

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ Центр післядипломної освіти
(повна назва)

Кафедра _____ Штучного інтелекту
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти _____ другий (магістерський)

_____ Дослідження перколяції у мережах на основі моделі з нечіткою логікою

(тема)

Виконав:
здобувач _____ другого _____ року навчання,
групи _____ СШЗдм-24-1

_____ Павло ЯНЧЕНКО
(власне ім'я, прізвище)

Спеціальність 122 Комп'ютерні науки

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми _____ освітньо-наукова
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системи штучного інтелекту

(повна назва освітньої програми)

Керівник _____ доц. Євген ПАВЛЕНКО
(посада, власне ім'я, прізвище)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ШІ

_____ Лариса ЧАЛА
(підпис) (власне ім'я, прізвище)

2026 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ Центр післядипломної освіти _____

Кафедра _____ Штучного інтелекту _____

Рівень вищої освіти _____ другий (магістерський) _____

Спеціальність _____ 122 Комп'ютерні науки _____
(код і повна назва)

Тип програми _____ освітньо-наукова _____
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма _____ Системи штучного інтелекту _____
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____
(підпис)

«_____» _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _____ Янченку Павлу Сергійовичу _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _____ Дослідження перколяції у мережах на основі моделі з нечіткою логікою _____

затверджена наказом університету від _____ 6 _____ квітня _____ 20 26 р. № 48Стз

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії _____ 26 _____ травня _____ 20 26 р.

3. Вихідні дані до роботи _____ Науково-технічні публікації, дані Інтернет-джерел щодо явища перколяції та його моделювання _____

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1) Огляд предметної галузі

2) Дослідження параметрів кластеризації під час перколяційних процесів

3) Моделювання процесу перколяції

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Строк / термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання на кваліфікаційну роботу	06.04.2026	виконано
2	Аналіз предметної галузі	13.04.2026	виконано
3	Постановка завдання та узгодження з керівником	20.04.2026	виконано
4	Дослідження поняття перколяції, видів перколяції, видів регулярних решіток	27.04.2026	виконано
5	Дослідження формування перколяційних кластерів	04.05.2026	виконано
6	Програмна реалізація перколяції на квадратній решітці, дослідження перколяційної кластеризації	11.05.2026	виконано
7	Написання пояснювальної записки	18.05.2026	виконано
8	Попередній захист	23.05.2026	виконано
9	Захист перед ЕК	26.05.2026	

Дата видачі завдання 6 квітня 2026 р.

Здобувач 
(підпис)

Керівник роботи _____
(підпис)

доц. Євген ПАВЛЕНКО
(посада, власне ім'я, прізвище)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 69 с., 28 рис., 3 табл., 2 дод., 12 джерел.

ЗАДАЧА ВУЗЛІВ, ЗАДАЧА ЗВ'ЯЗКІВ, КЛАСТЕРИЗАЦІЯ, ПЕРКОЛЯЦІЯ, РЕГУЛЯРНІ РЕШІТКИ, ФРАКТАЛИ, ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ.

Об'єктом досліджень є перколяційні явища.

Предметом досліджень кваліфікаційної роботи є властивості кластерів, які формуються внаслідок перколяційних процесів.

Метою роботи є моделювання перколяції на регулярних решітках та в мережевих структурах, дослідження властивостей перколяційних кластерів.

ABSTRACT

Master's thesis contains: 69 p., 28 fig., 3 tabl., 2 ann., 12 sources.

BOND PERCOLATION, CLUSTERIZATION, FRACTAL
DIMENSION, FRACTALS, PERCOLATION, REGULAR LATTICES, SITE
PERCOLATION.

The object of research is percolation phenomena.

The subject of research is the properties of clusters that are formed as a result of percolation processes.

The purpose of the work is to model percolation on regular lattices and on the network structures, to study the properties of percolation clusters.

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Огляд предметної галузі	9
1.1 Перколяція, її сутність, види перколяції	9
1.2 Перколяційні кластери	14
1.3 Зв'язок перколяції з теорією критичних явищ	19
1.4 Критичні параметри перколяції на регулярних решітках.....	23
2 Утворення перколяційних кластерів за умов класичної (бінарної) функції приналежності	29
2.1 Параметри перколяції у околі критичної концентрації	29
2.2 Оцінювання порогу перколяції для трикутної решітки	39
2.3 Чітка кластеризація вузлів, які перколюють	43
3 Дослідження перколяції по вузлах з нечіткою мірою приналежності	50
3.1 Нечітка кластеризація вузлів, які перколюють	50
3.2 Дослідження перколяції на безмасштабних мережах	55
3.3 Програмна реалізація моделі перколяції з нечіткою приналежністю вузлів решіток.....	58
Висновки	62
Перелік джерел посилання	63
Додаток А Тексти програм.....	65
Додаток Б Відомість кваліфікаційної роботи.....	69

ВСТУП

Теорія перколяції є відносно молодого наукою. Її основні ідеї були сформульовані у 1957 р. у роботі англійських вчених Бродбента та Хаммерслі. Ця робота виникла в такий спосіб. У середині п'ятдесятих років Бродбент займався розробкою протигазових масок для шахт за завданням Британського об'єднання з дослідження застосування вугілля. При цьому він зіткнувся з цікавою проблемою та привернув до неї увагу математика Хаммерслі.

Основний елемент маски – це вугілля, через яке має проходити газ. У вугіллі є пори, що химерно з'єднуються один з одним, так що утворюється щось на кшталт заплутаного лабіринту. Газ може проникати у ці пори, адсорбуючись (осаджуючись) з їхньої поверхні. Виявилося, що якщо пори досить широкі і добре пов'язані один з одним, то газ проникає в глиб вугільного фільтра. У протилежному випадку газ не проникає далі за поверхню вугілля. Рух газу лабіринтом є процес нового типу, що істотно відрізняється від добре відомого у фізиці явища дифузії.

Бродбент і Хаммерслі назвали такі явища «процесами протікання» (англійською percolation processes. У буквальному перекладі слово percolation означає просочування, фільтрацію). Теорія, що вивчає такого роду явища, стала називатися теорією перколяції, або теорією протікання.

Явища, що описуються теорією протікання, відносяться до так званих критичних явищ. Ці явища характеризуються «критичною точкою», у якій властивості системи різко змінюються. До критичних явищ відносяться також фазові переходи другого роду (наприклад, перехід металу з нормального стану у надпровідний при зниженні температури). Фізика всіх критичних явищ дуже своєрідна і має спільні риси, найважливіша з яких полягає в тому, що поблизу критичної точки система як би розпадається на

блоки з властивостями, причому розмір окремих блоків необмежено зростає при наближенні до критичної точки.

Фізичні властивості завжди нерозривно пов'язані з геометрією. Найцікавіше те, що завдяки великим розмірам блоків, ця геометрія фактично не залежить від атомної структури речовини і тому має універсальні властивості, однакові для багатьох, абсолютно різних систем. Звідси, впливає універсальність фізичних властивостей, що виявляється в околиці критичних точок. Прямий зв'язок між фізикою і геометрією можна простежити у межах теорії протікання.

За роки, що минули з першої роботи Бродбента і Хаммерслі, з'ясувалося, що теорія протікання описує широке коло явищ, які стосуються фізики, хімії, інформатики. Ймовірно, найбільш розробленою в даний час сферою застосування теорії протікання є електричні властивості неупорядкованих систем, таких як аморфні напівпровідники, кристалічні напівпровідники з домішками або матеріали, що є сумішшю двох різних речовин – діелектрика і металу.

Втім, актуальність обраної теми обґрунтовується тим, що теорія перколяції стосується не тільки фізичних та хімічних явищ, а й процесів поширення та розповсюдження інформації, даних, комп'ютерних (та біологічних, таких як Ковід-19) вірусів.

Безумовно, найпростішим середовищем, у якому зручно досліджувати перколяцію, є двовимірні регулярні решітки, проте структура соціальних, соціально-економічних, технічних, інформаційних зв'язків є мережевою. Дослідження процесів протікання на мережевих структурах є актуальною задачею.

Для її виконання проводиться теоретичне дослідження поняття перколяції, комп'ютерне моделювання цього процесу як на регулярних двовимірних решітках, так і у випадкових мережах, зокрема безмасштабних.

Візуалізація отриманих результатів та їхній аналіз також розглядаються у даній кваліфікаційній роботі.

1 ОГЛЯД ПРЕДМЕТНОЇ ГАЛУЗІ

1.1 Перколяція, її сутність, види перколяції

Основною задачею, яка розглядається у кваліфікаційній роботі, є моделювання ефекту перколяції на двовимірних решітках.

Перколяція як процес може відображати та описувати безліч ситуацій та явищ; від моделювання напівпровідникових систем та вивчення надійності комп'ютерних мереж до моделювання епідемій у тваринному та людському світі. У фізиці та хімії явищем перколяції називається явище протікання чи не протікання рідин через пористі матеріали, електрики через суміш провідних та непровідних частинок та інші подібні процеси (рисунок 1.1).

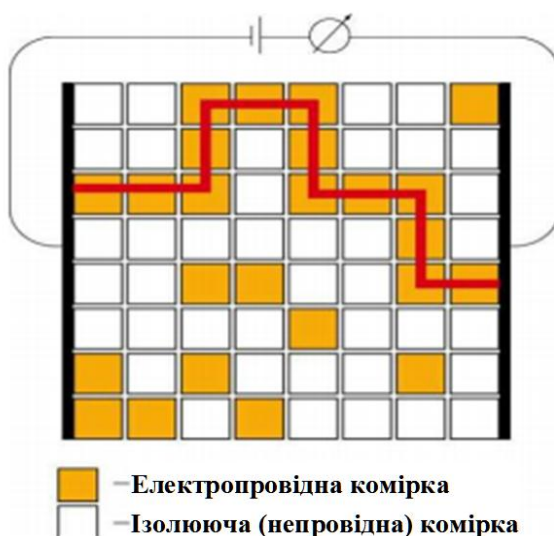


Рисунок 1.1 – Приклад перколяції в електричному ланцюзі

В 1957 вчені Бродбент і Хаммерслі опублікували статтю, в якій поділилися з читачами ідеєю імовірнісної формалізації процесу просочування води в перколяторі електричної кавоварки. Їх побудова була альтернативою класичному дифузійному опису поширення однієї фізичної

субстанції, що умовно називається рідиною в іншій, умовно званій середовищем. Так виникла нова теорія, названа згодом теорією перколяції чи протікання (від англійського дієслова to percolate – просочуватись, протікати). Заради справедливості варто відзначити, що вперше перколяційні ідеї були сформульовані ще в 1941 Флорі під час дослідження процесу полімеризації або гелеутворення. Перколяція представляє наочну модель неупорядкованого середовища.

Найпростішими задачами перколяції є перколяція на двовимірних регулярних решітках. Розглянемо квадратну решітку, кожен вузол якої зайнятий із ймовірністю p або порожній з ймовірністю $1-p$. Ймовірність p можна інтерпретувати як частку (концентрацію) зайнятих вузлів при випадково-однорідному заповненні решітки. Порожні та зайняті вузли можуть відповідати найрізноманітнішим фізичним властивостям. Наприклад, у моделі пористого середовища, «зайнятими вузлами» вважаються пори, а «вільними» елементи твердої породи. Або можна вважати зайняті вузли провідниками електричного струму, а вільні – ізоляторами, як це і було показано на рисунку 1.1.

Нехай для наочності зайняті (чорні) квадратики на решітці 11×11 є провідниками, а порожні (жовті) – ізоляторами (рисунок 1.2). Концентрація зайнятих вузлів становить $p=0.3$. Природньо припустити, що електричний струм може текти лише між найближчими провідними осередками, що мають спільне ребро. Чотири найближчих сусіда для фіксованого вузла на квадратній решітці обведені білим. Синім кольором показаний максимальний за розміром провідний кластер.

Оскільки теорія перколяції оперує з ймовірнісними характеристиками, її висновки стають тим точнішими, що більше розміри системи. В той час як рисунок 1.2 грає допоміжну роль та демонструє невелику решітку, на рисунку 1.3 показано решітку розміром 120×120 з концентрацією провідних вузлів $p=0.1$ (рисунок 1.3).

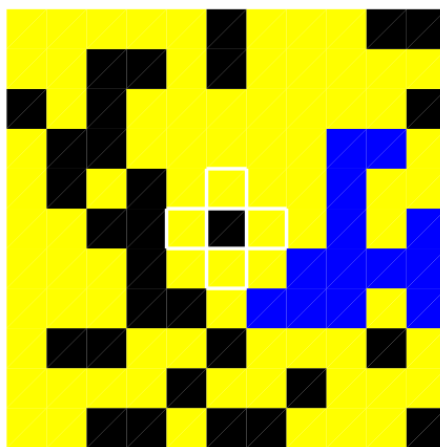


Рисунок 1.2 – Приклад задачі вузлів на ґратах 11×11

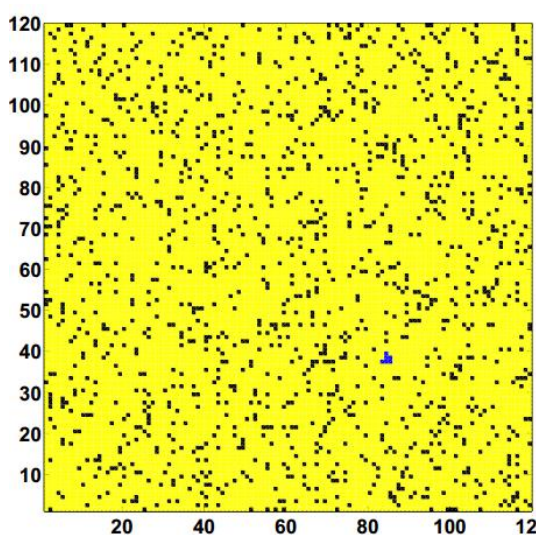


Рисунок 1.3 – Задача вузлів на квадратних ґратах ($n=120, p=0.1$)

З рисунку 1.3 видно, що за малої концентрації ($p \ll 1$) провідні пікселі або ізольовані один від одного, або формують невеликі групи – кластери найближчих сусідів (від англ. cluster – гроно). Два провідні вузли належать одному кластеру в тому і тільки тому випадку, коли вони пов'язані провідним ланцюжком найближчих сусідів. На рисунку 1.3, так як і на усіх подальших рисунках цього розділу, максимальний провідний кластер виділено синім кольором.

При збільшенні концентрації зайнятих вузлів зростають і характерні розміри провідних кластерів. Так, на рисунку 1.4 та рисунку 1.5 показано решітку того ж розміру (120×120), що й на рисунку 1.3, але при концентрації провідних вузлів, яка дорівнює, відповідно, $p=0.4$ та $p=0.55$. При $p \ll 1$ (зокрема, при $p=0.1, 0.4, 0.55$) система в цілому демонструє діелектричні властивості, оскільки не існує ланцюгів, які б з'єднували протилежні сторони решітки.

