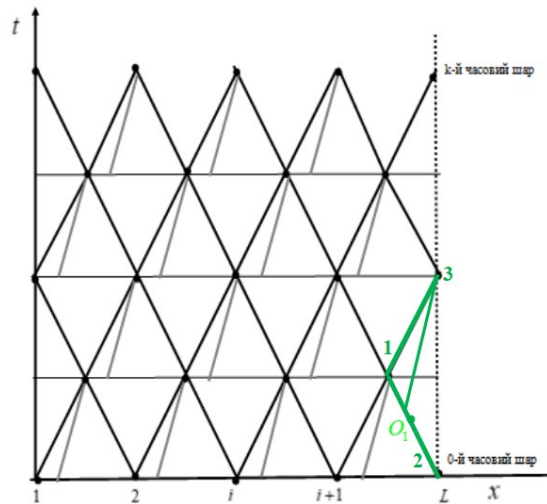


Рисунок 2.2 – Знаходження параметрів у вузлі 3 на кінці ділянки ТП

Припускаємо, що задані наступні крайові мови наприкінці ділянки:

$$\hat{G}(L, t) = \hat{G}^1(t).$$

Пункт 1-й. Взяти параметри першого вузла на k -му ЧШ і параметри другого вузла на попередньому ЧШ, отримуємо параметри у вузлі 3 на $(k + 1)$ -му (парному) часовому шарі. Третій вузол має параметр x_3 , який дорівнюватиме L через те, що вона відповідає кінцю ділянки ТП. Якщо параметр t_3 буде відомим, тоді знайти $\hat{W}_3(x_3, t_3)$ буде можливим за допомогою крайових умов, бо витрата наприкінці ділянки задана як функція часу.

Пункт 2-й. Знайдемо координати точки \hat{O} , якою позначимо середину відрізка, що з'єднує перший та другий вузли:

$$x_0 = (x_2 + x_1) \cdot \frac{1}{2}, \quad t_0 = (t_2 + t_1) \cdot \frac{1}{2}, \quad \hat{W}_0 = (\hat{W}_2 + \hat{W}_1) \frac{1}{2},$$

$$\hat{P}_0 = (\hat{P}_2 + \hat{P}_1) \frac{1}{2}, \quad \hat{T}_0 = (\hat{T}_2 + \hat{T}_1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Пункт 3-й. Обчислимо параметр $t_3^{(1)}$

$$\tilde{\lambda}_{11} \cdot (L - x_1) + t_1 = t_3^{(1)}.$$

Пункт 4-й. Знаходимо координати нової точки $\hat{O}_1 = (x_0^{(1)}, t_0^{(1)})$ за формулою:

$$\begin{cases} (L - x_0^{(1)}) = \frac{t_3^{(1)} - t_0^{(1)}}{\tilde{\lambda}_{20}}, \\ \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} = \frac{t_1 - t_0^{(1)}}{(x_1 - x_0^{(1)})}. \end{cases}$$

Пункт 5-й. Позначимо

$$\frac{1}{\hat{v}^{(1)}} = \frac{x_2 - x_0^{(1)}}{x_0^{(1)} - x_1} = \frac{t_0^{(1)} - t_2}{t_1 - t_0^{(1)}}.$$

Пункт 6-й. Знайдемо значення $\hat{P}(x, t)$, $\hat{W}(x, t)$, $\hat{T}(x, t)$ у точці O_1 :

$$\begin{cases} \hat{P}_0^{(1)} = \frac{\hat{v}^{(1)} \cdot \hat{P}_2 + \hat{P}_1}{1 + \hat{v}^{(1)}}; \\ \hat{W}_0^{(1)} = \frac{\hat{v}^{(1)} \cdot \hat{W}_2 + \hat{W}_1}{1 + \hat{v}^{(1)}}; \\ \hat{T}_0^{(1)} = \frac{\hat{v}^{(1)} \cdot \hat{T}_2 + \hat{T}_1}{1 + \hat{v}^{(1)}}. \end{cases}$$

Пункт 7-й. За допомогою крайових умов знаходимо перше наближення

$$\hat{W}(x,t): \hat{W}_3^{(1)} = \frac{\hat{G}^L(t_3^{(1)})}{S}.$$

Пункт 8-й. Розглянемо відрізки, які поєднують вузли 1 і 3, та точку 0_1 і вузол 3, використаємо диференціальні співвідношення вздовж цих характеристик. Представимо систему рівнянь для визначення перших наближень для тиску $\hat{P}(x,t)$ та температури $\hat{T}(x,t)$ у вузлі 3:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{a^3 \hat{W}_1 \gamma D_j \hat{T}_1}{(\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a) r} - \frac{(\hat{T}_1 \gamma - r) a^2 \hat{T}_1}{r \hat{P}_1} \right) (\hat{W}_3^{(1)} - \hat{W}_1) + \\ & + \left(\frac{-(\hat{P}_1 - a \hat{W}_1) a \hat{T}_1 (\hat{T}_1 \gamma - r)}{\hat{P}_1^2 r} + \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_1 \hat{W}_1}{r \hat{P}_1} - \frac{2 \hat{W}_1^2 \gamma \hat{T}_1 D_j a^3}{\hat{P}_1 (\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a) r} \right) (\hat{P}_3^{(1)} - \hat{P}_1) + \\ & + \left(\frac{\beta \hat{T}_1^2 S \gamma \hat{W}_1^2 a^2 D_j |\hat{W}_1|}{(\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a)^2 r} - \frac{\beta \hat{T}_1^2 S \hat{W}_1 (\hat{T}_1 \gamma - r) |\hat{W}_1| a}{\hat{P}_1 (\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a) r} \right) (L - x_1) = 0, \\ & \left(a^2 D_j - \frac{(\hat{T}_0^{(1)} \gamma - r) a^2 \hat{T}_0^{(1)}}{r \hat{P}_0^{(1)}} \right) (\hat{W}_3^{(1)} - \hat{W}_0^{(1)}) + \\ & + \left(-\frac{(\hat{P}_0^{(1)2} - a^2 \hat{W}_0^{(1)2}) (\hat{T}_0^{(1)} \gamma - r)}{\gamma \hat{P}_0^{(1)2} \hat{W}_0^{(1)}} + \hat{W}_0^{(1)} \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_0^{(1)}}{r \hat{P}_0^{(1)}} - \hat{W}_0^{(1)} \frac{2 a^2 D_j}{\hat{P}_0^{(1)}} \right) (\hat{P}_3^{(1)} - \hat{P}_0^{(1)}) + \\ & + \left(-\hat{W}_0^{(1)} \frac{a^2 \gamma \hat{T}_0^{(1)}}{r \hat{P}_0^{(1)}} + \frac{2 \hat{W}_0^{(1)} a^2}{\hat{P}_0^{(1)}} + \frac{r (\hat{P}_0^{(1)2} - a^2 \hat{W}_0^{(1)2})}{\hat{T}_0^{(1)} \gamma \hat{W}_0^{(1)} \hat{P}_0^{(1)}} \right) (\hat{T}_3^{(1)} - \hat{T}_0^{(1)}) + \\ & + \left(D_j \frac{r \beta S |\hat{W}_0^{(1)}|}{\gamma} - \frac{\beta |\hat{W}_0^{(1)}| (\hat{T}_0^{(1)} \gamma - r) T_0^{(1)} S}{\gamma \hat{P}_0^{(1)}} - \frac{4 (\gamma - 1) \hat{T}_0^{(1)2} K (\hat{T}_0^{(1)} - T_{zp})}{Dr \hat{P}_0^{(1)}} \right) + \\ & + K \frac{8 (\gamma - 1) \hat{T}_0^{(1)} (T_0^{(1)} - T_{zp})}{D \hat{P}_0^{(1)} \gamma} + K \frac{4 r (\gamma - 1) (\hat{T}_0^{(1)} - T_{zp}) (\hat{P}_0^{(1)2} - a^2 \hat{W}_0^{(1)2})}{\hat{P}_0^{(1)} a^2 \gamma^2 \hat{W}_0^{(1)2} D} \right) (L - x_0^{(1)}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Покладемо $l = 1$.

