

# ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

БОДЯНСКИЙ Е.В., ПЛИСС И.П.,  
ЧАПЛАНОВ А.П.

Рассматривается задача восстановления характеристик и прогнозирования временных рядов произвольной природы. Предлагается процедура динамической реконструкции, основанной на аппарате хаос-динамики и искусственных нейронных сетей.

При решении медико-биологических, финансово-экономических, радиотехнических и тому подобных задач исследователю достаточно часто приходится сталкиваться с сигналами и процессами, поведение которых выглядит как случайное, хотя по сути им не является. Более того, статистический анализ (вторые моменты, автокорреляционные функции, спектр) показывает, что это широкополосный случайный процесс, хотя и порожденный совершенно детерминированной нелинейной системой, что само собой парадоксально. Такие системы называются хаотическими и последние два десятилетия они являются предметом пристального внимания как теоретиков, так и специалистов совершенно различных областей [1-3].

В принципе будущее поведение хаотической системы в силу ее детерминированности полностью определяется ее прошлым, но на практике любая неопределенность или неточность в выборе начальных условий резко усложняют задачи анализа, для решения которых в последнее время все чаще используются нейронные сети, в первую очередь благодаря своим универсальным аппроксимирующим свойствам [4-7].

Одной из таких задач является так называемая динамическая реконструкция [8], состоящая в восстановлении модели, которая генерирует хаотический временной ряд по растущей выборке наблюдений  $x(1), x(2), \dots, x(k), \dots$ , где  $k$  – текущее дискретное время.

Решение этой задачи рассмотрим на примере простейшей модели Б. Мандельброта [9] вида

$$x_c(k+1) = x_c^2(k) + \theta, \quad (1)$$

где  $x_c(k) = x_1 + ix_2$ ,  $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , при этом предполагается, что параметры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  неизвестны.

Подобный временной ряд может быть получен с помощью элементарной схемы генератора хаоса, приведенного на рис. 1 и содержащего блоки умножения, суммирования, усиления и чистой задержки  $z^{-1}$ .

Перепишав (1) в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ 2x_1(k)x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1(x_c(k)) \\ \psi_2(x_c(k)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \bar{\psi}(x_c(k)) + \bar{\theta}, \end{aligned}$$

введя вектор ошибок

$$\begin{aligned} \bar{e}(k) &= \begin{pmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{pmatrix} = x(k)I_2 - \bar{x}(k) = \\ &= x(k)I_2 - \bar{\psi}(x_c(k-1)) - \bar{\theta} \end{aligned}$$

и одношаговый критерий обучения, принятый в теории нейронных сетей

$$E(k) = \frac{1}{2} \|\bar{e}(k)\|^2 = \frac{1}{2} \|\tilde{x}(k) - \bar{\theta}\|^2,$$

можно записать рекуррентную процедуру его минимизации в виде

$$\bar{\theta}(k+1) = \bar{\theta}(k) + \eta(k)(\tilde{x}(k) - \bar{\theta}(k)), \quad (2)$$

где  $\tilde{x}(k) = x(k)I_2 - \bar{\psi}(x_c(k-1))$ ,  $I_2 = (1,1)^T$ ,  $\eta(k)$  – параметр шага обучения.

Несложно видеть, что (2) совпадает с алгоритмом Т. Кохонена [10], при этом вектор восстановленных параметров  $\bar{\theta}$  позволяет получить пару прогнозных значений наблюдаемого ряда в виде