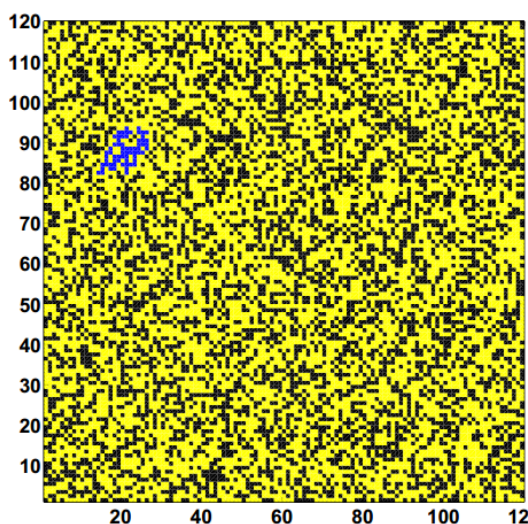


Рисунок 1.4 – Задача вузлів на квадратних ґратах ($n=120, p=0.4$)

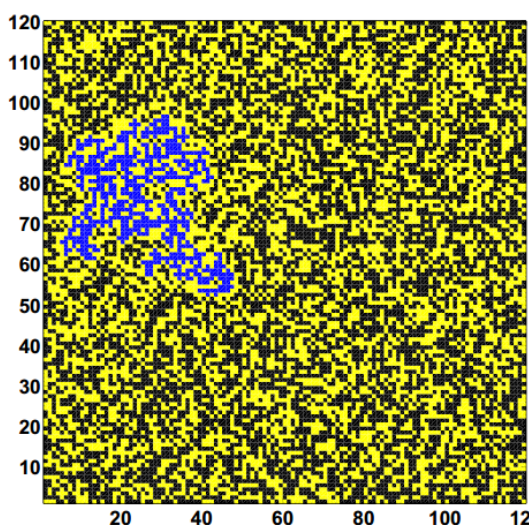


Рисунок 1.5 – Задача вузлів на квадратних ґратах ($n=120, p=0.55$)

Навпаки, як видно із рисунку 1.6, при $p \sim 1$ провідною виявляється переважна більшість вузлів, сині вузли формують гігантський провідний кластер, який забезпечує проходження електричного струму з одного боку решітки на інший.

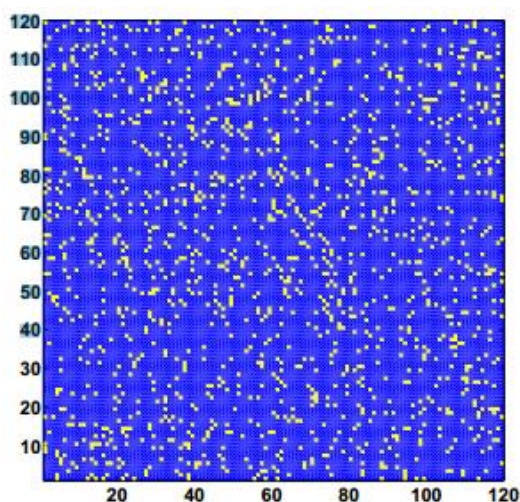


Рисунок 1.6 – Задача вузлів на квадратних ґратах ($n=120, p=0.9$)

Існує деяке критичне значення $p=p_c$, при якому відбувається перехід від діелектричного стану ($p < p_c$) до провідного при ($p > p_c$). Це критичне значення p_c називається порогом протікання (перколяції).

Порівнявши рисунок 1.3 та рисунок 1.6 (які відповідають значенням концентрації $p=0.1$ і $p=0.9$), можна побачити, що вони з точністю до заміни кольорів статистично ідентичні один одному. Справді, в умовах однорідності розподілу порожніх та зайнятих вузлів, система інваріантна щодо «перекрашування», тобто заміни порожніх вузлів зайнятими та навпаки при одночасній заміні ймовірності p на величину $1-p$. Іншими словами, з математичної точки зору немає жодної різниці між протіканням по зайнятим (чорним) вузлам від протікання по вільним (жовтим) вузлам. Слід підкреслити при цьому, що фізичні або прикладні аспекти протікання, зрозуміло, жорстко пов'язані з вибором типу вузлів: протікання провідних вузлів не ідентичне протіканню по вузлах-ізоляторах.

Для задачі вузлів на квадратній решітці поріг протікання приблизно дорівнює $p_c \approx 0.5926$. Близька до порога ситуація відображена на рисунку 1.7.

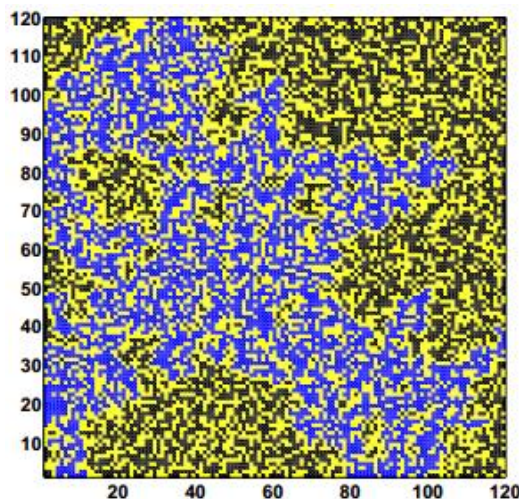


Рисунок 1.7 – Задача вузлів при концентрації провідних вузлів ($p=0.59$) в околі критичної

1.2 Перколяційні кластери

На противагу звичайним фазовим перетворенням, де зміна фаз відбувається за деякої критичної температури, описаний вище перколяційний перехід є геометричним фазовим перетворенням. Перколяційний фазовий перехід характеризується геометричними властивостями провідних кластерів поблизу $p = p_c$. При $p \ll 1$ існують тільки кластери невеликих розмірів. У міру зростання концентрації зайнятих вузлів середній розмір кластерів збільшується.

При концентрації, наближеній до критичної, з'являється кластер, що зв'язує протилежні сторони решітки. Такий кластер називають перколяційним (percolating) (сині пікселі на рисунку 1.7). У межі нескінченно протяжних ґрат перколяційний кластер називають нескінченним кластером (infinity cluster).

Як видно із рисунку 1.8 з подальшим зростанням концентрації (p) частка вузлів, що належать перколяційному кластеру (щільність перколяційного кластера) зростає. У системі виникає перколяційна мережа, розміри дірок у якій скорочуються із збільшенням p . Відповідно, середній розмір кінцевих кластерів, які не належать перколяційному кластеру, зменшується і при $p \sim 1$ усі вузли належать, очевидно, лише одному кластеру.

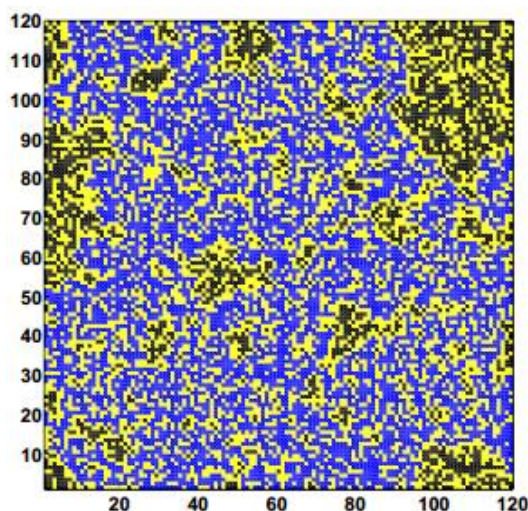


Рисунок 1.8 – Задача вузлів при концентрації провідних вузлів ($p = 0.62$)
більше критичної

З математичної точки зору кожен кластер є зв'язною компонентою всієї множини зайнятих вузлів, тому перколяційний кластер можна інтерпретувати як зв'язну підмножину всіх зайнятих вузлів решітки, якою ми можемо пройти, (або, як у прикладі, що розглядається, пропустити струм) з одного краю решітки на протилежний. У межі нескінченного розміру решітки нескінченим стає і перколяційний кластер.

Природньо характеризувати перколяційний кластер його потужністю, яка визначається як відношення кількості його вузлів, до повного числа вузлів решітки. Іншими словами, потужність перколяційного кластера – це просто ймовірність того, що вибраний навмання вузол ґрат належить

перколяційному кластеру. Потужність нескінченного кластера зазвичай позначається як P_∞ . Величину P_∞ називають ще ймовірністю протікання. Можна сказати, що перколяційний перехід пов'язаний з появою ненульової ймовірності протікання. Якщо $p < p_c$, то існують лише скінчені кластери, тому $P_\infty \approx 0$. При $p > p_c$, як побачимо у розділі 1.3, P_∞ збільшується як ступенева функція від p , що типово для звичайних фізичних фазових перетворень. Введемо функцію розподілу кластерів n_s за розмірами, точніше кажучи, за кількістю складових елементів (вузлів):

$$(p) = \frac{\langle N_s \rangle}{N}, \quad (1.1)$$

де $\langle N_s \rangle$ – середнє число кластерів розміру s ;

N – повне число комірок решітки, яка розглядається.

Величина $s \cdot n_s$ визначає питому (у перерахунку на одну комірку сітки) кількість комірок, які належать кластерам розміру s . Очевидно, що:

$$\sum_{s=1}^{\infty} s n_s(p) = p. \quad (1.2)$$

Іншими словами, ймовірність того, що вузол належить будь-якому кластеру, збігається з ймовірністю того, що він просто зайнятий.

Вище було розглянуто задачу вузлів (site percolation), в якій випадково зайнятими чи порожніми виявлялися вузли ґрат. Якщо випадково вибирати стан ребер решітки (наприклад, вважати ребра провідними або непровідними), вважаючи всі вузли провідними, то отримаємо формулювання задачі зв'язків (bond percolation). Формулювання задачі зв'язків ілюструє рисунок 1.9.

Два зайнятих (провідних) зв'язка належать одному кластеру в тому і тільки тому випадку, коли вони пов'язані ланцюжком зайнятих (провідних) зв'язків. Критична концентрація зв'язків відокремлює фазу кластерів

скінченного розміру від фази існування нескінченного кластера. Для квадратної решітки критична концентрація зв'язків дорівнює точно половині: $p_c = 1/2$.

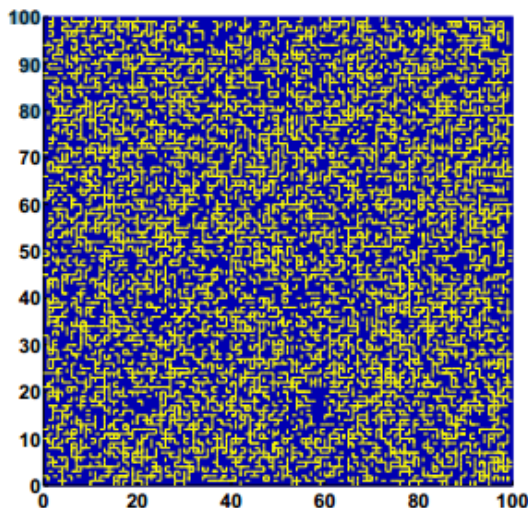


Рисунок 1.9 – Задача зв'язків на квадратній решітці (концентрація провідних зв'язків нижче критичної)

Розглянемо структуру нескінченного кластера на порозі перколяції $p = p_c$. Типовий приклад двовірного нескінченного кластера показано на рисунку 1.10.

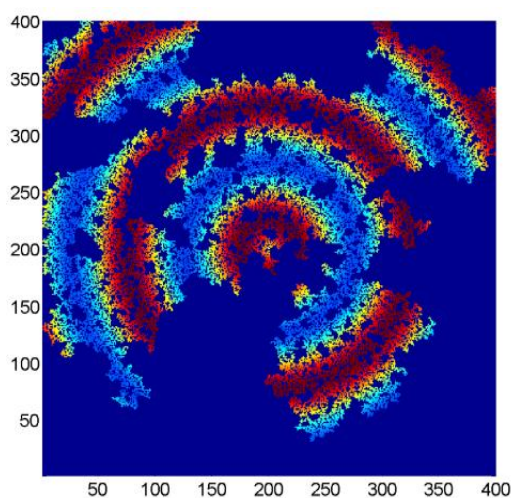


Рисунок 1.10 – Перколяційний кластер поблизу порогу протікання

Колір вузлів змінюється як періодична функція їхньої евклідової відстані від деякого вузла в центрі решітки. Можна бачити, що цей кластер містить дірки на всіх масштабах, подібно до серветки Серпінського (рисунок 1.11).

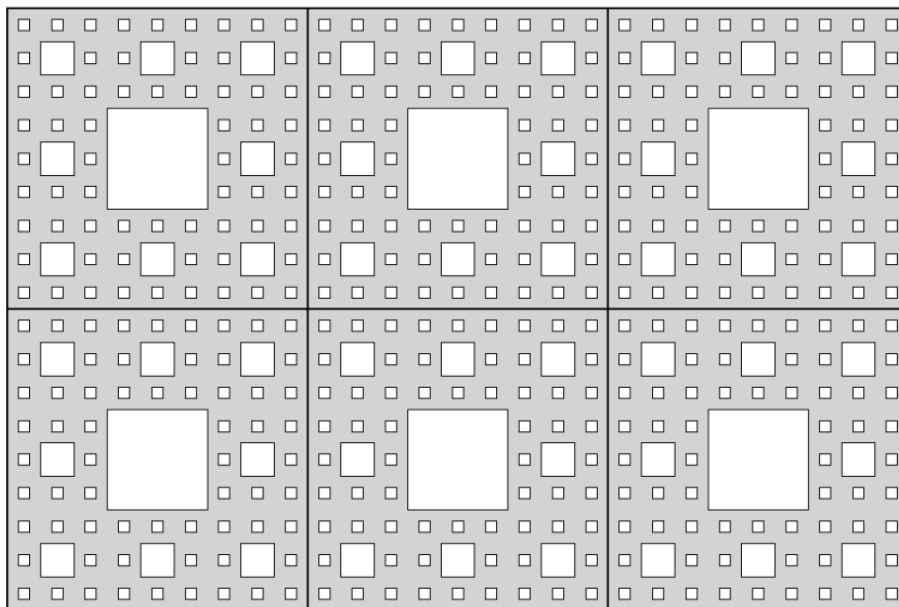


Рисунок 1.11 – Коврик Серпінського (типовий геометричний фрактал)

Перколяційний кластер (рисунок 1.10) є самоподібним на всіх лінійних масштабах, більших ніж період решітки і може розглядатися як фрактал. Фрактальна розмірність d_f описує як у середньому змінюється маса кластера M (число його елементів) усередині евклідової сфери зі зростанням її радіусу r :

$$M(r) = r^{d_f}. \quad (1.3)$$

Відомо, що для звичайних плоских геометричних фігур (нефрактальних) маса (у моделюванні – це просто кількість пікселів розміром r) зростає як r^2 . Аналогічним чином, маса тривімірних тіл зростає як r^3 . Інакше кажучи, для звичайних геометричних об'єктів фрактальна розмірність є цілим числом, яке співпадає з розміром простору ($d = 2$,

$d = 3$). В той же час фрактальні розмірності фракталів, зазвичай, є дрібними та меншими, ніж розмір простору. Наприклад, коврик Серпінського має $d_f = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.893$.