Після знаходження параметрів вузла 3 $(L, t_3^{(l)}, \hat{W}_3^{(l)}, \hat{P}_3^{(l)}, \hat{T}_3^{(l)})$ зробимо їх уточнення за допомогою наступних пунктів.

Пункт 9-й. Знаходимо

$$\tilde{\lambda}_{13}^{(l)} = \frac{1}{\frac{S\hat{W}_3^{(l)}\hat{T}_3^{(l)}\alpha}{P_3^{(l)}} + \sqrt{\hat{S}\hat{T}_3^{(l)}\alpha}}, \quad \tilde{\lambda}_{23}^{(l)} = \frac{\hat{T}_3^{(l)}\hat{P}_3^{(l)} - \gamma D_j \hat{P}_3^{(l)2}}{\gamma S \hat{T}_3^{(l)2} \alpha \hat{W}_3^{(l)}}.$$

Пункт 10-й. Розраховуємо

$$\tilde{\lambda}_{11}^{(l+1)} = \left(\lambda_{13}^{(l)} + \tilde{\lambda}_{11} \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad \tilde{\lambda}_{20}^{(l+1)} = \left(\tilde{\lambda}_{23}^{(l)} + \tilde{\lambda}_{20}^{(l)} \right) \cdot \frac{1}{2}.$$

Пункт 11. Для першого вузла маємо уточнені коефіцієнти рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1^{(l+1)} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a^3 \hat{W}_1 \gamma D_j \hat{T}_1}{(\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a) r} - \frac{(\hat{T}_1 \gamma - r) a^2 \hat{T}_1}{r \hat{P}_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a^3 \hat{W}_3^{(l)} \gamma D_j \hat{T}_3^{(l)}}{(\hat{P}_3^{(l)} + \hat{W}_3^{(l)} a) r} - \frac{(\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r) a^2 \hat{T}_3^{(l)}}{r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right), \\ \tilde{N}_1^{(l+1)} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{-(\hat{P}_1 - a \hat{W}_1) a \hat{T}_1 (\hat{T}_1 \gamma - r)}{\hat{P}_1^2 r} + \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_1 \hat{W}_1}{r \hat{P}_1} - \frac{2 \hat{W}_1^2 \gamma \hat{T}_1 D_j a^3}{\hat{P}_1 (\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a) r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-(\hat{P}_3^{(l)} - \hat{W}_3^{(l)} a) a \hat{T}_3^{(l)} (\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r)}{\hat{P}_3^{(l)2} r} + \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_3^{(l)} \hat{W}_3^{(l)}}{r \hat{P}_3^{(l)}} - \frac{2 \hat{W}_3^{(l)2} \gamma \hat{T}_3^{(l)} D_j a^3}{\hat{P}_3^{(l)} (\hat{P}_3^{(l)} + \hat{W}_3^{(l)} a) r} \right) \right), \\ \widetilde{PP}_1^{(l+1)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_1^{(l+1)} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\beta \hat{T}_1^2 \hat{W}_1^2 S \gamma a^2 D_j |\hat{W}_1|}{(P_1 + \hat{W}_1 a)^2 r} - \frac{\beta \hat{T}_1^2 \hat{W}_1 S (\hat{T}_1 \gamma - r) |\hat{W}_1| o}{\hat{P}_1 (\hat{P}_1 + \hat{W}_1 a) r} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\beta \hat{T}_3^{(l)2} \hat{W}_3^{(l)2} S \gamma a^2 D_j |\hat{W}_3^{(l)}|}{(\hat{P}_3^{(l)} + \hat{W}_3^{(l)} a)^2 r} - \frac{\beta \hat{T}_3^{(l)2} \hat{W}_3^{(l)} S (\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r) |\hat{W}_3^{(l)}| a}{\hat{P}_3^{(l)} (\hat{P}_3^{(l)} + \hat{W}_3^{(l)} a) r} \right) \right).$$