$$\hat{\bar{x}}(k+1) = \bar{\psi}(x_c(k)) + \bar{\theta}(k+1).$$

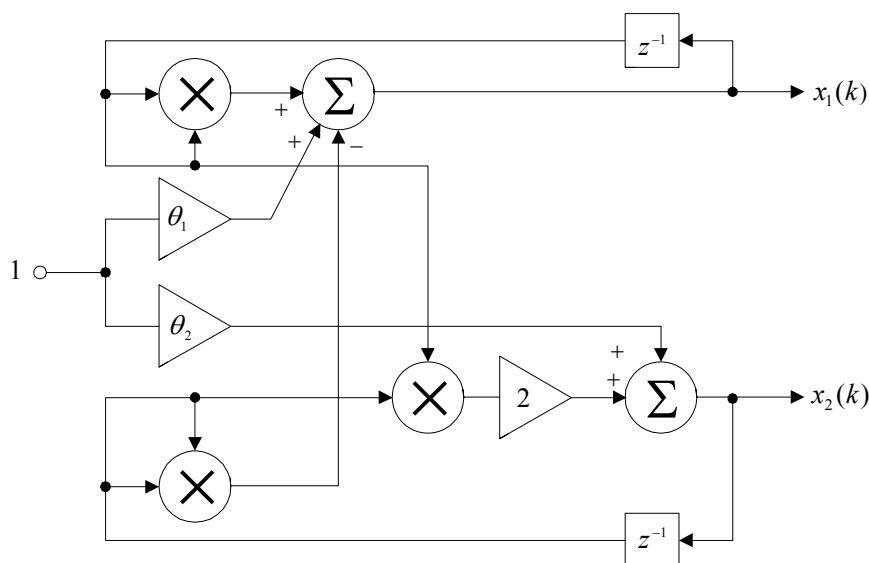


Рис. 1

Введем далее более сложную структуру комплексного хаотического процесса:

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}(x_1^2(k) - x_2^2(k)) + \theta_1 \\ w_{21}x_1(k)x_2(k) + \theta_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_{11}\Psi_1(x_c(k)) + \theta_1 \\ w_{21}\Psi_2(x_c(k)) + \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & \theta_1 \\ w_{21} & \theta_2 \end{pmatrix} \odot \\ &\odot \begin{pmatrix} \Psi_1(x_c(k)) & 1 \\ \Psi_2(x_c(k)) & 1 \end{pmatrix} I_2 = W \odot \Psi(x_c(k)) I_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $w_{11}, w_{21}, \theta_1, \theta_2$  — неизвестные параметры, подлежащие определению;  $\odot$  — символ скоттова произведения.

Переписав (3) покомпонентно

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (w_{11}, \theta_1)(\Psi_1(x_c(k)), 1)^T = w_{11}\Psi_1(x_c(k)), \\ x_2(k+1) = (w_{21}, \theta_2)(\Psi_2(x_c(k)), 1)^T = w_{21}\Psi_2(x_c(k)), \end{cases}$$

можно уточнять неизвестные параметры с помощью стандартного нейросетевого алгоритма Б. Уидроу—М. Хоффа в форме [11]

$$\begin{cases} w_1(k+1) = w_1(k) + \eta \frac{x(k) - w_1(k)\Psi_1(x_c(k-1))}{1 + \Psi_1^2(x_c(k-1))} \times \\ \times \Psi_1^T(x_c(k-1)), \\ w_2(k+1) = w_2(k) + \eta \frac{x(k) - w_2(k)\Psi_2(x_c(k-1))}{1 + \Psi_2^2(x_c(k-1))} \times \\ \times \Psi_2^T(x_c(k-1)), \\ 0 < \eta < 2 \end{cases} \quad (4)$$

и на их основе строить пару одношаговых прогнозов:

$$\hat{\bar{x}}(k+1) = W(k+1) \odot \Psi(x_c(k)) I_2. \quad (5)$$

Комплексный прогноз вещественного сигнала  $x(k)$  может быть некоторым образом свернут в целях получения более точных результатов. Для этого можно использовать простейшую аддитивную форму

$$\hat{x}(k+1) = c\hat{x}_1(k+1) + (1-c)\hat{x}_2(k+1), \quad (6)$$

где  $c$  — некоторый параметр, определяющий точность прогнозирования.