Для випадкових фракталів $M(r)$ є результатом усереднення за багатьма різними конфігураціями нескінченного кластера або, що те ж саме, за багатьма сферами з різними центрами на одному ж тому самому нескінченному кластері. Вище та нижче порога перколяції середні розміри скінчених кластерів описуються кореляційною довжиною ξ . На порозі $p = p_c$ вона (тобто ξ) розходить і дірки в нескінченному кластері виявляються на всіх масштабах. Вище порога ξ є середнім розміром дірок у нескінченному кластері. Оскільки ξ є скінченою, то самоподібність нескінченного кластера розповсюджується лише на масштаби менші ніж ξ . Величину $\xi(p)$ можна інтерпретувати як типовий масштаб самоподібності, у межах якого нескінченний кластер демонструє фрактальні властивості. На масштабах, більших ніж ξ , структура нескінченного кластера втрачає самоподібність і стає однорідною.

1.3 Зв'язок перколяції з теорією критичних явищ

Теорія критичних явищ має справу з макроскопічними статистичними системами, які знаходяться поблизу точки фазового переходу. Явища, які спостерігаються у цій ситуації, характеризуються великомасштабними нестійкостями, чи флуктуаціями. Як було вже згадано, появу в системі нескінченного кластера зв'язаних елементів можна розглядати як геометричний фазовий перехід: критична концентрація $p = p_c$ відокремлює фазу скінчених кластерів ($p < p_c$) від фази існування нескінченного кластеру ($p > p_c$). Перколяційне перетворення багато в чому схоже на звичайні термодинамічні фазові переходи 2-го роду. Наприклад, деякі матеріали демонструють за низьких температур спонтанну намагніченість

$\mu > 0$ за відсутності зовнішнього магнітного поля (феромагнітна фаза). При підвищенні температури спонтанна намагніченість, безперервно зменшуючись, зникає за деякої критичної температури $T = T_c$. При температурах вище за критичну $\mu = 0$, тобто настає парамагнітна фаза.

Магнітні матеріали представлені набором елементарних магнітних моментів (спинів). Взаємодія з-поміж них підтримує впорядкований стан, у якому напрями всіх спинів паралельні один одному. З іншого боку, термічні флуктуації руйнують порядок та підтримують стан, у якому орієнтації спинів випадкові. За низьких температур взаємодія магнітних моментів домінує – у системі виникає далекий порядок. Спонтанна намагніченість описує цей далекий лад і називається параметром порядку магнітного переходу.

Зі збільшенням температури спонтанна намагніченість зменшується і поблизу T_c прагне нуля за ступеневим законом $\mu(T) \sim (T_c - T)^\beta$. Вище критичної температури теплова енергія домінує і лише скінчені кластери співспрямованих спинів можуть існувати. Їхня випадкова орієнтація забезпечує нульову спонтанну намагніченість.

У явищі протікання концентрація (p) зайнятих вузлів грає роль температури у термічних фазових переходах. Як і в термічних фазових переходах довгі кореляційні зв'язки контролюють перколяційне перетворення та поведінка значущих величин поблизу переходу описується ступеневими законами та критичними індексами.

Перколяційний перехід характеризується геометричними властивостями зв'язних кластерів поблизу $p = p_c$. Важливою величиною є ймовірність того, що вузол (або зв'язок) належить нескінченному кластеру. Якщо $p < p_c$, то існують тільки скінчені кластери і $P_\infty \approx 0$. При $p > p_c$, P_∞ поводить подібно до спонтанної намагніченості нижче T_c і збільшується з p за ступеневим законом:

$$p_\infty = (p - p_c)^\beta. \quad (1.4)$$

Так само, як і спонтанна намагніченість, значення P_∞ визначає порядок у перколяційній системі і може бути визначено як параметр порядку. Лінійні розміри скінчених кластерів нижче й вище за p_c характеризуються кореляційною довжиною. Кореляційна довжина ξ визначена як середня відстань між вузлами одного й того самого скінченого кластера. З наближенням p до p_c , ξ зростає за законом:

$$\xi = |p - p_c|^{-\nu}. \quad (1.5)$$

З однаковим показником ν нижче і вище порога (p_c). Середня кількість вузлів (маса) скінченого кластера теж розходиться:

$$S = |p - p_c|^{-\gamma}, \quad (1.6)$$

знову ж таки з однаковим показником γ нижче і вище за поріг.

Для отримання S та ξ потрібно обчислення середніх по всіх скінчених кластерах на решітці. У магнітних системах величинам P_∞ та S відповідають спонтанна намагніченість μ і сприйнятливність.

Ще один критичний індекс характеризує поведінку функції розподілу кластерів за розмірами n_s . Залежність n_s від p має наступний вигляд:

$$n_s(p) = s^{-k} \exp\{-As|p - p_c|^{-\delta}\}. \quad (1.7)$$

Показник δ визначає характерний найбільший розмір скінчених кластерів. Кластери розміром $s_c \sim |p - p_c|^{-\delta}$ називаються критичними. Кластери з $s > s_c$ експоненційно малоймовірні. А от розподіл кластерів з числом елементів $s \ll s_c$, як видно, демонструє скейлінгову поведінку:

$$n_s(p) = s^{-k}. \quad (1.8)$$

На рисунку 1.12 представлена ілюстрація задачі перколяції вузлів у безпосередній близькості від порога, при цьому кластери різних розмірів пофарбовані в різні кольори (чим більшим є кластер, тим тепліший і світліший відтінок). Максимальний кластер виділений білим.

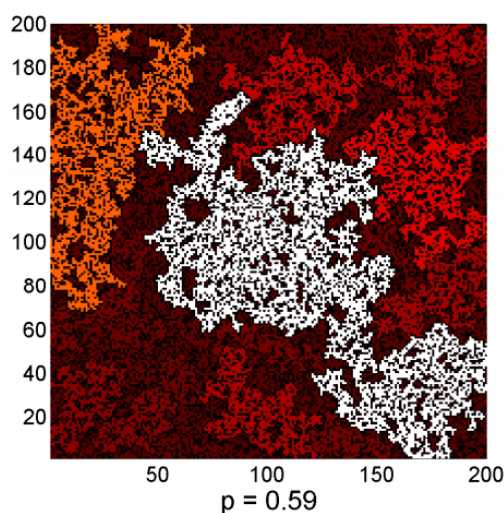


Рисунок 1.12 – Задача вузлів на квадратній решітці 200×200

Показники β , ν та γ (таблиці 1.1) описують критичну поведінку типових величин, пов'язаних з перколяційним переходом та називаються критичними індексами. Ці індекси універсальні і не залежать ані від структурних особливостей решітки (квадратна або трикутна і т.д.), ані від типу протікання (по вузлам, по зв'язкам або континуальне), а залежать тільки від розмірності простору.

Таблиця 1.1 – Критичні індекси перколяційного переходу

Перколяція	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d > 6$
Індекс параметра порядку, β	5/36	0.417 ± 0.003	0.5	0.7	1
Індекс радіусу кореляції, ν	4/3	0.875 ± 0.008	0.7	0.6	1/2
Середня кількість елементів у кластері, γ	43/18	1.795 ± 0.005	1.8	1.6	1

Ця властивість універсальності є характерною рисою фазових переходів другого роду, де параметр порядку безперервно зникає в критичній точці. Наприклад, спонтанна намагніченість всіх тривимірних магнітних матеріалів описується тим самим індексом β незалежно від кристалічної структури і типу взаємодії між сусідніми спинами. Слід зауважити, що всі показники визначені в межі нескінченно великих систем. В обмеженій системі (на решітці скінченного розміру) P_∞ , наприклад, не обов'язково дорівнює нулю нижче за поріг перколяції p_c .

1.4 Критичні параметри перколяції на регулярних решітках

Від чого залежить поріг протікання у задачі зв'язків? Якщо всі зв'язки цілі, то кожен вузол пов'язаний з іншими вузлами, де число найближчих сусідів (z) сильно змінюється від ґрат до ґрат. При заданій частці цілих зв'язків x кожен вузол у середньому пов'язаний з $z \cdot x$ іншими вузлами. Можна висловити наступну гіпотезу: чи може величина zx , яка є середньою кількістю вузлів, з якими пов'язаний кожен вузол, містити інформацію, достатню для того, щоб сказати, чи є на решітці протікання чи ні? В такому разі жодної додаткової інформації про властивості решітки, окрім числа z , і не треба, тобто протікання виникає у всіх решіток при тому самому значенні величини zx .

Перевірити це дуже просто. Потрібно для всіх решіток з відомими порогами протікання задачі зв'язків обчислити добуток $z \cdot x_{зв}$. Якщо він виявиться універсальним, тобто однаковим для всіх решіток (чи хоча б приблизно однаковим), то висловлена гіпотеза вірна, або наближено вірна.

Відповідні дані зібрані у таблиці 1.2. Видно, що з похибкою менше ніж 10%, для плоских решіток справедлива формула:

$$zx_{зв} = 2, \quad (1.9)$$

а для об'ємних (тривимірних) решіток:

$$zx_{3B} = 1,5. \quad (1.10)$$

Таким чином, гіпотеза про універсальність середньої кількості зв'язків на вузол, необхідного для виникнення протікання, не є точною, але виконується наближено. Якщо взяти до уваги, що як у групі плоских сіток, так і в групі тривимірних кожна з величин z та x_{3B} , варіюється принаймні вдвічі, то точність, з якою в кожній групі величина zx_{3B} є постійною (1.9), (1.10), можна вважати високою.

Таблиця 1.2 – Добуток zx_{3B} для регулярних решіток

Тип решітки	z	x_{3B}	zx_{3B}
Плоскі решітки ($d = 2$)			
Квадратна	4	0.5	2.0
Трикутна	6	0.35	2.1
Шестикутна	3	0.65	2.0
Об'ємні решітки ($d = 3$)			
Проста кубічна	6	0.25	1.5
Об'ємноцентрована кубічна	8	0.18	1.4
Гранецентрована кубічна	12	0.12	1.4
Типу алмазу	4	0.39	1.6

Отже, щоб приблизно оцінити поріг протікання задачі зв'язків, достатньо знати число найближчих сусідів і скористатися формулою (1.9) у разі двовимірних (пласких) ґрат і (1.10) у разі об'ємних ґрат. Поріг протікання задачі зв'язків найбільш чутливий до кількості саме найближчих сусідів та значно менш чутливий до всіх інших властивостей решітки (зокрема, до кількості сусідів другого порядку).

Розберемо тепер схему такого самого типу для задачі вузлів.

Природно спочатку випробувати попередній варіант, тобто подивитися, як змінюється від решітки до решітки величина $zx_{\text{вуз}}$. Легко переконатися, що вона змінюється майже так само, як кожна з величин z та $x_{\text{вуз}}$ окремо. Цьому не слід дивуватися: у задачі зв'язків добуток $zx_{\text{зв}}$ має чіткий фізичний зміст – середня кількість цілих (провідних) зв'язків, що припадає на один вузол. У разі задачі вузлів зв'язок працює тільки якщо він з'єднує два чорних (провідних) вузли, а во всіх інших випадках зв'язок є марним, тобто від його наявності нічого не змінюється. Саме тому добуток $zx_{\text{вуз}}$ ніякого особливого сенсу не має.

У 1970 р. американські фізики Шер і Заллен запропонували інший спосіб оцінки порога протікання завдання вузлів. Їхня ідея полягала в тому, щоб співставити кожному вузлу певну частку простору. Після цього можна стверджувати, що протікання по чорним (або білим) вузлам виникає, коли частка простору, зайнята цими вузлами, перевищує деяке критичне значення. В свою чергу це значення слабо залежить від типу решітки.

Уявимо навколо кожного вузла решітки кулю (або коло у разі плоскої решітки) з радіусом, рівним половині відстані до найближчого сусіда. При цьому кулі (кола), побудовані навколо сусідніх вузлів, торкаються одна одної (рисунки 1.13). Білому вузлу припишемо білу кулю, а чорному вузлу – чорну. Якщо два білих вузли пов'язані один з одним, то між ними є шлях по білих кулях, які торкаються одна одну. Тому виникнення протікання означає появу шляхів нескінченної довжини по білих кулях, які торкаються одна одну.

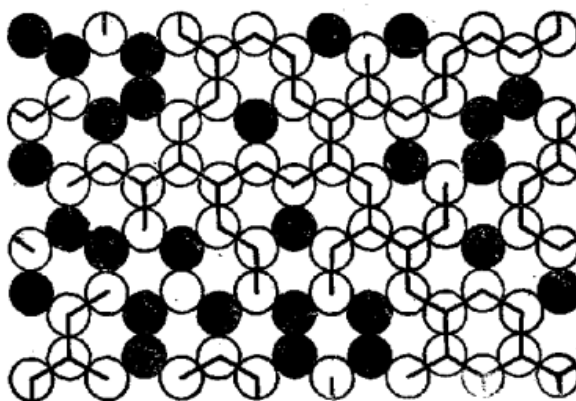


Рисунок 1.13 – Покриття колами шестикутньої решітки

Шер і Заллен припустили, що протікання виникає в тому випадку, коли частка повного об'єму (площі), займана білими кулями (у плоскому випадку колами), перевищить деяке критичне значення, яке не залежить від типу ґрат. Щоб перевірити це припущення, потрібно обчислити частки об'єму (f), які займають білі кулі при $x = x_{\text{вуз}}$, для різних ґрат з відомими значеннями $x_{\text{вуз}}$ та порівняти їх один з одним. Таким чином, необхідно порахувати частку обсягу, займаного білими кулями у разі, коли всі кулі – білі. Цю величину позначають літерою f і називають коефіцієнтом заповнення простору.

Коефіцієнт заповнення істотно залежить від типу решітки. Щоб знайти частку об'єму, заповненого білими кулями при $x < 1$, потрібно помножити коефіцієнт заповнення на частку білих куль. Отже, частка об'єму, заповненого білими кулями, дорівнює $f \cdot x$. На порозі перколяції вона дорівнює $f x_{\text{вуз}}$.

Коефіцієнти заповнення для різних решіток наведені у таблиці 1.3.

Щоб уявити, як вони отримані, обчислимо цю величину для шестикутньої решітки, зображеної на рисунку 1.13. Можна обчислити, що на кожен вузол цієї решітки припадає частка загальної площі решітки, яка дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, де a – сторона шестикутника. Частка площі, зайнята

колами, дорівнює відношенню площі одного кола до площі, що припадає на один вузол:

$$f = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046. \quad (1.11)$$

Аналогічним чином обчислюються коефіцієнти заповнення для інших решіток, причому, як видно з таблиці 1.3 вони варіюються в широких межах. Можна бачити, що з точністю близько 10-15% справедливі формули:

$$f \cdot x_{\text{вуз}} = 0.5, \quad (1.12)$$

для плоских (двовимірних) решіток, та:

$$f \cdot x_{\text{вуз}} = 0.16, \quad (1.13)$$

для об'ємних (тривимірних) решіток.