Пункт 12. Аналогічно маємо уточнені коефіцієнти рівняння для точки \hat{O}_1

$$\tilde{M}_{0_1}^{(l+1)} = \frac{1}{2} \left(\left(-\hat{W}_0^1 \frac{D_j a^3 \gamma \hat{T}_0^1}{(\hat{P}_0^1 - \hat{W}_0^1 a) r} - \frac{(\hat{T}_0^1 \gamma - r) a^2 \hat{T}_0^1}{r \hat{P}_0^1} \right) + \right. \\ \left. + \left(-\hat{W}_3^{(l)} \frac{D_j a^3 \gamma \hat{T}_3^{(l)}}{(\hat{P}_3^{(l)} - a \hat{W}_3^{(l)}) r} - \frac{(\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r) a^2 \hat{T}_3^{(l)}}{r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right), \\ \tilde{N}_{0_1}^{(l+1)} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{(\hat{P}_0^1 + a \hat{W}_0^1) a \hat{T}_0^1 (\hat{T}_0^1 \gamma - r)}{\hat{P}_0^1 r} + \hat{W}_0^1 \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_0^1}{r \hat{P}_0^1} + \hat{W}_0^1 \frac{\gamma a^3 D_j 2 \hat{T}_0^1}{(\hat{P}_0^1 - \hat{W}_0^1 a) r \hat{P}_0^1} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{(\hat{P}_3^{(l)} + \hat{W}_3^{(l)} a) a \hat{T}_3^{(l)} (\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r)}{\hat{P}_3^{(l)2} r} + \hat{W}_3^{(l)} \frac{a^2 \gamma D_j \hat{T}_3^{(l)}}{r \hat{P}_3^{(l)}} + \hat{W}_3^{(l)2} \frac{\gamma a^3 D_j 2 \hat{T}_3^{(l)}}{(\hat{P}_3^{(l)} - a \hat{W}_3^{(l)}) r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right), \\ \widetilde{PP}_{0_1}^{(l+1)} = 0,$$

$$\tilde{C}_{0_1}^{(l+1)} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\beta \hat{T}_0^1 \hat{W}_0^1 S a^2 \gamma |\hat{W}_0^1| D_j}{(\hat{P}_0^1 - \hat{W}_0^1 a)^2 r} + \frac{\beta |\hat{W}_0^1| \hat{T}_0^1 \hat{W}_0^1 S (\hat{T}_0^1 \gamma - r) a}{(\hat{P}_0^1 - \hat{W}_0^1 a) r \hat{P}_0^1} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\beta \hat{T}_3^{(l)2} \hat{W}_3^{(l)2} S a^2 \gamma |\hat{W}_3^{(l)}| D_j}{(\hat{P}_3^{(l)} - \hat{W}_3^{(l)} a)^2 r} + \frac{\beta |\hat{W}_3^{(l)}| \hat{T}_3^{(l)2} \hat{W}_3^{(l)} S (\hat{T}_3^{(l)} \gamma - r) o}{(\hat{P}_3^{(l)} - \hat{W}_3^{(l)} a) r \hat{P}_3^{(l)}} \right) \right).$$

Пункт 13-й. Знайдемо уточнені координати третього вузла та точки O :

$$t_3^{(l+1)} = \tilde{\lambda}_{11}^{(l+1)} \cdot (L - x_1) + t_1, \quad \begin{cases} \frac{t_3^{(l+1)} - t_0^{(l+1)}}{\tilde{\lambda}_{20}^{(l+1)}} = (x_3^{(l+1)} - x_0^{(l+1)}), \\ \frac{t_1 - t_0^{(l+1)}}{(x_1 - x_0^{(l+1)})} = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}. \end{cases}$$

Пункт 14-й. Розраховуємо $\hat{v}^{(l+1)}$, $\hat{W}_0^{(l+1)}$, $\hat{T}_0^{(l+1)}$, $\hat{P}_0^{(l+1)}$

$$\hat{v}^{(l+1)} = \frac{x_0^{(l+1)} - x_1}{x_2 - x_0^{(l+1)}}, \quad \begin{cases} \hat{W}_0^{(l+1)} = \frac{\hat{W}_1 + \hat{v}^{(l+1)}\hat{W}_2}{1 + \hat{v}^{(l+1)}}; \\ \hat{P}_0^{(l+1)} = \frac{\hat{P}_1 + \hat{v}^{(l+1)}\hat{P}_2}{1 + \hat{v}^{(l+1)}}; \\ \hat{T}_0^{(l+1)} = \frac{\hat{T}_1 + \hat{v}^{(l+1)}\hat{T}_2}{1 + \hat{v}^{(l+1)}}. \end{cases}$$

Пункт 15-й. За допомогою крайових умов знайдемо наближення $\hat{W}(x, t)$:

$$\hat{W}_3^{(l+1)} = \frac{G^L(t_3^{(l+1)})}{S}.$$

Пункт 16-й. Розв'язуємо наступну систему рівнянь і знаходимо $\hat{P}_3^{(l+1)}$ та

$\hat{T}_3^{(l+1)}$

$$\begin{cases} \tilde{M}_1^{(l+1)}(\hat{W}_3^{(l+1)} - \hat{W}_1) + \tilde{N}_1^{(l+1)}(\hat{P}_3^{(l+1)} - \hat{P}_1) + \\ + \widetilde{PP}_1^{(l+1)}(\hat{T}_3^{(l+1)} - \hat{T}_1) + \tilde{C}_1^{(l+1)}(L - x_1) = 0, \\ \tilde{M}_{0_1}^{(l+1)}(\hat{W}_3^{(l+1)} - \hat{W}_0^{(l+1)}) + \tilde{N}_{0_1}^{(l+1)}(\hat{P}_3^{(l+1)} - \hat{P}_0^{(l+1)}) + \\ + \widetilde{PP}_{0_1}^{(l+1)}(\hat{T}_3^{(l+1)} - \hat{T}_0^{(l+1)}) + \tilde{C}_{0_1}^{(l+1)}(L - x_0^{(l+1)}) = 0. \end{cases}$$

Пункт 17-й. Параметри третього вузла вважаються знайденими лише при умові виконання нерівностей

$$\left| \hat{P}_3^{(l+1)} - \hat{P}_3^{(l)} \right| < \hat{\varepsilon}, \quad \left| \hat{T}_3^{(l+1)} - \hat{T}_3^{(l)} \right| < \hat{\varepsilon}, \quad \left| \hat{t}_3^{(l+1)} - \hat{t}_3^{(l)} \right| < \hat{\varepsilon},$$

тоді можна переходити до 16-го пункту основного алгоритму. Якщо дані нерівності не виконуються, тоді l збільшуємо на одиницю і переходимо до 9-го пункту.