Введя  $(k \times 1)$  — векторы сигналов и ошибок

$$\begin{cases} X(k) = (x(1), x(2), \dots, x(k))^T, \\ \hat{X}(k) = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \dots, \hat{x}(k))^T, \\ \hat{X}_i(k) = (\hat{x}_i(1), \hat{x}_i(2), \dots, \hat{x}_i(k))^T, i = 1, 2, \\ V_i(k) = X(k) - \hat{X}_i(k), i = 1, 2, \\ V(k) = X(k) - \hat{X}(k) = cV_1(k) + (1-c)V_2(k) \end{cases} \quad (7)$$

и решив дифференциальное уравнение

$$\partial \|V(k)\|^2 / \partial c = 0,$$

можно получить оценку

$$\begin{cases} c(k) = V_2^T(k) \frac{V_2(k) - V_1(k)}{\|V_2(k) - V_1(k)\|^2}, \\ 1 - c(k) = V_1^T(k) \frac{V_1(k) - V_2(k)}{\|V_1(k) - V_2(k)\|^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (8) в последнее уравнение системы (7), получаем

$$\begin{aligned} V(k) &= V_2^T(k) \frac{V_2(k) - V_1(k)}{\|V_2(k) - V_1(k)\|^2} V_1(k) + \\ &+ V_1^T(k) \frac{V_1(k) - V_2(k)}{\|V_1(k) - V_2(k)\|^2} V_2(k) = \\ &= (V_1(k)V_2^T(k) - V_2(k)V_1^T(k)) \frac{V_1(k) - V_2(k)}{\|V_1(k) - V_2(k)\|^2}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \|V(k)\|^2 &= (\|V_2(k)\|^2 - V_1^T(k)V_2(k))V_1(k) + \\ &+ (\|V_1(k)\|^2 - V_1^T(k)V_2(k))V_2(k) \times \\ &\times \|V_1(k) - V_2(k)\|^{-4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя (9), несложно получить систему неравенств

$$\begin{cases} \|V(k)\|^2 - \|V_1(k)\|^2 = -\frac{(\|V_1(k)\|^2 - V_1^T(k)V_2(k))^2}{\|V_1(k) - V_2(k)\|^2} \leq 0, \\ \|V(k)\|^2 - \|V_2(k)\|^2 = -\frac{(\|V_2(k)\|^2 - V_1^T(k)V_2(k))^2}{\|V_1(k) - V_2(k)\|^2} \leq 0, \end{cases}$$

свидетельствующую о том, что точность прогноза (6) никогда не может быть хуже, чем точность любой из компонент (5).

Для работы в реальном времени полученные соотношения следует представить в рекуррентной форме, что можно сделать, введя новые переменные

$$\begin{cases} V_{21}(k) = V_2(k) - V_1(k), \\ e_1(k+1) = x(k+1) - \hat{x}_1(k+1), \\ e_2(k+1) = x(k+1) - \hat{x}_2(k+1), \\ e_{21}(k+1) = e_2(k+1) - e_1(k+1) \end{cases}$$

и переписав (8) в виде

$$\begin{cases} c(k+1) = \frac{\eta(k)}{\eta(k+1)} c(k) + \frac{e_2(k+1)e_{21}(k+1)}{\eta(k+1)}, \\ \eta(k+1) = \eta(k) + e_{21}^2(k+1). \end{cases}$$

С учетом очевидных выражений

$$\begin{cases} V_{21}(k) = \hat{X}_1(k) - \hat{X}_2(k), \\ e_{21}(k+1) = \hat{x}_1(k+1) - \hat{x}_2(k+1) \end{cases}$$

окончательно получаем

$$\begin{cases} c(k+1) = \frac{\eta(k)}{\eta(k+1)} c(k) + \frac{e_2(k+1)(\hat{x}_1(k+1) - \hat{x}_2(k+1))}{\eta(k+1)}, \\ \eta(k+1) = \eta(k) + (\hat{x}_1(k+1) - \hat{x}_2(k+1))^2. \end{cases} \quad (10)$$

На рис. 2 приведена схема формального нейрона, осуществляющая динамическую реконструкцию хаотического процесса согласно соотношениям (4), (5), (10).

Подобная схема может быть построена для любой из известных математических моделей хаоса [1-3, 9]. Она предназначена для анализа и прогнозирования сигналов различной природы.