Таблиця 1.3 – Добутки $f x_{\text{вуз}}$ для регулярних решіток

Тип решітки	f	$x_{\text{вуз}}$	$f x_{\text{вуз}}$
Пласкі решітки ($d = 2$)			
Квадратна	0.79	0.59	0.47
Трикутна	0.91	0.5	0.46
Шестикутна	0.61	0.7	0.43
Об'ємні решітки ($d = 3$)			
Проста кубічна	0.52	0.31	0.16
Об'ємноцентрована кубічна	0.68	0.25	0.17
Гранецентрована кубічна	0.74	0.20	0.15
Типу алмазу	0.34	0.43	0.15

Оскільки обчислити коефіцієнт заповнення f порівняно просто, то формули (1.12)–(1.13) дають можливість оцінити поріг протікання задачі вузлів для будь-яких регулярних решіток.

Різниця між перколяцією по вузлах та по зв'язках проілюстрована на рисунку 1.14.

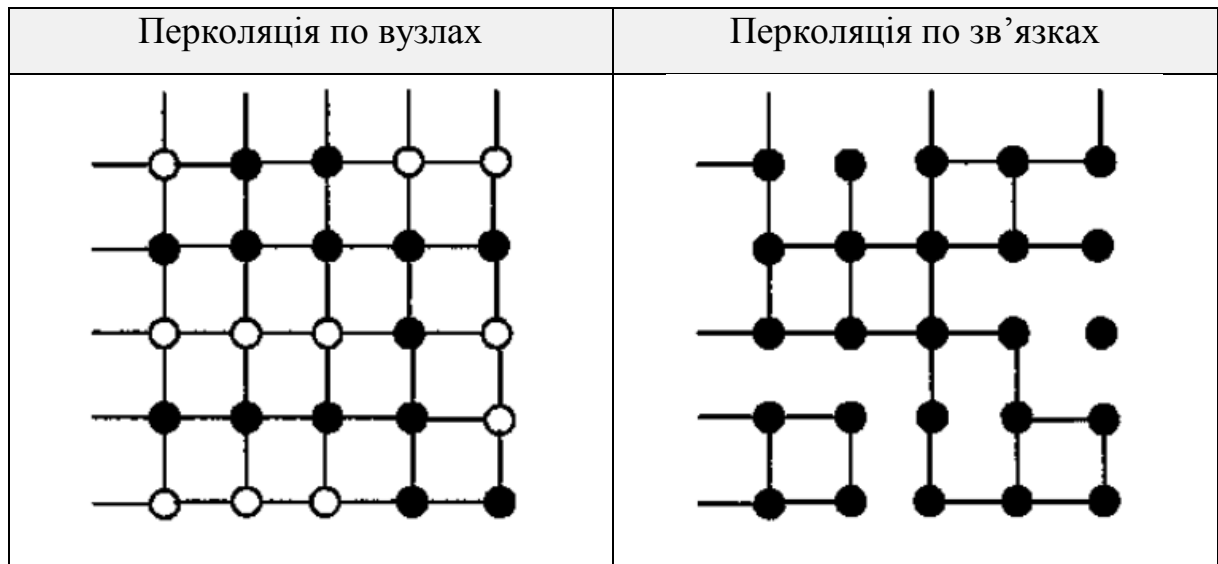


Рисунок 1.14 – Види перколяції на квадратній решітці

Легко зрозуміти, що критична частка обсягу, заповнена білими кулями, необхідна для протікання, монотонно зменшується зі збільшенням розмірності простору. В одновимірному просторі, тобто в лінійному ланцюжку вузлів, протікання по білих вузлах неможливе при будь-якій ненульовій концентрації чорних вузлів, бо навіть один чорний вузол запирає шлях протікання. У плоскій (двовимірній) решітці з'являється можливість обходу чорних вузлів, а в тривимірній (об'ємній) таких можливостей ще більше, оскільки обхідні шляхи не обмежені площиною.

2 УТВОРЕННЯ ПЕРКОЛЯЦІЙНИХ КЛАСТЕРІВ ЗА УМОВ КЛАСИЧНОЇ (БІНАРНОЇ) ФУНКЦІЇ ПРИНАЛЕЖНОСТІ

2.1 Параметри перколяції у околі критичної концентрації

Явища, що описуються теорією протікання, відносяться до так званих критичних явищ. Ці явища характеризуються критичною точкою – значенням концентрації (p) перколюючих вузлів, у якій властивості системи різко змінюються. За роки, що минули з першої роботи Бродбента і Хаммерслі [1], з'ясувалося, що теорія протікання описує широке коло явищ, які стосуються фізики, хімії, інформатики. Втім, актуальність обраної теми обґрунтовується тим, що теорія перколяції стосується не тільки фізичних та хімічних явищ, а й процесів поширення та розповсюдження інформації, даних, комп'ютерних (та біологічних, таких як Ковід-19) вірусів.

У класичній постановці задачі перколяції використовується чітка (бінарна) логіка: вузол або перколює (протікає), або ні. Проте, у багатьох практично важливих випадках вузли не можуть бути однозначно класифіковані. Вони можуть частково протікати, або дослідник, не маючи точної інформації про стан конкретного вузла, може лише непрямыми методами оцінити ймовірність його стану. Таким чином, застосування теорії нечітких множин, нечіткої логіки, до задачі перколяції є актуальною та практично важливою проблемою.

Першою роботою, присвячену дослідженню процесів перколяції, була теорія Флорі-Штокмайера [2], яка вивчала перехід до гелеутворення в реакціях полімеризації. Основи теорії перколяції були закладені в роботі Бродбента і Хаммерслі [1], які досліджували протікання газу через вугільний фільтр протигазу. Саме потреби вугільної, нафто- та газодобувної промисловості обумовили велику практичну значущість досліджень перколяційних явищ. Наступним важливим поштовхом для досліджень перколяції була розробка математичного базису для опису фізичних явищ,

пов'язаних з перколяцією, у решітковій теорії поля та квантовій хромодинаміці [3]. Сучасний розвиток інформатизації, нейробіології обумовлює актуальність застосування перколяційних моделей у дослідженні явищ розповсюдження інформації [4], комп'ютерних та біологічних вірусів (типу Covid-19) [5].

Основним регулюючим параметром, від якого залежать перколяційні процеси по вузлах решітки є концентрація перколюючих вузлів (p), тобто ймовірність того, що вузол є таким, що перколює (протікає, зайнятий, чорний). Зрозуміло, що з ймовірністю $1 - p$ вузол є вільним (непрозорим для протікання, білим). За малої концентрації ($p \ll 1$) зайняті вузли або ізолювані один від одного, або групуються у невеликі кластери суміжних вузлів (від англ. cluster – гроно). При збільшенні концентрації зайнятих вузлів зростають і характерні розміри кластерів.

Наприклад, на рисунку 2.1 показано квадратну решітку розміром 120×120 при концентрації зайнятих (провідних) вузлів, яка дорівнює, відповідно, $p = 0.1$, $p = 0.4$ та $p = 0.55$.

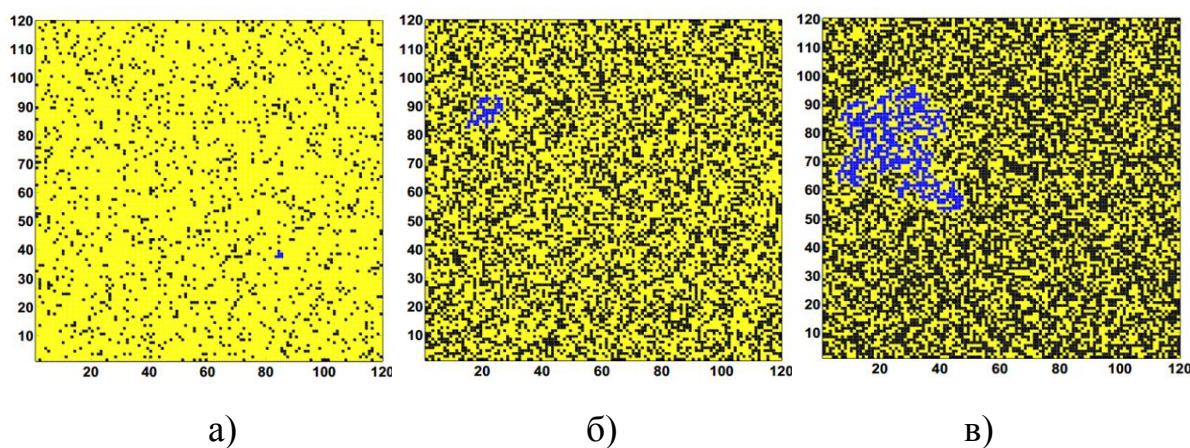


Рисунок 2.1 – Перколяція на квадратній решітці при докритичних концентраціях: $p = 0.1$ (а), $p = 0.4$ (б), $p = 0.55$ (в)

Жовтим кольором показані вільні (непровідні) вузли, чорним – зайняті. Найбільший за розміром кластер зайнятих вузлів виділено синім

кольором. Можна бачити, що при вказаних концентраціях (при $p = 0.1, 0.4, 0.55$) решітка в цілому демонструє діелектричні властивості, оскільки не існує ланцюгів, які б з'єднували протилежні сторони решітки.

Відомо [9], що для кожної мережі існує деяке порогове значення концентрації зайнятих вузлів $p = p_c$ таке, що при $p > p_c$ найбільший кластер стає гігантським, тобто таким, що охоплює майже всі провідні вузли; ймовірність того, що решітка є провідною (від однієї сторони до протилежної) прямує до одиниці. Інакше кажучи, при досягненні граничної концентрації $p = p_c$ уособлені дрібні кластери починають швидко об'єднуватись, виникає гігантський кластер. Значення цієї граничної концентрації залежить від решітки, структури сусідства та, зазвичай, виявляється шляхом чисельного моделювання. Так, для квадратної решітки (нескінченного розміру) $p_c \approx 0.5927$.

На рисунку 2.2 показано таку ж саму квадратну решітку (120×120) при критичній та закритичних концентраціях провідних вузлів ($p = 0.5927$, $p = 0.62$ та $p = 0.9$). На рисунку 2.2 можна бачити, що при $p > p_c$ сині вузли формують гігантський провідний кластер, який забезпечує проходження електричного струму з одного боку решітки на інший.

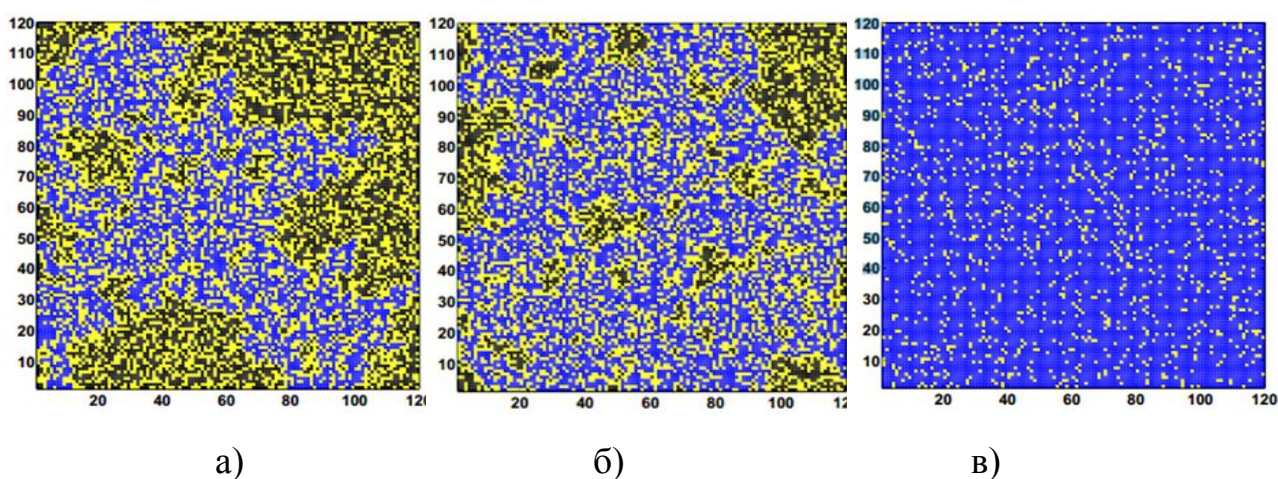


Рисунок 2.2 – Перколяція на квадратній решітці при критичній та закритичних концентраціях: $p = p_c = 0.5927$ (а), $p = 0.62$ (б), $p = 0.9$ (в)

Перколяційний фазовий перехід характеризується геометричними властивостями провідних кластерів поблизу $p = p_c$. При $p \ll 1$ існують тільки кластери невеликих розмірів. У міру зростання концентрації зайнятих вузлів середній розмір кластерів збільшується. При концентрації, наближеній до критичної, з'являється кластер, який зв'язує протилежні сторони решітки. Такий кластер називають перколяційним, або гігантським. З подальшим зростанням концентрації (p) частка вузлів, що належать гігантському кластеру (щільність перколяційного кластера) зростає. У системі виникає перколяційна мережа, розміри дірок у якій скорочуються із збільшенням p . Відповідно, середній розмір дрібних кластерів (тобто таких, які не належать гігантському) зменшується і при $p \sim 1$ усі вузли належать, очевидно, лише одному кластеру.

Характерною ознакою досягнення порогу перколяції (p_c) є співвідношення між розмірами першого за розміром та другого (та більш дрібних) кластерів. У докритичній області ($p < p_c$) вони синхронно та монотонно зростають (рисунок 2.3). Після досягнення порогової концентрації провідних вузлів перший кластер стає гігантським, його розмір продовжує зростати, а розміри всіх інших кластерів швидко спадають через поглинання їх гігантським.

Приклад залежності розміру перколяційних кластерів n_1, n_2, n_3, n_4 від концентрації провідних вузлів (p) показаний на рисунку 2.3. Розглядалась квадратна решітка розміром 512×512 вузлів, значення p варіювалось від 0.1 до 0.85. Можна бачити, що між значеннями $p = 0.59$ та $p = 0.60$ відбувається фазовий перехід – виникає гігантський кластер, якій охоплює більшість вузлів решітки та забезпечує протікання крізь неї у будь-якому напрямку. Це повністю відповідає теорії перколяції, за якою критичне значення дорівнює $p_c \approx 0.5927$. Можна бачити, що залежності $n_i(p)$ є дуже чіткими. Саме таким чином експериментально оцінюють значення порогової концентрації p_c у тих випадках, коли його не можна оцінити аналітично.