Висновки за розділом 2

У даному розділі кваліфікаційної роботи був описаний чисельний метод характеристик, за допомогою якого розв'язувалися рівняння початково-крайової задачі, що описує перехідний режим течії газу по ділянці ТП великого діаметру. Також при розв'язанні рівнянь враховувався ефект Джоуля-Томсона, що виник через великий діаметр труби.

Був створений алгоритм, який буде корисний при створенні програми для знаходження параметрів потоку газу при заданих крайових умовах.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1

Для виконання обчислень крайової задачі для перехідного режиму течії газу у випадку ДТ великого діаметра було вибрано Mathematica 11.1 [12]. Цей сучасний інструмент комп'ютерної алгебри, розроблений компанією Wolfram Research, пропонує широкий набір засобів для виконання символічних обчислень, аналізу даних і візуалізації математичних виразів.

Ключовою особливістю Mathematica 11.1 є її здатність оперувати символічними виразами, а не лише конкретними числовими даними. Це надає значні переваги під час виконання таких операцій, як інтегрування, диференціювання, розв'язання рівнянь та інших математичних завдань.

В програму вбудовані потужні методи для чисельних та символічних операцій, що дозволяють розв'язувати широкий діапазон математичних задач — від елементарних арифметичних операцій до складних алгебраїчних виразів. Вдосконалені інструменти, що має система, корисні в використанні для створення точних графіків, діаграм, функціональних залежностей та інших графічних елементів. Простий і зрозумілий інтерфейс, який дозволяє зручно вводити команди та полегшує роботу користувачів.

Отже, Mathematica 11.1 є високопродуктивною та універсальною платформою для розв'язання задач символічної математики й виконання чисельних розрахунків. Вона використовується для вирішення математичних завдань, моделювання фізичних та інженерних систем, аналізу їх функціонування та проведення складних аналітичних досліджень.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання перехідних режимів по ділянці ТП великого діаметру

В алгоритмі розв'язання задачі комп'ютерного моделювання перехідних

процесів течії газу по ділянці ТП великого діаметру з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона присутні наступні кроки.

Крок 1. Визначити початкові та крайові умови:

- а) описати фізичні характеристики газу та технічні характеристики ТП;
- б) задати початкові умови газових параметрів та крайові умови на краях ділянки газопроводу.

Крок 2. Задати кількість точок для розбиття ділянки трубопроводу для апроксимації газових параметрів.

Крок 3. Визначити фізичних характеристик газу.

Крок 4. Змодельовати рівняння гідродинаміки для опису газового потоку, враховуючи ефект Джоуля-Томсона.

Крок 5. Застосувати чисельний метод характеристик для отримання чисельного розв'язку системи рівнянь, що описує перехідний процес течії газу.

Крок 6. Застосувати чисельні методи (апроксимація) для уточнення результатів і зменшення обчислювальної складності.

Крок 7. Створити програмний продукт для реалізації алгоритму, який значно скоротить час розрахунків та полегшить їх.

Крок 8. Проаналізувати отримані результати та час розрахунків.

3.3 Опис програми

Для результативного вирішення завдання, поставленого в межах цієї кваліфікаційної роботи, було створено програмний продукт. Його основне призначення полягає в обчисленні та визначенні ключових параметрів потоку газу в умовах перехідного режиму на кожному ЧШ. Результати обчислень залежать від початкового розподілу газових параметрів та крайових умов. Завдяки використанню методу характеристик вдалося забезпечити точне визначення часу поширення перехідного процесу.

Для перевірки коректності роботи запропонованого методу та розробле-

ного програмного забезпечення було проведено тестування на різних прикладах. Це дало змогу підтвердити адекватність функціонування методу та програми в різноманітних умовах і сценаріях, які можуть виникати у практичній реалізації.

Для проведення експерименту було розглянуто ЛД ТП великого діаметру з наступними фізичними параметрами труби, газу та характеристиками навколишнього середовища :

- довжина ділянки $L = 15$ км;
- внутрішній діаметр ділянки газопроводу $D = 1400$ мм;
- товщина стінок труби $\delta = 10$ мм;
- коефіцієнт ефективності ділянки $E = 0,95$;
- коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту $k_T = 1,4 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{год} \cdot \text{К}}$;
- питома теплоємність газу $C_p = 0,65595 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;
- коефіцієнт стислості газу $z_H = 0,9$;
- температура ґрунту на глибині закладання газопроводу $t_{gp} = 10$ °С;
- відносна щільність газу по повітрю $\Delta = 0,60471$.

Також обрали наступні початкові умови: тиск газу $P_H = 68,9$ атм, температура $t_H = 39,5$ °С, комерційна витрата $q = 92,17$ млн м³/добу.

Висновки за розділом 3

У розділі 3 даної кваліфікаційної роботи були описані переваги системи комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1 та роботи в ній. Далі був сформований алгоритм розв'язання поставної задачі за яким розроблявся програмний продукт. Також було наведено опис створеного програмного продукту та основних даних для експериментів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для нестационарного режиму

Розрахунки проводились на різній кількості точок розбиття. Для експерименту обрали $n_1 = 5$, $n_2 = 10$ та $n_3 = 15$ при кількості часових шарів $k = 800$. Точність розрахунків обрали $\varepsilon = 10^{-6}$.

Проведемо аналіз роботи газопроводу у випадку перехідного режиму течії газу по ділянці ТП великого діаметру при n_i , $i = 1, 2, 3$ та розглянемо залежність значень параметрів потоку газу від кількості точок розбиття для обраної кількості ЧШ.

Виникнення перехідного режиму відбувається через підключення додаткового досить великого споживача, що призводить до збільшення комерційної витрати зі значення $q = 92,17$ млн м^3 /добу до значення $q = 122,17$ млн м^3 /добу. Дані зміни в роботі ТП відбуваються через 5 хвилин після початку експерименту.

Спочатку оберемо $n_1 = 5$. В цьому випадку перехідний процес починається з 74-го часового шару, що відповідає 5-й хвилині від початку експерименту.

В таблицях 4.1 – 4.8 наведемо розраховані параметри течії газу при 5-ти точках розбиття на 1-у, 72-у, 74-у, 75-у, 76-у, 82-у, 84-у, 800-у часових шарах.