**Литература:** 1. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с. 2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с. 3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с. 4. Intelligent Hybrid Systems: Fuzzy Logic, Neural Networks, and Genetic Algorithms / Ed. by Da Ruan. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. 354 p. 5. Abe S. Neural Networks and Fuzzy Systems: Theory and Application. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. 258 p. 6. Osana Yu., Hagiwara W. Separation of superimposed pattern and many-to-many associations by chaotic neural networks // Proc. IEEE Int. Joint conf. on Neural Networks "IJCNN'98". Anchorage, Alaska, 1998. P. 514-519. 7. Rojas I., Gonzalez J., Canas A., Diaz A.F., Rojas F.J., Rodriguez M. Short-term prediction of chaotic time series by using RBF network with regression weights // Int. J. of Neural Systems. 2000. 10. N 5. P. 353-364. 8. Haykin S. Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Upper-Saddle

River, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1999. 842 p. 9. Mandelbrot B.B. Die fraktale Geometrie der Natur. Basel: Birkhaeuser Verlag, 1991. 491 S. 10. Kohonen T. Self-Organizing Maps. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 362 p. 11. Cichocki A., Unbehauen R. Neural Networks for Optimization and Signal Processing. Stuttgart: Teubner, 1993. 526 p.

Поступила в редколлегию 12.07.2002

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Любчик Л.М.

**Бодянский Евгений Владимирович**, д-р техн. наук, профессор кафедры искусственного интеллекта, научный руководитель ПНИЛ АСУ ХНУРЭ, член IEEE, WSES. Научные интересы: нейро-фаззи-системы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-98-90

E-mail: Bodyanskiy@ieee.org, bodya@kture.kharkov.ua

**Плисс Ирина Павловна**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., вед. науч. сотр. ПНИЛ АСУ ХНУРЭ, член IEEE. Научные интересы: адаптивные системы, искусственные нейронные сети, хаос-динамика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 40-98-90.

E-mail: Pliss@ieee.org

**Чапланов Алексей Павлович**, аспирант кафедры искусственного интеллекта, мл. науч. сотр. ПНИЛ АСУ ХНУРЭ. Научные интересы: искусственные нейронные сети, хаос-динамика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: 40-98-90.

E-mail: Chaplanov@ieee.org

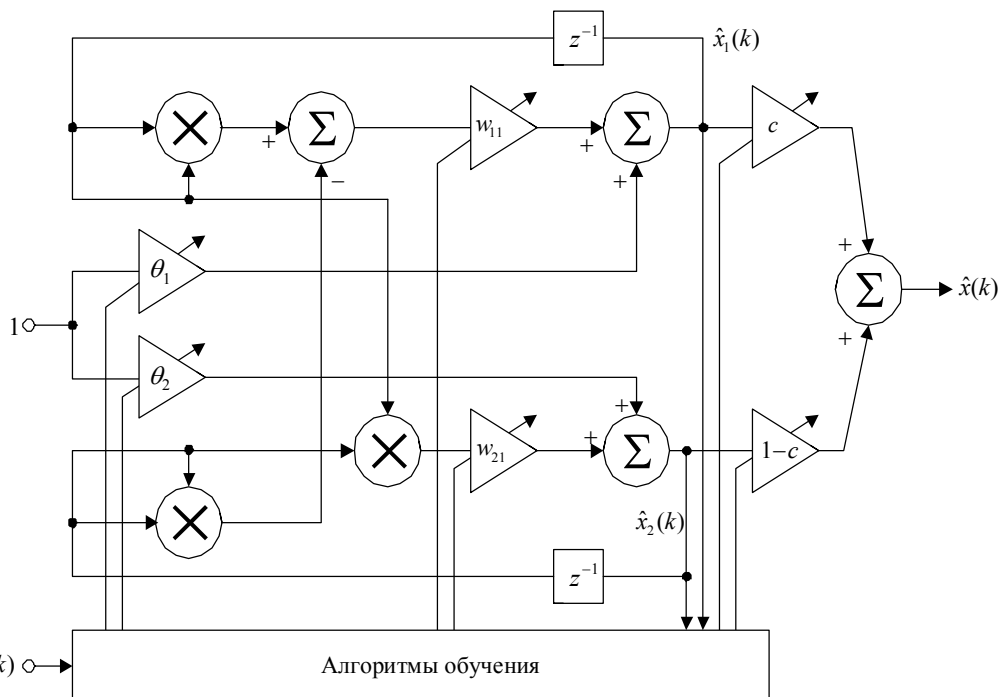


Рис. 2