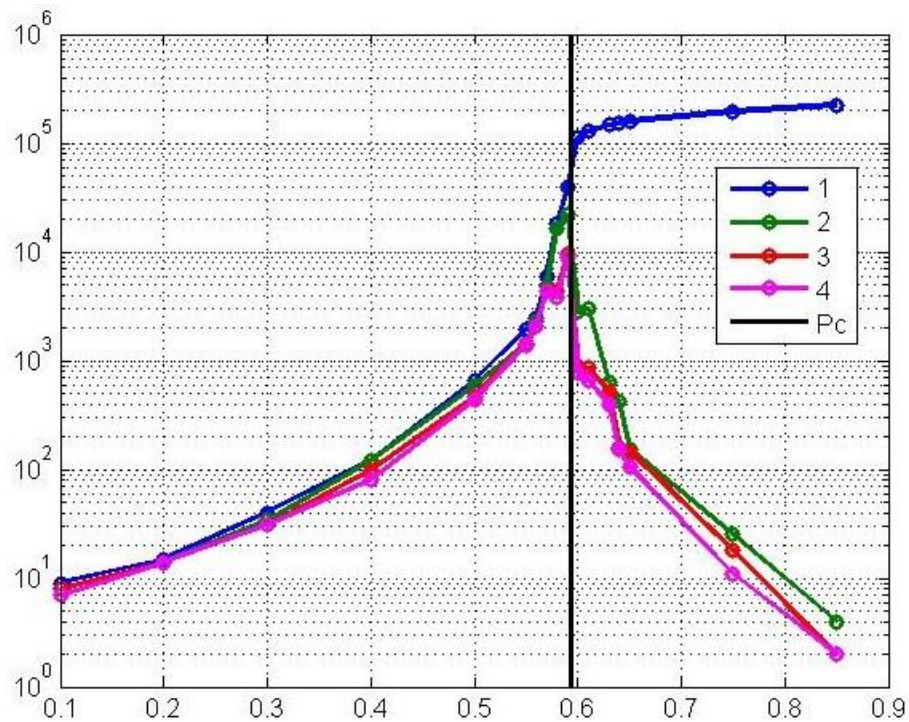


Рисунок 2.3 – Залежність розміру чотирьох найбільших кластерів від концентрації вузлів, які перколюють

Розглянемо структуру нескінченного кластера на порозі перколяції $p = p_c$. Першою важливою величиною є ймовірність (p_∞) того, що вузол належить гігантському кластеру. Якщо $p < p_c$, то ймовірність утворення гігантського кластера прямує до нуля, тому $p_\infty \approx 0$. При $p > p_c$ величина p_∞ збільшується з p за степеневим законом:

$$p_\infty \approx \text{const} \cdot (p - p_c)^\beta. \quad (2.1)$$

Лінійні розміри скінчених кластерів нижче й вище за p_c характеризуються кореляційною довжиною (L). Кореляційна довжина – це середня відстань між вузлами одного й того самого кластера. З наближенням p до p_c , L зростає також за степеневим законом:

$$L \approx \text{const} \cdot |p - p_c|^{-\nu}. \quad (2.2)$$

З (2.2) випливає, що у докритичній області ($p < p_c$) кореляційна довжина зростає із зростанням p , а у закритичній області (тобто при $p > p_c$) із подальшим зростанням p кореляційна довжина спадає. Отже, при $p < p_c$ збільшення концентрації провідних вузлів призводить до збільшення розмірів кластерів, що зумовлює й зростання кореляційної довжини. А от при $p > p_c$ зазначений фактор пересилюється об'єднанням дрібних кластерів у гігантський із «спрямленням» шляхів між провідними вузлами та, відповідно, скороченням довжин маршрутів.

Середня маса кластера (кількість вузлів) теж розходиться за степеневим законом з показником γ :

$$S \approx \text{const} \cdot |p - p_c|^{-\gamma}. \quad (2.3)$$

Для отримання S та L потрібно обчислення середніх по всіх скінчених кластерах на решітці.

Важливою характеристикою мережі щодо перколяції є розподіл кластерів за розмірами: $n_s(p, k)$. Залежність n_s від p має наступний вигляд:

$$n_s(p, k) \approx \text{const} \cdot s^{-k} \cdot \exp\{-As|p - p_c|^{-\delta}\}. \quad (2.4)$$

Показник δ визначає характерний найбільший розмір скінчених кластерів. Кластери розміром $s_c \sim |p - p_c|^{-\delta}$ називаються критичними. Кластери з $s > s_c$ експоненційно малоймовірні. А от розподіл кластерів з числом елементів $s \ll s_c$, демонструє скейлінгову поведінку:

$$n_s(p, k) \approx \text{const} \cdot s^{-k}. \quad (2.5)$$

Показники β , ν та γ описують критичну поведінку типових величин, пов'язаних з перколяційним переходом та називаються критичними індексами. Ці індекси універсальні і не залежать ані від структурних

особливостей решітки (квадратна або трикутна і т.д.), ані від типу протікання (по вузлам, по зв'язкам), а залежать тільки від розмірності простору (d). Для двовимірних ($d = 2$) решіток

$$\beta = \frac{5}{36}, \quad \nu = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{43}{18}. \quad (2.6)$$

Класична задача перколяції має наочне тлумачення: є деяка регулярна решітка (прямокутня, трикутна, об'ємна, багатовимірна тощо), кожен зв'язок якої має електричний опір r_1 . Такий зв'язок є провідним (нехай умовно він буде чорним). Випадковим чином провідні зв'язки розриваються. Такі розірвані зв'язки буде цілком природньо «пофарбувати» у білий колір. Вони мають опір $r_2 = \infty$. Відповідним чином, їх провідність дорівнює нулю, в той час як провідність чорних зв'язків ($\varepsilon = 1/r_1$) є ненульовою.

Необхідно знайти таку концентрацію провідних зв'язків p_c , при досягненні якої існує зв'язний шлях за чорними зв'язками між будь-якою парою вузлів решітки. З цього буде випливати існування маршруту вздовж провідних зв'язків від однієї сторони решітки до протилежної. Така зв'язна частина, яка тягнеться через всю решітку, називається нескінченним кластером.

Звичайно, реальна решітка є скінченою за розміром, тож під «нескінченністю» кластера розуміють таку ситуацію, коли опір решітки від однієї сторони до протилежної з ймовірністю $1 - \varepsilon$ не обертається у нескінченність. Таким чином, момент появи нескінченного кластеру та його властивості мають випадковий, ймовірнісний характер. Проте, існує деяка критична концентрація провідних зв'язків, при якій структури провідних зв'язків, отримані в результаті різних реалізацій випадкового процесу розриву зв'язків, матимуть усталені властивості.

Можна навести аналогію з розподілом молекул газу у ємності: у звичайних умовах ймовірність того, що в одній її половині збереться весь

газ, зневажливо мала, тому ніколи не береться до уваги. В той же час, якщо молекул лише дві, то цією ймовірністю (яка дорівнює $1/4$) нехтувати не можна.

Отже, за умови $p > p_c$ провідність всієї решітки (від сторони до протилежної сторони) не дорівнює нулю, бо струм знаходить свій шлях вздовж зв'язків чорного нескінченного кластера. Якщо ж $p < p_c$, то такого шляху не існує і тоді провідність решітки дорівнює нулю.

Задача перколяції є одним з найбільш простих прикладів критичних явищ. Так, більшість характеристик, які описують властивості перколяції поблизу критичної концентрації p_c , поведуться універсальним чином, тобто описуються степеневими залежностями, чисельні значення показників у яких не залежать ані від виду решітки (прямокутня, трикутня, шестикутня тощо), ані від визначення сусідства комірок (чотири комірки для прямокутньої решітки, чи вісім).

Однією з найважливіших характеристик процесу перколяції є розподіл скінчених (тобто всіх, окрім гігантського) кластерів за розміром, тобто кількість n_s кластерів з s вузлів, що припадають на один вузол решітки. Іншою (пов'язаною з першою) характеристикою є потужність гігантського кластера. Асимптотично (тобто для нескінченної решітки) він, звісно, також нескінчений.

Тому в якості міри його потужності використовують ймовірність (p_{inf}) того, що довільний вузол (чи зв'язок) належить цьому кластеру. Для обрахунку зазначеної ймовірності достатньо врахувати, що ймовірність потрапити на чорний вузол (p) є сумою ймовірностей потрапити на гігантський кластер або на будь-який з інших:

$$p = p_{inf} + \sum_s s \cdot n_s, \quad (2.7)$$

звідки випливає, що:

$$p_{\text{inf}} = p - \sum_s s \cdot n_s. \quad (2.8)$$

Згідно з теорією критичних явищ, розподіл $n_s(s)$ суттєво залежить від різниці між фактичною концентрацією (p) об'єктів, які перколюють, та критичним (пороговим) значенням цієї величини (p_c). При цьому дуже важливим є те, що зазначений розподіл не залежить ані від виду перколяції (по вузлах, чи по зв'язках), ані від типу решітки (прямокутня з 4 сусідами, прямокутня з 8 сусідами, трикутня, шостикутня тощо). Навіть самі решітки не обов'язково мають бути регулярними; регулярність можна замінити на статистичну просторову однорідність. Поблизу порогу перколяції цей розподіл є степеневим:

$$n_s = |p - p_c|^{2-\nu}, \quad (2.9)$$

що вказує на фрактальні властивості структури решітки. Приклад такого розподілу показаний на рисунку 2.4.

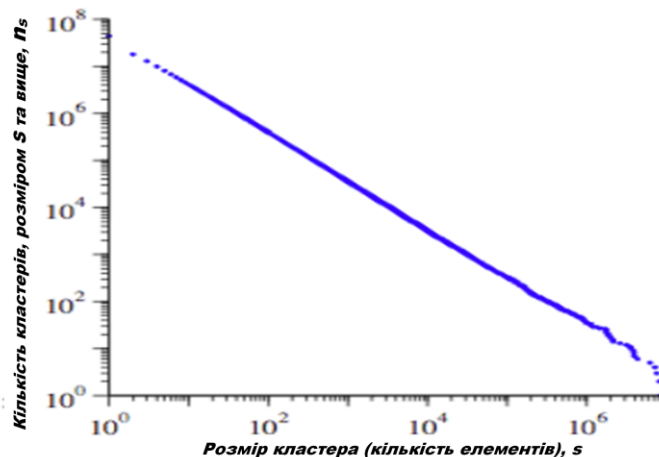


Рисунок 2.4 – Розподіл кластерів за розміром на порозі перколяції

При цьому розмір найбільшого кластера має наступний кусково-неперервний розподіл:

$$M(L) \sim \begin{cases} \log(L), & p < p_c, \\ L^D, & p = p_c, \\ L^d, & p > p_c, \end{cases} \quad (2.10)$$

де L – геометричний розмір решітки, d – евклідова (цілочисельна) розмірність простору ($d = 2, 3, \dots$), D – фрактальна розмірність, яка залежить лише від геометричної та дорівнює $D = 91/48 \approx 1.89$ для $d = 2$.

Інколи для аналізу перколяційних процесів застосовують додатковий віртуальний провідний (чорний) вузол поза решіткою, який пов'язаний з кожним чорним вузлом решітки з ймовірністю $1 - \exp(-h)$, де h – фактор поля. Такий вузол називають демоном Кастеляйна-Фортуїна. Можна довести, що введення цього демона залишає параметр p_{inf} не рівним нулю навіть за докритичної концентрації провідних вузлів, бо при $p < p_c$ теж буде існувати гігантський кластер, розмір якого приблизно пропорційний h .

Припустимо, що чорні зв'язки в перколяційній мережі мають опір $r_1 \geq 0$, а розірвані (білі) – $r_2 = \infty$. При великих розмірах решітки вплив конкретної випадкової реалізації структури (тобто конкретної реалізації випадкового розподілу чорних та білих зв'язків) стає несуттєвим і тоді повний опір R стає визначеною величиною:

$$R = \frac{1}{\sigma_e} \cdot \frac{L}{L^{d-2}}, \quad (2.11)$$

де d – це розмірність простору решітки, тобто для пласкої решітки $d = 2$.

При $p < p_c$ існуючі провідні кластери є дрібними, через це вони ізольовані один від одного і тому струм через решітку пройти не може. Отже, при $r_2 = \infty$ та $p < p_c$ ефективна провідність $\sigma_e = 0$. Якщо ж r_2 велике, але скінчене (тобто $1 \ll r_2 < \infty$), то перколяційний процес (струм) зможе пройти від одного кластера до іншого. При цьому провідність сітки σ_e буде пропорційна до h та за умови $h \rightarrow 0$ вона також прямуватиме до 0 ($\sigma_e \rightarrow 0$).

2.2 Оцінювання порогу перколяції для трикутної решітки

Одним з найпотужнішим з методів оцінювання критичних індексів перколяційних процесів є ренорм-груповий метод.

Поблизу порога протікання p_c структура зв'язні частини решітки (гігантський кластер при $p > p_c$, та докритичні кластери при $p < p_c$) мають фрактальну структуру, тобто є статистично самоподібними. З цього випливає, що переходячи від одного масштабу до іншого та вимагаючи масштабної інваріантності, можна наближено оцінити значення критичних індексів. Саме такий підхід і є сутністю метода ренорм-групового аналізу в задачі оцінювання порогів протікання (p_c) та критичного індексу (ν) кореляційної довжини кластерів.

Застосування ренорм-групового аналізу суттєво залежить від виду перколяції (по вузлах, чи по зв'язках) та від виду решітки. Найпростішим випадком є перколяція по вузлах трикутної решітки. Нехай (як і раніше) чорний колір буде позначати перколюючі (провідні) вузли, а білий – не провідні. В задачі перколяції по вузлах всі зв'язки є провідними.

Процес ренормалізації полягає в тому, що кожній групі з трьох сусідніх вузлів первісної решітки (рисунок 2.5) співставляється вузол нової (ренормованої) решітки.

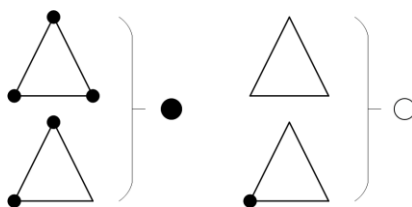


Рисунок 2.5 – Правила перетворення вузлів при ренормалізації трикутної сітки

Правила перетворення вузлів під час ренормалізації сітки є дуже простими: якщо у групі з первісної решітки два, або всі три вузла провідні (чорні), то їй співставляється чорний вузол у ренормованій решітці.

Інакше (жодного, чи один чорний вузол у трикутнику) групі співставляється білий вузол. Отже, за результатами ренормалізації буде отримана нова решітка, в якій деякі з вузлів чорні, а деякі – білі. Провідність вузлів ренормованої решітки повністю визначається провідністю груп первісної решітки.

Приклад ренормалізації трикутної решітки показаний на рисунку 2.6. Групування вузлів первісної решітки проілюстровано заливкою сірим кольором. Під час ренормалізації виявляється, що деякі з цих груп є провідними (такі трикутники залиті чорним кольором), а деякі – ні (блакитні трикутники).

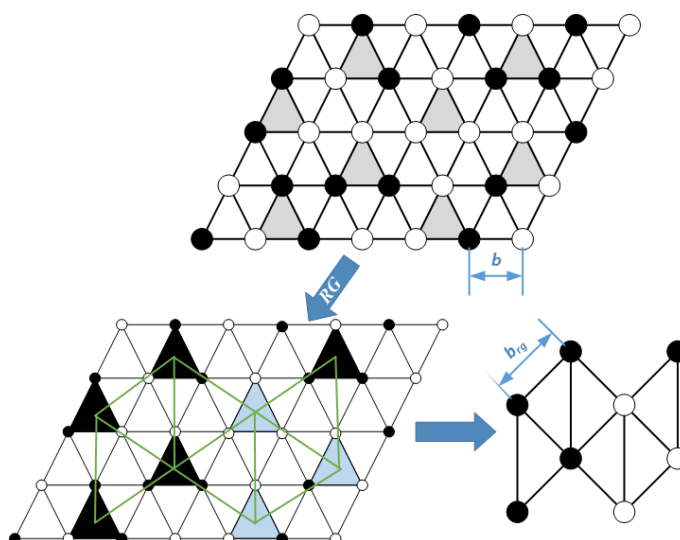


Рисунок 2.6 – Ренормалізація трикутної решітки

Замінивши кожен з груп чорним чи білим вузлом відповідно, отримуємо ренормовану решітку. Якщо розмір комірки (тобто відстань між вузлами первісної решітки) дорівнював b , то за результатами ренормалізації буде отримана решітка з розміром комірки $b_{rg} = b\sqrt{3}$.