Далі наведемо в таблицях 4.9 – 4.16 знайдені параметри газового потоку при кількості точок розбиття $n_2 = 10$ на 1-у, 144-у, 146-у, 147-у, 148-у, 164-у, 166-у, 800-у часових шарах. В даному випадку перехідний процес починається з 146-го ЧШ.

Далі наведемо в таблицях 4.17 – 4.24 знайдені параметри газового потоку при кількості точок розбиття $n_3 = 15$ на 1-у, 218-у, 220-у, 221-у, 222-у, 248-у, 250-у, 800-у часових шарах. В даному випадку перехідний процес починається з 220-го ЧШ.

Таблиця 4.1 – Параметри течії газу на 1-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
1,54149071	4,11310561	92,6317283	68,6099801	39,232043
4,54179116	4,11669727	92,6349575	68,0418821	38,7101379
7,54210008	4,12020669	92,6381747	67,4699953	38,1926867
10,5424178	4,12363409	92,6413791	66,8942008	37,6796078
13,5427447	4,12697963	92,6445701	66,3143752	37,1708199

Таблиця 4.2 – Параметри течії газу на 72-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	297,747896	91,9069866	68,9	39,5
2,92312127	297,526459	91,9541571	68,369457	39,0334168
5,92914413	297,057815	92,0063758	67,819798	38,5519456
8,93017002	296,58948	92,0593433	67,2667925	38,0685692
11,9260959	296,121574	92,1131383	66,7103629	37,5821623
15	295,877171	92,17	66,1348122	37,0776636

Таблиця 4.3 – Параметри течії газу на 74-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
1	2	3	4	5
0	305,765871	91,9079266	68,9	38,0828483
2,92125752	305,544535	91,9550256	68,3697923	37,5829167

Кінець таблиці 4.3

1	2	3	4	5
5,84022204	305,316363	92,003667	67,8361125	36,1601684
8,84198498	304,840748	92,0567623	67,2831086	38,0828483
11,9220258	304,588065	92,1126515	66,7111577	37,5829167
15	304,328949	122,17	65,5077979	36,1601684

Таблиця 4.4 – Параметри течії газу на 75-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
1,46044224	309,663141	91,9316223	68,6354085	39,2669963
4,37960795	309,438411	91,9794504	68,1036495	38,8003678
7,29645937	309,206746	92,0288049	67,5683728	38,3321284
10,3794103	308,950361	92,0842219	66,9982148	37,8339405
13,4682172	308,711029	116,663777	65,9095683	36,5871698

Таблиця 4.5 – Параметри течії газу на 76-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	313,778693	91,9085846	68,9	39,5
2,919356	313,557431	91,9556127	68,370135	39,0339661
5,83640537	313,329218	92,0041578	67,836806	38,566806
8,83450948	313,316846	92,0559716	67,2845174	38,0841318
11,9326292	313,09314	112,28852	66,2872688	36,9733385
15	312,782367	122,17	65,3315036	35,9220509

Таблиця 4.6 – Параметри течії газу на 82-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	338,243287	91,9071274	68,9	39,5
3,11816407	338,107037	99,1566138	68,1832207	38,7867433
...
15	337,740194	122,17	64,9394512	35,4108499

Таблиця 4.7 – Параметри течії газу на 84-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	346,919399	102,392802	68,9	39,5
3,12394635	346,570988	100,685025	68,1114119	38,6879995
6,2040729	346,329053	105,193358	67,38005	37,9619306
...
15	345,746882	122,17	64,8363186	35,2806471

Таблиця 4.8 – Параметри течії газу на 800-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_1 = 5$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	3300,74541	121,161577	68,9	39,5
2,99180198	3300,67533	121,337868	67,9518757	38,954486
6,01609901	3300,68643	121,527944	66,9781003	38,3924043
...
15	3300,45609	122,17	63,9851757	36,6216686

Таблиця 4.9 – Параметри течії газу на 1-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0,770598476	2,05605139	92,4002354	68,7550299	39,3654236
2,27067333	2,05695891	92,4010395	68,4719296	39,103328
3,77074921	2,05785612	92,4018421	68,1879041	38,8423608
5.27082613	2.05874303	92.4026432	67.9029391	38.5825124
6.77090411	2.05961965	92.4034425	67.6170201	38.3237722
8.27098319	2.060486	92.4042402	67.3301321	38.06613
9.77106336	2.06134208	92.4050362	67.0422601	37.8095757
11.2711447	2.06218792	92.4058304	66.7533886	37.554099
12,7712271	2,06302351	92,4066228	66,463502	37,2996898
14,2713108	2,06384888	92,4074133	66,1725842	37,046338

Таблиця 4.10 – Параметри течії газу на 144-у часовому шарі на ділянці ТП
при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	297,754199	92,0478849	68,9	39,5
1,4619195	297,644145	92,0586951	68,6343802	39,2625519
2,92325936	297,532406	92,0697001	68,3679785	39,0256379
4.42690749	297.297968	92.0817232	68.0929256	38.7821937
5.92930176	297.063623	92.0938541	67.8171325	38.5391752
...
11.9261907	296.127407	92.1434967	66.7063521	37.5681799
13,463363	296,003962	92,1566628	66,4190001	37,3178766
15	295,883009	92,17	66,1306438	37,0664159

Таблиця 4.11 – Параметри течії газу на 146-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	301,764049	92,0481599	68,9	39,5
1,46145007	301,654029	92,0589627	68,6344649	39,2626163
2,92231851	301,542322	92,0699577	68,3681489	39,0257733
4,38260861	301,428914	92,0811442	68,1010392	38,7893546
5,88518995	301,192777	92,0932814	67,8252415	38,5463034
...
10,3853744	300,484822	92,130369	66,9932975	37,8182119
11,9240949	300,359234	92,1434094	66,7067493	37,5685147
13,4623262	300,236012	92,1566188	66,4192007	37,3180282
15	300,10749	122,17	65,5036999	36,1489383

Таблиця 4.12 – Параметри течії газу на 147-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0,730680276	303,7137	92,0536578	68,7673505	39,3812494
2,1916035	303,602851	92,0645525	68,5014692	39,144185
3,65194541	303,490308	92,0756378	68,2348012	38,9076053
5,11170854	303,376053	92,086913	67,9673338	38,6713949
6,6137536	303,139052	92,0991087	67,69116	38,428493
8,11454208	302,90211	92,1114175	67,4142292	38,1858063
...
12,6925327	302,414379	92,1499622	66,563242	37,4435067
14,2352477	302,296811	119,428195	65,7044319	36,3626411