Нехай концентрація чорних вузлів у первісній решітці дорівнює p . Тоді за формулою Бернуллі ймовірність того, що трикутна комірка матиме $k = 0, 1, 2, 3$ чорні вузли дорівнює

$$\Pr(k) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}, \quad (2.12)$$

де $C_3^k = \frac{3!}{k!(3-k)!}$ – число сполучень з 3 по k .

Отже, ймовірність того, що довільно обраний вузол у ренормованій решітці буде чорним становить

$$p_{rg}(p) = \Pr(2) + \Pr(3) = 3p^2(1-p) + p^3. \quad (2.13)$$

З (2.13) випливає, що концентрація чорних вузлів у новій решітці залежить від концентрації чорних у первісній. Подібне ренорм-групове перетворення можна виконувати багато (і навіть нескінчену кількість, якщо решітка нескінченна) разів.

При цьому масштабна інваріантність (самоподібність) решітки на порозі перколяції p_c означає, що це значення є нерухомою точкою перетворення (2.13):

$$p_{rg}(p_c) = p_c. \quad (2.14)$$

Інакше кажучи, якщо первісна мережа знаходиться на порозі протікання, то й ренормована також буде знаходитись на цьому ж порозі.

Отже, з (2.13), (2.14) випливає, що p_c має бути розв'язком рівняння

$$p_c = p_c^3 + 3p_c^2(1-p_c). \quad (2.15)$$

Рівняння (2.15) має три розв'язки: $p_c = 0$, $p_c = 1$, $p_c = 1/2$. Перші два з них описують вироджені випадки (повністю біла або повністю чорна решітка залишиться такою ж після ренорм-перетворення). А от третє рішення ($p_c = 1/2$) якраз і є шуканим порогом перколяції по вузлах

трикутної решітки.

Наступною задачею є пошуку критичного індексу (ν) кореляційної довжини (L) кластера. Кореляційна довжина – це середня відстань між вузлами одного кластера, усереднена за всіма кластерами. Згідно з (2.2) в околі точки $p = p_c$ ця кореляційна довжина дорівнює

$$L = L_0 \cdot |p - p_c|^{-\nu}. \quad (2.16)$$

Тоді після ренорм-перетворення решітки вона становитиме $L_{rg} = L_0 |p_{rg}(p) - p_c|^{-\nu}$. Але з іншого боку повинна виконуватись умова $L_{rg} = L/a$, де $a = b_{rg}/b = \sqrt{3}$ (бо масштаб решітки змінився в a разів). З цього випливає наступне співвідношення:

$$a |p_{rg} - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}. \quad (2.17)$$

З виразу (2.17) матимемо, що $\ln(a) - \nu \cdot \ln |p_{rg} - p_c| = -\nu \cdot \ln |p - p_c|$, звідки легко отримати, що

$$\nu = \frac{\ln a}{\ln \lambda}, \quad \text{де} \quad \lambda = \left| \frac{p_{rg}(p) - p_c}{p - p_c} \right|. \quad (2.18)$$

Як можна бачити, параметр λ у (2.18) залежить від концентрації провідних вузлів у первісній решітці (p), або (що теж саме) від її відхилення від p_c . Якщо спрямувати p до p_c , то зазначений параметр λ виявиться похідною від $p_{rg}(p)$ у точці $p = p_c$:

$$\lambda = \lim_{p \rightarrow p_c} \left| \frac{p_{rg}(p) - p_c}{p - p_c} \right| = \left| \frac{dp_{rg}}{dp} \right|_{p=p_c}. \quad (2.19)$$

Підставивши у (2.19) вираз (2.13) для $p_{rg}(p)$, будемо мати, що

$$\frac{dp_{rg}}{dp} = \frac{d}{dp}(-2p^3 + 3p^2) = -6p^2 + 6p. \quad (2.20)$$

Якщо концентрація p дорівнює критичній $p_c = 1/2$, то згідно з (2.19) та (2.20) $\lambda = 3/2$. Тоді (врахувавши, що $a = \sqrt{3}$), з виразу (2.18) можна отримати шукану оцінку критичного індексу ν :

$$\nu = \frac{\ln 3}{2 \cdot \ln(3/2)} \approx 1.355. \quad (2.21)$$

Згідно з таблицею 1.1, точне значення критичного індексу для двовимірних решіток дорівнює $\nu = 4/3 \approx 1.333$, отже можна зробити висновок, що метод ренорм-групового перетворення дозволяє оцінити цей параметр доволі точно.

На жаль, якщо критичні індекси є сталими для будь яких двовимірних решіток, то значення порогів перколяції (p_c) такими не є; вони залежать від виду задачі перколяції та від типу решіток. І не для кожної такої комбінації зазначений метод спрацює. Так, для найпоширенішої моделі (перколяція по вузлах прямокутньої решітки) значення $p_c \approx 0.5927$ неможливо знайти методом ренорм-групового перетворення; взагалі немає жодних теоретичних оцінок цього параметру, тільки експериментальні.

2.3 Чітка кластеризація вузлів, які перколюють

В той час, як усереднені характеристики процесу перколяції є відомими (2.1)–(2.6), індивідуальні властивості цього процесу (тобто на конкретній скінченій решітці, з конкретним розподілом зайнятих вузлів) можна встановити лише шляхом чисельного моделювання. Найбільш

зручним алгоритмом реалізації цієї задачі є алгоритм Хошена-Копельмана [9], який використовує двократний прохід вздовж всіх зайнятих вузлів. Алгоритм складається з чотирьох етапів.

На нульовому (підготовчому) етапі створюється двовимірний масив (матриця) `grid` розміром $(n + 1) \times (n + 1)$. Нульові рядок та стовпець є допоміжними та містять нулі. Інші $n \times n$ елементів містять стан відповідних вузлів: 0 – «білий», вільний, 1 – «чорний», зайнятий. У процесі маркування чорні вузли (комірки) отримують номери кластерів, починаючи з 2, проте деякі з номерів кластерів виявляються хибними, тому потрібен допоміжний динамічний масив (вектор) `num` «справжніх номерів» кластерів. Первісно він містить лише два елементи: `num[0]=0`, `num[1]=1`. Поточне значення лічильника знайдених кластерів дорівнює двом. Його максимальний розмір дорівнює $\lceil n^2/2 \rceil$, але зазвичай він суттєво менше. Індекс цього масиву відповідає номеру кластера, а значення елемента за індексом є «справжнім номером» кластера: якщо воно нульове, то номер кластера є справжнім. Якщо ж це значення ненульове, то індекс кластера є хибним номером.

Першим етапом є первинне маркування: послідовно скануються чорні (одиначні) комірки матриці. Для кожної аналізується стан сусідніх комірок:

- якщо всі сусідні комірки немарковані, тобто мають мітки 0 або 1 (або білі, або ще не проглянуті), то присвоюємо поточній клітині номер лічильника вектору «справжніх номерів» кластерів, лічильник інкрементуємо. Таким чином ця комірка стане першим представником нового кластеру;

- інакше (тобто хоча б одна з сусідніх комірок має номер кластера більше одиниці), то шукається найменший з номерів кластерів цих сусідів. Саме він й буде номером кластера поточної комірки. При цьому слід встановити це значення ще й в якості справжнього номеру кластерів, до яких відносяться інші марковані сусіди поточної комірки.

Другим етапом роботи алгоритму є оновлення масиву справжніх номерів. Переглядається масив справжніх номерів (*num*) з метою усунення ланцюгових посилань. Якщо поточний елемент цього масива є нульовим, то його індекс (*ind*) є справжнім номером відповідного кластеру, і тоді нічого робити з таким елементом не треба. Якщо ж елемент ненульовий, то його індекс не є справжнім номером кластера. Ним може бути поточне ненульове значення елементу. Але в той же час воно також може бути хибним номером. Для того щоб усунути цей ланцюг хибних посилань треба звертатись до масиву аж поки не отримаємо справжній номер (тобто поки значення масиву не стане нульовим). Для цього можна використати псевдокод, показаний на рисунку 2.7. Після виконання цієї процедури всі елементи масиву справжніх номерів будуть містити або ненульовий справжній номер кластеру, або нуль (і тоді справжнім номером є індекс).

```
i = ind;
while num[i]<>0
    i = num[i];
num[ind] = i;
```

Рисунок 2.7 – Псевдокод оновлення масиву справжніх номерів кластерів

Завершальним третім етапом роботи алгоритма є вторинне маркування вузлів решітки, тобто виправлення хибних номерів кластерів на справжні. Важливою особливістю цього етапу є можливість його значного пришвидшення за рахунок використання групових (масових) присвоєвань. В цьому випадку сканується не масив комірок, а масив справжніх номерів кластерів. Якщо номер кластера є хибним, то для всіх комірок решітки він замінюється на справжній за допомогою функції (методу) *find* та операції групового присвоєвання: *grid[find(grid==i)]=num[i]*; Такий підхід є набагато більш швидкодіючим, ніж традиційне «ручне» сканування масиву комірок звичайним чи подвійним циклом *for* з індивідуальною заміною

міток.

Зазначений алгоритм є дуже простим у програмній реалізації та має невисоку обчислювальну складність:

$$T(n) = O(m) = O(n^2), \quad (2.22)$$

де m – кількість зайнятих комірок решітки, яка, звісно, не перевищує кількості всіх вузлів ($m \leq n^2$).

В якості прикладу застосування алгоритму кластеризації вузлів, які перколюють, розглянемо квадратну решітку (grid) розміром 6×6 (рисунок 2.8) з штучно доданими фіктивними нульовими стовпцем та рядком. Чорні комірки є зайнятими («чорними») та мають початкову мітку 1. Білі вузли мають мітку 0.

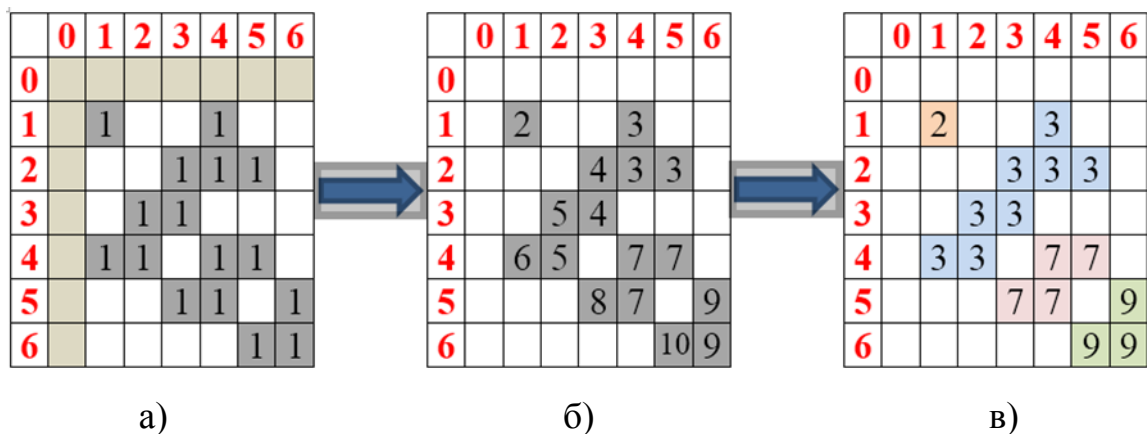


Рисунок 2.8 – Кластеризація перколюючих вузлів на квадратній решітці: розподіл перколюючих вузлів (а); результат первинного маркування (б); кінцевий результат кластеризації (в)

Решітка сканується починаючи з елемента `grid[1][1]`. Цей елемент одиничний (чорний), в нього немає кластеризованих сусідів, тому він отримує первинну мітку кластера 2. До масиву номерів справжніх кластерів додається елемент `num[2]=0`, лічильник кількості кластерів

інкрементується.

Комірки `grid[1][2]` та `grid[1][3]` білі (нульові), тому пропускаємо їх.

Комірка `grid[1][4]` чорна, ситуація аналогічна з `grid[1][1]` (маркованих сусідів немає, тому ця комірка маркується значенням 3, додається елемент `num[3]=0`, лічильник інкрементується). Комірка `grid[2][3]` обробляється аналогічно та започатковує кластер 4.

Комірка `grid[2][4]` чорна та при цьому обидві сусідні комірки (`grid[2][3]` ліворуч та `grid[1][4]` вище) вже марковані (4 та 3). В такому випадку цій комірці призначається найменший з номерів кластерів сусідів, тобто 3. При цьому слід також присвоїти це значення четвертому елементу масиву справжніх номерів (`num[4]=3`). Таке присвоєння означатиме, що кластери 3 та 4 мають спільний вузол (`grid[2][4]`), отже їх слід ототожнити, тому мітка 4 є хибною. Елементом, які раніше були помічені 4, необхідно буде потім присвоїти 3.

Комірка `grid[2][5]` чорна, але має лише одного сусіда (ліворуч), тому ця комірка переймає номер кластера (3) від цього сусіда.

Комірки `grid[2][6]` та `grid[3][1]` білі, пропускаються.

Комірка `grid[3][2]` обробляється аналогічно з `grid[1][1]` (започатковує кластер 5).

Комірка `grid[3][3]` має двох маркованих сусідів, отже обробляється аналогічно комірці `grid[2][4]`: отримує мітку 4, а значення `num[5]` оновлюється з 0 на 4.

Комірки `grid[3][4]`, `grid[3][5]`, `grid[3][6]` білі, пропускаються.

Комірка `grid[4][1]` започатковує новий кластер 6.

Комірка `grid[4][2]` має двох маркованих сусідів, отримує мітку 5 та присвоюється `num[6]=5`.

Комірка `grid[4][3]` біла.

Комірка `grid[4][4]` започатковує кластер 7.

Комірка `grid[4][5]` переймає мітку (7) у сусіда ліворуч.

Комірки `grid[4][6]`, `grid[5][1]`, `grid[5][2]` білі, отже пропускаються.

Комірка `grid[5][3]` починає новий кластер 8.

Комірка `grid[5][4]` отримує мітку сусіда вище, тобто 7. При цьому виявляється, що кластер 8 є хибним, тобто присвоюється `num[8]=7`.

Комірка `grid[5][5]` пропускається, бо біла.

Комірка `grid[5][6]` започатковує кластер 9.

Комірки `grid[6][1]`, `grid[6][2]`, `grid[6][3]`, `grid[6][4]` білі.

Комірка `grid[6][5]` започатковує кластер 10.

Комірка `grid[6][6]` отримує мітку (9) від сусіда вище, при цьому кластер 10 виявляється хибним, його справжній номер – 9 (`num[10]=9`).

Отже, після первинного маркування всі чорні вузли розподілені по кластерам (рисунк 2.8 (б)). Вони мають мітки від 2 до 10, проте деякі мітки є хибними. Вигляд масиву справжніх номерів (`num`) показаний на рисунку 2.9.

Індекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значення після первинного маркування	0	0	0	0	3	4	5	0	7	0	9
Значення після оновлення	0	0	0	0	3	3	3	0	7	0	9

Рисунок 2.9 – Масив справжніх номерів кластерів під час маркування

Можна бачити, що справжніми є тільки мітки 2, 3, 7, 9. При цьому масив справжніх номерів (`num`) містить інформацію не тільки щодо простих (однокрокових) посилань (4 на 3, 8 на 7, 10 на 9), а й щодо ланцюгових посилань. Наприклад, номер 6 є хибним, проте й номер `num[6]=5` також є хибним і `num[5]=4` теж. Всі зазначені кластери (6, 5, 4) виявились тотожними з кластером 3. Під час другого етапу всі кластери отримують справжні мітки.

Під час остаточного маркування всі хибні мітки замінюються на справжні у відповідності до оновлених значень масиву справжніх номерів кластерів. Остаточний результат показаний на рисунку 2.8 (в). Отже, в цьому прикладі було отримано один кластер з 8 вузлів, один з чотирьох,

один з трьох та один з поодинокого вузла. Можна зазначити, що фактична концентрація зайнятих вузлів становить $16/36 \approx 0.4444$, тобто суттєво менша, ніж критична $p_c \approx 0.5927$, тож немає ані гігантського кластеру, ані протікання «від стінки до стінки».

Наведений приклад демонструє, що наведений алгоритм кластеризації перколюючих вузлів є ефективним щодо використання комп'ютерної пам'яті, швидкодіючим, наочним та дуже простим у розумінні та тлумаченні результатів.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРКОЛЯЦІЇ ПО ВУЗЛАХ З НЕЧІТКОЮ МІРОЮ ПРИНАЛЕЖНОСТІ

3.1 Нечітка кластеризація вузлів, які перколюють

Класична теорія перколяції ґрунтується на чіткій (бінарній) логіці: вузол мережі, або комірка решітки, може знаходитись в одному з двох станів: або цей вузол перколює (протікає), або ні. При цьому відомою є ймовірність стану вузла. Втім, актуальним напрямом досліджень є застосування нечіткої логіки до досліджень перколяційних явищ. Згідно з теорією нечітких множин елемент (вузол, комірка) має дійснозначну (зазвичай, $0 \leq \mu \leq 1$) міру приналежності до множин перколюючих елементів. Тобто вузол може мати стан «протікає частково». Вказана невизначеність може бути пов'язана як з властивостями самого вузла, так і може відображати неповноту інформації щодо стану вузла, отже може мати ймовірнісну сутність. Математичний апарат нечіткої логіки був розроблений Лотфі Заде [6]. Наразі нечітка логіка є важливим інструментом штучного інтелекту [7] та широко використовується [8], [9] для опису та моделювання багатьох процесів та явищ. Слід зазначити [9], що нечіткі моделі є суттєво складнішими, ніж звичайні як у суто-теоретичному сенсі, так і з точки зору обчислювальної складності алгоритмів, які їх реалізують.

Вагомим недоліком класичної теорії перколяції є її чіткість, тобто стан вузлів («вільний» / «зайнятий» є бінарним, заздалегідь відомим параметром).

В той же час, у практичних застосуваннях стан комірок може бути невизначеним, або заздалегідь невідомим. В таких умовах для опису та моделювання перколяційних процесів пропонується застосувати математичний апарат нечіткої логіки (fuzzy logic, [6], [7]).

Основною ідеєю нечіткої логіки є відмова від бінарності характеристичних функцій приналежності елементів (x) множинам (A) на

користь дійснозначності цих функцій ($\mu_A(x)$). Тобто якщо у звичайній логіці $\mu_A(x) \in \{0; 1\}$, то у нечіткій $\mu_A(x) \in [0; 1]$. Таким чином, звичайні (чіткі) множини та відповідно чітка логіка можуть розглядатись як частковий випадок нечітких множин та нечіткої логіки. В той же час, проміжні значення функції приналежності дають змогу відобразити ступінь приналежності елемента множині, міру впевненості дослідника у цій приналежності, тобто відобразити такі відношення, як «скоріше за все належить», «можливо належить» тощо.

Отже, вхідними даними для моделювання перколяції є матриця $\mu_{black}(x)$ значень функції приналежності вузлів мережі множині «зайнятих» («чорних», провідних, перколюючих вузлів). Деякі вузли можуть мати чіткі значення $\mu_{black}(x)$ (нуль, чи одиниця), якщо стан вузлів достовірно відомий, а для інших значення $\mu_{black}(x)$ відображають міру поінформованості чи впевненості дослідника в тому, які саме властивості має поточний вузол.

Важливою особливістю задачі нечіткої кластеризації є те, що один й той самий об'єкт (в нашому випадку вузол решітки) може одночасно належати багатьом множинам (кластерам вузлів), але з різною ступінню приналежності. Таким чином, кожному вузлу слід співставляти не скалярний цілочисельний номер кластера, а масив $M = |\mu_k(x)|$ значень степенів приналежності цього вузла всім можливим кластерам $k = 1, \dots, K$. Кількість можливих кластерів K дорівнює кількості вузлів з $\mu_{black}(x) > 0$, тобто таких, які перколюють хоча б частково. З цього випливає, що під час первинного маркування слід розглядати лише два випадки: якщо поточний вузол x має $\mu_{black}(x) = 0$ (вироджений випадок достовірно непрозорого для протікання вузла), то він опускається, тобто для нього $\forall k: \mu_k(x) = 0$.

Другий (і основний) випадок відповідає $\mu_{black}(x) > 0$. Такий вузол, поперше, породжує власний одноосібний кластер з мірою приналежності $\mu_{black}(x)$. По-друге, він належатиме до тих кластерів, до яких належать його перколюючі сусіди. Для квадратної решітки сканування (первинне

Загалом, кількість можливих кластерів дорівнює кількості (L) вузлів з $\mu_{black}(x) > 0$, тобто сягає $O(n^2)$. Для скорочення обчислювальної складності пропонується встановити порогове значення (α) для функції приналежності зародку кластера, тобто вважати, що вузол може породити окремий кластер (можливо одноосібний, можливо й ні) лише за умови

$$\mu_{black}(x) > \alpha > 0. \quad (3.3)$$

В той час як для чіткої перколяції ототожнення кластерів є тривіальною задачею, яка реалізується через перегляд масиву справжніх номерів кластерів, то у випадку нечіткої приналежності комірок до перколюючого стану зазначений процес є складнішим. Перш за все, за результатами первинного маркування формується матриця схожості кластерів (c_{km}). Кластер k буде вважатись схожим з кластером m , якщо існує хоча б один вузол x з $\mu_k(x) = \mu_m(x) = 1$, або існує декілька вузлів з $\mu_k(x)$ та $\mu_m(x)$ близьких до одиниці. Кажучи більш точно, елементи матриці схожості кластерів обчислюються за формулою:

$$c_{km} = 1 - \prod_{\substack{x: \\ \mu_{black}(x) > 0}} (1 - \mu_k(x) \cdot \mu_m(x)). \quad (3.4)$$

Вигляд матриці схожості кластерів для решітки з прикладу (рисунок 3.1) показаний на рисунку 3.2.

Після формування матриці схожості кластерів можна перейти до етапу їх ототожнення. Для цього необхідно задати порогове значення схожості (β) та проаналізувати матрицю схожості. Якщо виявиться, що $c_{km} > \beta$, то нечіткі множини (тобто кластери) k та m можна об'єднати. Приналежність об'єкта (тобто вузла решітки x) об'єднанню множин обчислюється як максимум від приналежностей цього об'єкта складовим

множинам:

$$\mu_{K_i}(x) = \max(\mu_{k_1}(x), \mu_{k_2}(x), \dots, \mu_{k_n}(x)), \quad (3.5)$$

де $\mu_{k_1}(x), \mu_{k_2}(x), \dots, \mu_{k_n}(x)$ – міри приналежності x до тих елементарних кластерів $k_1, k_2, \dots, k_n$, які об'єднуються в кластер $K_i = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$ згідно з аналізом матриці схожості.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	1,00	0,04	0,03	0,02	0,07	0,03	0,01	0,06	0,03	0,03	0,03	0,01	0,03	0,01	0,02	0,02	0,00	0,01	0,01	0,01
3		0,04	0,03	0,02	0,07	0,03	0,01	0,06	0,03	0,03	0,03	0,01	0,03	0,01	0,02	0,02	0,00	0,01	0,01	0,01
4			0,94	0,13	0,88	0,93	0,65	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5				0,07	0,30	0,16	0,07	0,26	0,12	0,14	0,14	0,05	0,12	0,05	0,10	0,08	0,02	0,04	0,04	0,03
6					0,99	0,97	0,73	0,49	0,50	0,15	0,15	0,15	0,33	0,15	0,30	0,24	0,05	0,10	0,10	0,09
7						1,00	0,81	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8							0,81	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9								0,98	0,53	0,92	0,92	0,22	0,46	0,22	0,42	0,35	0,07	0,15	0,15	0,13
10									0,55	0,17	0,17	0,17	0,36	0,16	0,33	0,27	0,06	0,11	0,11	0,10
11										1,00	1,00	0,23	0,47	0,22	0,44	0,36	0,07	0,15	0,15	0,13
12											1,00	0,23	0,47	0,22	0,44	0,36	0,07	0,15	0,15	0,13
13												0,23	0,47	0,22	0,44	0,36	0,07	0,15	0,15	0,13
14													0,96	0,83	0,76	0,83	0,16	0,32	0,32	0,28
15														1,00	0,15	0,17	0,17	0,33	0,33	0,29
16															0,97	0,92	0,15	0,30	0,30	0,27
17																1,00	0,17	0,33	0,33	0,29
18																	0,17	0,33	0,33	0,29
19																		0,87	0,64	0,80
20																			0,87	0,80
21																				1,00

Рисунок 3.2 – Приклад матриці схожості кластерів

Результат об'єднання кластерів, тобто кількість сформованих кластерів, їх склад, приналежність вузлів до них, суттєвим чином залежать від обраного порогового значення схожості. На рисунку 3.3 показано три можливих розбиття вузлів решітки на перколяційні кластери.

	1	2	3	4	5	6
1	1,00	0,20		0,80		
2		0,10	0,90	1,00	0,90	
3		0,90	0,70			
4	1,00	1,00	0,20	0,80	1,00	
5			0,90	1,00	0,20	0,80
6					0,80	1,00
a)						

	1	2	3	4	5	6
1	1,00	0,20		0,80		
2		0,10	0,90	1,00	0,90	
3		0,90	0,70			
4	1,00	1,00	0,20	0,80	1,00	
5			0,90	1,00	0,20	0,80
6					0,80	1,00
б)						

	1	2	3	4	5	6
1	1,00	0,20		0,80		
2		0,10	0,90	1,00	0,90	
3		0,90	0,70			
4	1,00	1,00	0,20	0,80	1,00	
5			0,90	1,00	0,20	0,80
6					0,80	1,00
в)						

Рисунок 3.3 – Результати кластеризації (нечіткі кластери) для значень порогу схожості: $\beta = 0.7$ (а), $\beta = 0.5$ (б), $\beta = 0.4$ (в)

Як можна бачити з рисунку 3.3, різні значення порогу схожості призводять до розбиття вузлів на 5, 4 та 3 кластери. При цьому розбиття на чотири кластери (рисунок 3.3 (б)) є тотожним до чіткого розбиття з рисунком 2.8 (в).

3.2 Дослідження перколяції на безмасштабних мережах

Згідно з класичним підходом до задач перколяції, носієм є регулярні решітки, тобто такі, в яких конфігурація вузлів та зв'язків є сталою, строго детермінованою. Зазвичай розглядаються двовимірні та тривимірні решітки, інколи розглядаються решітки більшої розмірності. З точки зору теорії графів решіткові графи є найпростішими. Але у реальному світі переважна більшість соціальних, комп'ютерних, соціально-економічних, енергетичних, транспортних, біологічних, нейронних та інших мереж є складними.

Загалом, поняття «складна мережа» є нестрого формалізоване, нечітке, проте вважається, що складні мережі мають наступні властивості:

- великий розмір;
- динамічність у часі (зазвичай – зростання);
- випадковий характер зв'язків;

- неоднорідність вузлів;
- висока щільність зв'язків, яка зумовлює появу гігантського кластеру.

Також вважається, що значна кількість складних мереж є безмасштабними (масштабно-інваріантними, *scale-free networks*). Визначальною властивістю безмасштабних мереж є степеневий, або асимптотично степеневий розподіл вузлів за кількістю зв'язків:

$$\Pr(k) \approx C \cdot k^{-\gamma} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Співвідношення (3.6) означає, що ймовірність того, що вузол матиме степінь k (тобто k зв'язків, k сусідніх вузлів), пропорційна до $k^{-\gamma}$ і ця залежність тим точніша, чим більшим є k . Величина γ називається показником скейлінгу. Для більшості мереж реального світу вона знаходиться у межах $\gamma \in (2; 3]$, хоча існують і мережі з більшими значеннями скейлінгу. Приклад розподілу (3.6), показаний на рисунку 3.4.

Сутність поняття інваріантності до масштабу (безмасштабності) схожа з тією, що застосовувалась під час ренорм-групового перетворення трикутної решітки. Якщо укрупнити масштаб мережі, відкинувши вузли, які мають степінь меншу, ніж деяке k_0 , то розподіл степенів тих вузлів, які залишились, буде відповідати тому ж самому закону (3.6) з тим же самим показником скейлінгу γ (хоча звісно, з іншим значенням множника C).

Візуально ця властивість проявляється в тому, що у тому випадку, коли розподіл вузлів за степенями має форму (3.6), то без числових позначок на вісях графіку частотного розподілу неможливо встановити, чи відноситься він до первісної мережі, чи до прорідженої.

Найвідомішою з моделей масштабно-інваріантних мереж є модель Барабаші-Альберт, запропонована у 1999р. Альбертом-Ласло Барабаші та Рекою Альберт. Ця модель програмно реалізована у багатьох бібліотеках, зокрема у NetworkX є функція `barabasi_albert_graph`.