Таблиця 4.13 – Параметри течії газу на 148-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	305,772611	92,0483959	68,9	39,5
1,46097852	305,662621	92,0591913	68,63455	39,2626829
2,92137401	305,550937	92,0701764	68,36832	39,0259108
4.38118785	305.437548	92.0813507	68.1012976	38.7895681
5.84042196	305.322437	92.0927133	67.8334701	38.553537
...
10.3823852	304.719172	92.130251	66.9938585	37.818699
11.9221301	304.593908	92.1433299	66.7071216	37.5688275
13,4694711	304,486231	116,971659	65,8991329	36,5644854
15	304,328786	122,17	65,4043009	36,0131251

Таблиця 4.14 – Параметри течії газу на 164-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	338,251194	92,0484292	68,9	39,5
1,58089103	338,239019	98,5906748	68,4759291	39,046103
3,12113834	338,120669	100,611459	68,1302167	38,7044644
4.61948621	338.115818	102.787476	67.778775	38.3529803
6.11717198	338.107607	105.14556	67.4119788	37.9821002
...
12.1004553	338.036345	116.174909	65.7596546	36.2617319
13,5509684	337,892821	119,139429	65,3075119	35,7763537
15	337,743216	122,17	64,832258	35,2578967

Таблиця 4.15 – Параметри течії газу на 166-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	342,705906	103,421757	68,9	39,5
1,58302999	342,47079	99,3839838	68,439715	38,9954811
3,12411584	342,350927	101,358757	68,0903118	38,6491501
4.66368456	342.230229	103.521358	67.7266877	38.2849911
6.16136893	342.222941	105.816698	67.3563475	37.9098172
...
10.6501062	342.178843	113.629067	66.1388419	36.6495578
12.1015066	342.040881	116.39639	65.7069577	36.1926811
13,551487	341,897109	119,252269	65,2538719	35,706972
15	341,747371	122,17	64,7782718	35,1891044

Таблиця 4.16 – Параметри течії газу на 800-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_2 = 10$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	1651,13046	121,725508	68,9	39,5
1,49611964	1651,09464	121,764281	68,4235322	39,1982937
2,99245965	1651,05855	121,804125	67,9437076	38,8927103
4.52176251	1651.10887	121.846035	67.4498587	38.5761326
6.01854767	1651.07231	121.888234	66.9630111	38.2617111
...
12,0062375	1650,91974	122,070126	64,9793553	36,9536575
13,5031458	1650,87968	122,119249	64,4739826	36,6129015
15	1650,83877	122,17	63,9646534	36,2661898

Таблиця 4.17 – Параметри течії газу на 1-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0,513699626	1,37058869	92,3233432	68,8033623	39,4101499
1,51373286	1,37099346	92,3237	68,6148377	39,2351659
2,51376639	1,37139517	92,3240563	68,4259052	39,060685
3,51380023	1,37179383	92,3244123	68,2365604	38,8867045
...
11,5140824	1,37487332	92,3272415	66,7064444	37,5125341
12,5141191	1,37524457	92,3275927	66,5131929	37,3429261
13,5141562	1,3756128	92,3279434	66,3194844	37,1737887
14,5141937	1,37597799	92,3282935	66,1253141	37,0051191

Таблиця 4.18 – Параметри течії газу на 218-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	300,430562	92,0906768	68,9	39,5
0,974489715	300,357359	92,0953381	68,7228841	39,3400328
1,9487171	300,283409	92,1000576	68,5454339	39,1805073
2,92268384	300,208708	92,104835	68,3676456	39,0213883
...
11,9248072	298,951109	92,1526994	66,7054298	37,5613522
12,9501118	298,868649	92,1584179	66,5138589	37,3951345
13,9751829	298,787243	92,164185	66,3218546	37,2285863
15	298,706874	92,17	66,1294166	37,0615426

Таблиця 4.19 – Параметри течії газу на 220-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	303,103429	92,0907958	68,9	39,5
0,974280136	303,030242	92,095455	68,722922	39,3400595
1,94829763	302,956305	92,1001719	68,54551	39,1805622
2,92205375	302,881616	92,1049461	68,3677601	39,0214734
...
11,9234582	301,773312	92,1526687	66,7056839	37,5615373
12,9492185	301,690944	92,1583974	66,5140285	37,3952401
13,974738	301,609577	92,1641747	66,3219406	37,2286125
15	301,524139	122,17	65,5025051	36,1440995

Таблиця 4.20 – Параметри течії газу на 221-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0,487120461	304,403151	92,0931733	68,811512	39,419979
1,46116403	304,329595	92,0978601	68,6342865	39,2602783
2,43494537	304,255289	92,1026042	68,4567252	39,101004
3,4084656	304,180228	92,1074053	68,2788244	38,9421229
...
11,4097264	303,226418	92,1498055	66,8014937	37,6447153
12,4358235	303,143592	92,1555147	66,610013	37,4784907
13,4616846	303,061753	92,1612726	66,4181007	37,3120087
14,4902088	302,983906	120,343748	65,6363432	36,286882

Таблиця 4.21 – Параметри течії газу на 222-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	305,775721	92,0909045	68,9	39,5
0,974069816	305,702547	92,0955616	68,72296	39,340087
1,94787675	305,628623	92,1002758	68,5455863	39,180618
2,92142173	305,553944	92,1050468	68,367875	39,0215593
...
11,9221603	304,596751	92,1526396	66,7059284	37,5617141
12,9483581	304,514454	92,1583779	66,5141918	37,3953403
13,9799568	304,443715	118,64476	65,7674951	36,4234252
15	304,338288	122,17	65,4336791	36,0497693

Таблиця 4.22 – Параметри течії газу на 248-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	341,075956	92,0908816	68,9	39,5
1,06877979	341,105639	98,4278625	68,5730715	39,1330196
2,09650041	341,026419	99,7102823	68,3448179	38,906369
3,12354819	340,946839	101,076569	68,1106601	38,6724806
...
12,1012805	340,712444	116,350663	65,7267993	36,2087061
13,0681713	340,617303	118,263455	65,4271863	35,8887426
14,0344158	340,51952	120,206121	65,1177655	35,5552826
15	340,419054	122,17	64,7981691	35,2071709

Таблиця 4.23 – Параметри течії газу на 250-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	344,125327	103,751412	68,9	39,5
1,07001857	343,928026	98,9627874	68,5488723	39,099048
2,09808212	343,848176	100,225924	68,3189925	38,8702973
3,12549155	343,767949	101,569981	68,0832136	38,6343434
...
12,1019871	343,381751	116,494478	65,6911018	36,1617447
13,0686382	343,286494	118,360492	65,3910413	35,8415925
14,0346473	343,188629	120,255064	65,081337	35,5082056
15	343,088113	122,17	64,7616349	35,1604442

Таблиця 4.24 – Параметри течії газу на 800-у часовому шарі на ділянці ТП при кількості точок розбиття $n_3 = 15$

Просторова змінна x (км)	Часова змінна t (с)	Витрата газу q (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
0	1101,83723	121,881806	68,9	39,5
1,02947862	1101,73563	121,899822	68,5716827	39,2792957
2,05862325	1101,63458	121,918004	68,2419916	39,0546713
3,08741696	1101,5341	121,936364	67,9109162	38,8258041
...
12,0991215	1100,16649	122,108288	64,9440603	36,6046622
13,0664678	1100,06598	122,128317	64,618155	36,3431038
14,0334296	1099,96437	122,148872	64,2908684	36,0780352
15	1099,86165	122,17	63,9621818	35,8100051

Таблиця 4.25 – Порівняння отриманих значень параметрів на останньому часовому шарі при різній кількості точок розбиття

	Часова змінна t (с)	Витрата газу q_0 (млн м ³ /добу)	Тиск P (атм)	Температура T (°C)
$n_1 = 5$	3300,45609	121,161577	63,9851757	36,6216686
$n_2 = 10$	1650,83877	121,725508	63,9646534	36,2661898
$n_3 = 15$	1099,86165	121,881806	63,9621818	35,8100051

У наступній таблиці 4.26 наведено час розрахунку параметрів газового потоку у програмі на процесорі AMD A10-5745M APU.

Таблиця 4.26 – Час розрахунку параметрів газового потоку

n	Час розрахунку параметрів газового потоку (с)
$n_1 = 5$	89,794998
$n_2 = 10$	146,231
$n_3 = 15$	191,2147

В наступній таблиці 4.27 наведено час розповсюдження перехідного процесу при різній кількості точок розбиття.

Таблиця 4.27 – Час розповсюдження перехідного процесу

n	Час (с)
$n_1 = 5$	41,1535
$n_2 = 10$	40,942
$n_3 = 15$	41,022

На наступних рисунках 4.1 – 4.3 представлені графічні зображення отриманих вище даних, а саме комерційної витрати, тиску, температури.

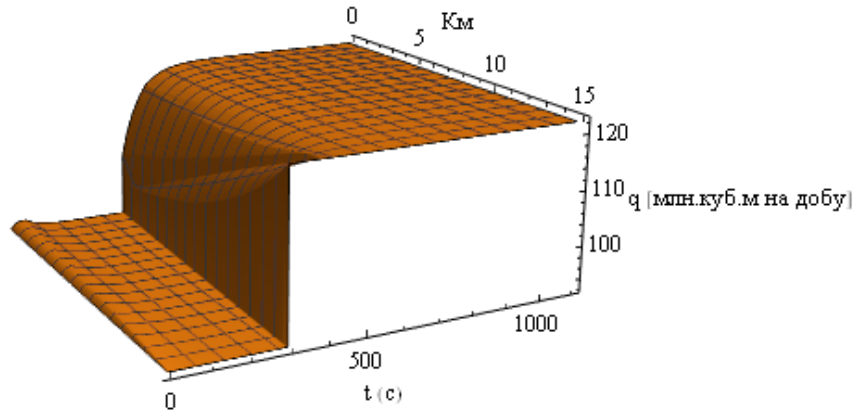


Рисунок 4.1 – Графік зміни параметру комерційної витрати q (млн м^3 /добу)

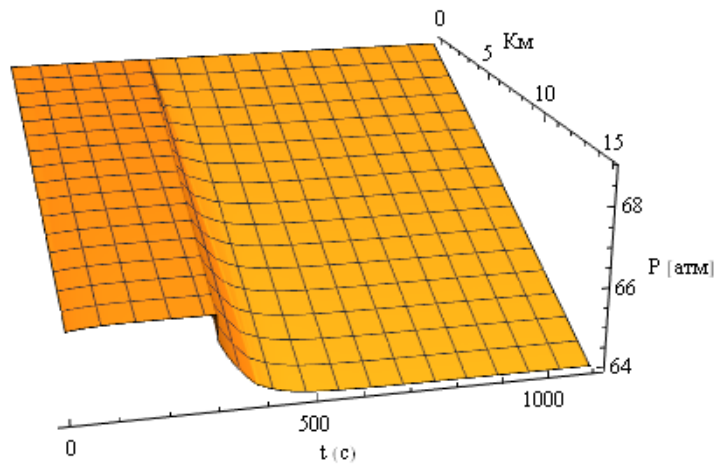


Рисунок 4.2 – Графік зміни параметру тиску P (атм)

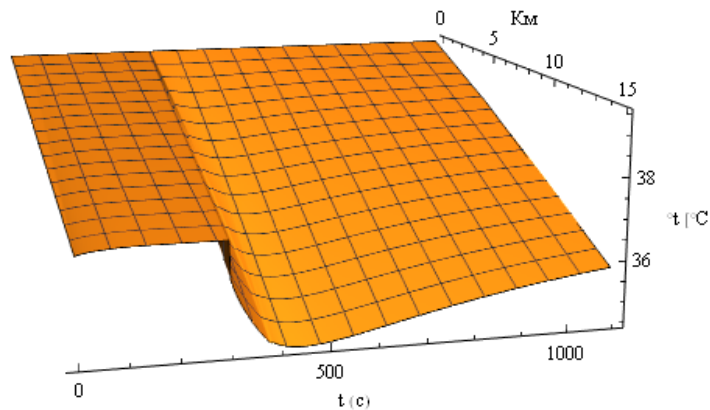


Рисунок 4.3 – Графік зміни параметру температури T ($^{\circ}\text{C}$)

Аналізуючи дані з попередніх таблиць, можна дійти висновку, що збільшення кількості точок розбиття підвищує точність розрахунків, але разом із цим зростає і час, необхідний для їх виконання. Результати, отримані при $n_2 = 10$, вже можна вважати досить задовільними. Метод характеристик дозволив визначити час перехідного процесу для різних значень α , який залишався майже незмінним у всіх випадках. Тобто час, коли хвиля розповсюдження перехідного процесу дійде до початку ділянки ТП складає приблизно 41 секунду.

Висновки за розділом 4

У четвертому розділі були проведені обчислювальні експерименти із застосуванням методу характеристик для різної кількості точок розбиття. Для перевірки коректності програмного забезпечення було використано 5, 10 та 15 точок розбиття. Результати всіх експериментів підтвердили ефективність роботи розрахункової програми, демонструючи підвищення точності розрахунків зі збільшенням кількості точок розбиття.

ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі вирішено важливі завдання, пов'язані з дослідженням і моделюванням перехідних режимів течії газу на ділянках трубопроводів великого діаметру з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона. Проведено системний аналіз проблеми, у межах якого обрано математичну модель, що враховує особливості перехідного режиму течії газу. Ця модель описує ключові параметри потоку та дозволяє більш точно враховувати теплові процеси, які виникають під час розширення газу.

Для розв'язання системи рівнянь гіперболічного типу, що описує модель, застосовано чисельний метод характеристик. На основі цього методу створено алгоритм, який забезпечує обчислення параметрів газового потоку в перехідному режимі. Побудований програмний продукт перевірено на тестових прикладах, що підтвердило його функціональність і точність. Аналіз результатів обчислювальних експериментів за різних умов, зокрема при змінній кількості точок розбиття, продемонстрував ефективність методу, хоча він вимагає значних обчислювальних ресурсів.

Отримані результати дозволяють визначати час поширення хвиль збурення в газовому потоці та оцінювати роботу газотранспортної системи в умовах змінного режиму. Це забезпечує можливість прогнозування надзвичайних або аварійних ситуацій, а також сприяє поліпшенню управління системою та автоматизації процесу постачання газу споживачам.

Таким чином, мета дослідження досягнута: застосовано метод характеристик і побудовано програмний продукт для моделювання перехідних режимів течії газу, також відстежено час розповсюдження перехідного процесу. Дані результати мають практичне значення для проектування та експлуатації газотранспортних систем, зменшуючи ризики небезпечних ситуацій і підвищуючи їх ефективність.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Бурячук А. В. Застосування методу характеристик при моделюванні нестационарних режимів течії газу по ділянці трубопроводу великого діаметру. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті»*: зб. матеріалів форуму (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 107–108.
2. Гусарова І. Г., Бурячук А. В. Застосування методу характеристик при моделюванні перехідних режимів з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона. *Education and science of today: intersectoral issues and development of sciences: Collection of scientific papers «ΛΟΓΟΣ» with Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Cambridge, October 18, 2024*. Cambridge-Vinnitsia : P.C. Publishing House & UKRLOGOS Group LLC, 2024. P.192–196.
3. Гусарова І. Г., Бурячук А. В. Особливості застосування методу характеристик при моделюванні перехідних режимів з урахуванням ефекту Джоуля-Томсона. *Grundlagen der modernen wissenschaftlichen forschung: Collection of scientific papers «ΛΟΓΟΣ» with Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, December 13, 2024*. Zurich-Vinnitsia : P.C. Publishing House & UKRLOGOS Group LLC, 2024. P.213–218.
4. Ієвлєва С. М. Комплекс навчально-методичного забезпечення навчальної дисципліни «Основи системного аналізу» підготовки бакалавра спеціальності 6.040301 «Прикладна математика», 6.040303 «Системний аналіз». Харків : ХНУРЕ, 2017. 240 с.
5. Василів О. Б., Тітлов О. С., Сагала Т. А. Моделювання режимів транспортування природного газу магістральними газопроводами в умовах недовантаження. *Нафтогазова енергетика*. 2019. № 2 (32). С. 35–42.
6. Husarova I. H., Tevyashev A. D., Tevyasheva O. A. Mathematical modeling of non-stationary gas flow modes along a linear section of a gas transmission system. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, No. 2. P. 416–430.
7. Літман Р. Дж. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. New York

: Springer, 2006. 300 с.

8. Гусарова І. Г., Ягупова Ю. В. Використання методу характеристик при моделюванні нестационарних режимів течії газу по ділянці трубопроводу VI Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми и перспективи розвитку IT-індустрії»: тези доповідей (м. Харків, 17-18 квітня 2014 г.). Харків : ХНЕУ, 2014. С. 225.

9. Kostenko M. Application of the Method Characteristics at Computer Modeling Transient Regimes of Gas Flow Along the Pipeline Section Pipeline. *Learning & Teaching: after War and during Peace* [Electronic Edition]: Conference Proceedings of II International Scientific & Practical Conference, Kharkiv, Ukraine, 10 November, 2023. Kharkiv : KNPU, 2023. P. 208.

10. Гусарова І. Г., Костенко М. Ю. Особливості моделювання перехідних режимів з використанням методу характеристик. *Scientific practice: modern and classical research methods*: Collection of scientific papers «ΛΟΓΟΣ» with Proceedings of the V International Scientific and Practical Conference, Boston, December 22, 2023. Boston-Vinnytsia : Primedia eLaunch & European Scientific Platform, 2023. P.195–198.

11. Гусарова І. Г., Костенко М. Ю. Комп'ютерне моделювання нестационарних режимів з використанням методу характеристик. *Ricerche scientifiche e metodi della loro realizzazione: esperienza mondiale e realtà domestiche*: Raccolta di articoli scientifici «ΛΟΓΟΣ» con gli atti della IV Conferenza scientifica e pratica internazionale, Bologna, 29 settembre, 2023. Bologna-Vinnytsia : Associazione Italiana di Storia Urbana & Piattaforma scientifica europea. 2023. P.126–130.

12. Wolfram Mathematica: Сучасні технічні обчислення. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/index.html.ru?footer=lang> (дата звернення: 16.12.2024).