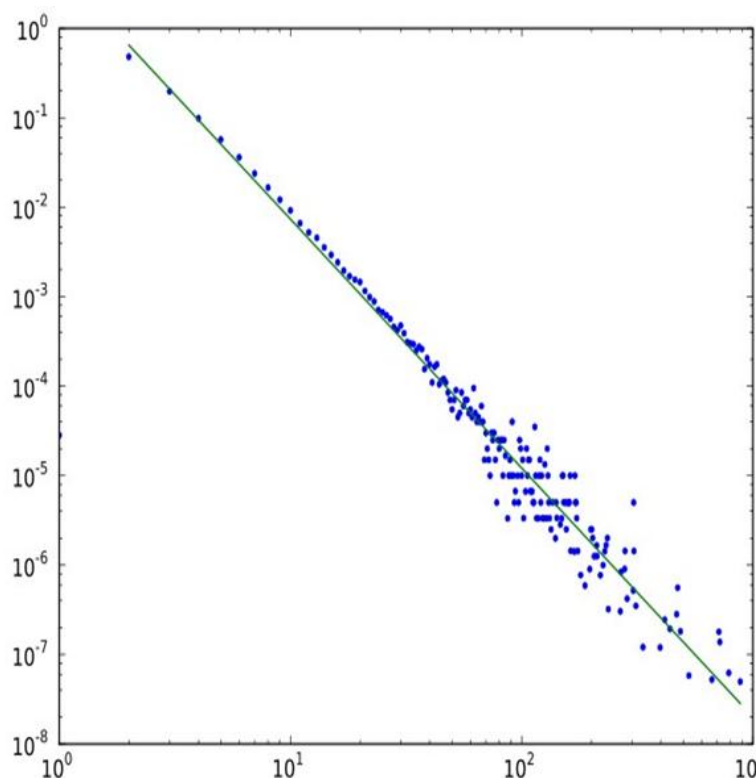


Рисунок 3.4 – Розподіл вузлів безмасштабної мережі за кількістю зв’язків

Мережа Барабаші-Альберт має один компонент зв’язності, тобто складається з одного кластера. Модель є генеративною, тобто моделює еволюцію мережі покроково. Зародком мережі є деяка невелика мережа з $m_0 \geq m$ вузлів. Часто таким зародком слугує повний граф K_{m_0} . Далі на кожному кроці до мережі додається один вузол, який з’єднується з m існуючими вузлами. Саме значення m є основним керуючим (вільним) параметром моделі. Доведено, що середня степінь вузла у мережі Барабаші-Альберт становить $2m$, хоча для найбагатшого вузла (з найбільшою ймовірністю ним є один з перших, «батьків-засновників» мережі) математичне очікування степеню становить $m_{max} \approx 2\sqrt{pn}$, де n – загальна кількість вузлів у мережі.

Частковим випадком мережі Барабаші-Альберт є дерево Барабаші-Альберт, якому відповідає значення $m = 1$.

Для того, щоб зруйнувати гігантський кластер безмасштабної мережі

треба зробити «білими» (тобто непровідними) дуже значну частку первісних вузлів або зв'язків. При цьому результат (особливо для задачі вузлів) буде суттєво залежати не тільки від цієї частки, а й від того, яким буде розподіл на чорні та білі серед найбагатших вузлів.

В кваліфікаційній роботі було поставлено та розв'язано задачу адаптації алгоритма Хошена-Копельмана до мережі Барабаші-Альберт.

Структура зв'язків мережі може бути подана або у вигляді матриці суміжності, або як список списків суміжних вузлів. Зазвичай застосовується другий спосіб, оскільки він є більш економним щодо пам'яті. Особливо для розріджених мереж, якими і є більшість безмасштабних мереж.

Вузли мережі слід попередньо відсортувати за спаданням їх степеню. В такому випадку під час первинного маркування достатньо послідовно проглядати список списків сусідніх вузлів, присвоюючи поточному вузлу найменший номер кластера серед вже маркованих вузлів у списку та розповсюджуючи цей номер на немаркованих сусідів поточного вузла. При цьому, як завжди, необхідно підтримувати та обробляти список справжніх номерів кластерів.

За результатами проведеного чисельного експерименту виявилось, що алгоритм Хошена-Копельмана оброблює безмасштабні мережі набагато швидше, ніж двовимірні квадратні решітки. Це зумовлено по-перше, наявністю вузлів з великим степенем (хабів), які оброблюються першими, а по-друге – невеликою кількістю самих кластерів.

3.3 Програмна реалізація моделі перколяції з нечіткою приналежністю вузлів решіток

В якості програмного середовища для імплементації алгоритмів, досліджених у кваліфікаційній роботі, було обрано MATLAB.

Пакет MATLAB (скорочення від MATrix LABoratory) був розроблений фірмою The MathWorks Inc. (США, м.Нейтик,

шт.Массачусетс) є інтерактивною системою для виконання інженерних та наукових розрахунків.

У MATLAB інтегрований потужний математичний апарат, що дозволяє розв'язувати велику номенклатуру задач з усіх галузей математики, комп'ютерних наук, наукових та інженерних обчислень. Крім того, це середовище має потужні засоби графічного подання інформації, засоби анімації, символьні обчислення та багато чого іншого.

Обчислювальна потужність MATLAB поєднується з простотою вивчення середовища та вбудованої мови програмування.

Програмна реалізація алгоритму Хошена-Копельмана для кластеризації перколюючих вузлів на регулярних решітках, представлена у додатку А. Було реалізовано три підзадачі: чітка кластеризація вузлів у задачі перколяції по вузлах решітки, нечітка кластеризація вузлів у задачі перколяції по вузлах квадратної решітки, та кластеризація вузлів у задачі перколяції по зв'язкам у безмасштабній мережі Барабаші-Альберт.

Найбільшу увагу було приділено кластеризації вузлів у задачі перколяції по вузлах квадратної решітки. Вибір такої решітки обґрунтовується наочністю візуалізації результатів.

Розглядалась решітка розміром 512×512 вузлів з початковою концентрацією умовно провідних вузлів $p = 0.4$ (рисунок 3.5). Приналежність провідних вузлів призначалась випадково від $\mu_{black} = 0.6$ до $\mu_{black} = 1.0$. Для умовно непровідних вузлів значення функції приналежності до провідних коливалось від $\mu_{black} = 0$ до $\mu_{black} = 0.3$.

Під час моделювання використовувалось порогове значення схожості кластерів $\beta = 0.7$.

На рисунку 3.5 вузли (пікселі) найбільшого за розміром кластеру показані синім кольором, другого за розміром – зеленим, третього – червоним, четвертого – малиновим кольором. Інші провідні пікселі залишились чорними, непровідним вузлам відповідає білий колір.

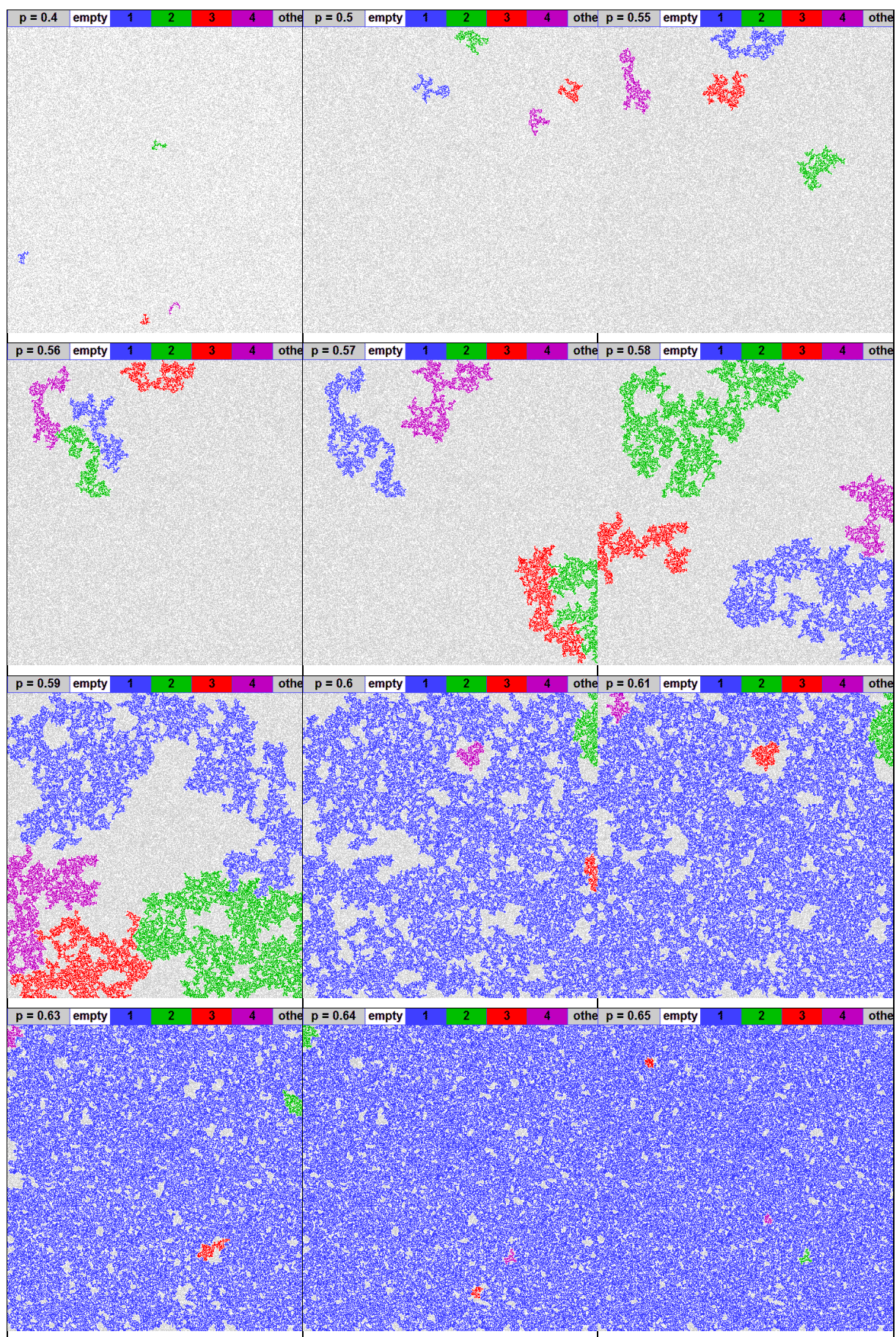


Рисунок 3.5 – Перколяція на квадратній решітці 512×512 (задача вузлів)

У процесі моделювання білі вузли поступово (та випадковим чином) «чорніли», тобто ставали провідними. Тобто значення p еволюціонувало: $p = \{0.4, 0.5, 0.55, 0.56, 0.57, 0.58, 0.59, 0.60, 0.61, 0.63, 0.64, 0.65\}$. Згідно з отриманими результатами моделювання (рис.3.5) між значеннями $p = 0.59$ та $p = 0.60$ відбувся фазовий перехід – виник гігантський кластер. Тобто синій кластер приєднав до себе більшу частину більш дрібних кластерів. В результаті решітка в цілому стала провідною (прозорою, перколюючою) від будь якої грані (сторони) до протилежної. Це повністю відповідає теорії перколяції, за якою критичне значення дорівнює $p_c \approx 0.5927$. Під час подальшого зростання концентрації провідних вузлів (тобто у закритичній області) гігантський кластер продовжує поглинати всі дрібні так, що тільки він й зростає, а розмір другого (та подальших за розміром) кластерів спадає.

Працездатність реалізації алгоритма Хошена-Копельмана для кластеризації вузлів була також перевірена для задачі вузлів на безмасштабній мережі Барабаші-Альберт.

ВИСНОВКИ

Розглянуто проблему моделювання явища перколяції, тобто протікання, між вузлами прямокутної решітки на основі моделі з нечіткою логікою. Зазначена проблема є частковим випадком більш загальної проблеми 3D-перколяції, перколяції у нерегулярних мережевих структурах, в тому числі у безмасштабних, асортативних чи дизасортативних мережах.

Обрана тема є актуальною для комп'ютерних наук, оскільки теорія перколяції стосується не тільки фізичних та хімічних явищ, а й процесів поширення та розповсюдження інформації, комп'ютерних (та біологічних) вірусів. З іншого боку, нечітка логіка є одним з інструментів штучного інтелекту.

Згідно з класичним підходом дослідження перколяційних процесів ґрунтується на бінарній логіці з чіткими станами вузлів: перколює, або не перколює. Втім, для багатьох практичних застосувань більш характерним є нечіткий опис стану вузлів решіток. Застосування нечіткої логіки забезпечує набагато більшу гнучкість моделей, проте створення та використання таких моделей є значно складнішою.

В роботі розглядалась задача моделювання процесу утворення перколяційних кластерів на прямокутній решітці в умовах нечіткості стану вузлів. Був запропонований алгоритм нечіткої кластеризації перколюючих вузлів решітки. Здійснено програмну реалізацію запропонованого алгоритму, проведено чисельний експеримент, який підтвердив його працездатність та коректність розбиття перколюючих вузлів на нечіткі кластери. Визначено, що складність розробленого алгоритму (як часова, так і меморійна) є доволі великою, що обмежує його практичне застосування. Отже, необхідні подальші дослідження щодо вдосконалення запропонованого алгоритму нечіткої кластеризації перколюючих вузлів.

Основні положення та результати кваліфікаційної роботи опубліковано в журналі категорії Б [12].

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Broadbent S. R., Hammersley J. M. Percolation processes. *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society*. 1957. Vol. 53, no. 3. P. 629–641. URL: <https://doi.org/10.1017/s0305004100032680> (date of access: 27.04.2026).
2. Vankrevelen D. Development of coal research – a review☆. *Fuel*. 1982. Vol. 61, no. 9. P. 786–790. URL: [https://doi.org/10.1016/0016-2361\(82\)90304-0](https://doi.org/10.1016/0016-2361(82)90304-0) (date of access: 27.04.2026).
3. Cardoso M., Cardoso N., Bicudo P. Lattice QCD computation of the color fields for the static hybrid quark-gluon-antiquark system, and microscopic study of the Casimir scaling. *Physical review D*. 2010. Vol. 81, no. 3. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevd.81.034504> (date of access: 27.04.2026).
4. Brunk N. E., Twarock R. Percolation theory reveals biophysical properties of virus-like particles. *ACS Nano*. 2021. Vol. 15, no. 8. P. 12988–12995. URL: <https://doi.org/10.1021/acsnano.1c01882> (date of access: 27.04.2026).
5. The abundance threshold for plague as a critical percolation phenomenon / S. Davis et al. *Nature*. 2008. Vol. 454, no. 7204. P. 634–637. URL: <https://doi.org/10.1038/nature07053> (date of access: 27.04.2026).
6. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and control*. 1965. Vol. 8, no. 3. P. 338–353. URL: [https://doi.org/10.1016/s0019-9958\(65\)90241-x](https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x) (date of access: 27.04.2026).
7. Vlachos I. K., Sergiadis G. D. Intuitionistic fuzzy information – Applications to pattern recognition. *Pattern recognition letters*. 2007. Vol. 28, no. 2. P. 197–206. URL: <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2006.07.004> (date of access: 27.04.2026).
8. Detection of infected wounds in abdominal surgery images using fuzzy logic and fuzzy sets / M. Gonzalez-Hidalgo et al. *2019 international conference on wireless and mobile computing, networking and communications (wimob)*,

Barcelona, Spain, 21–23 October 2019. 2019.

URL: <https://doi.org/10.1109/wimob.2019.8923289> (date of access: 27.04.2026).

9. Bollobás B., Riordan O. Sharp thresholds and percolation in the plane. *Random structures and algorithms*. 2006. Vol. 29, no. 4. P. 524–548.

URL: <https://doi.org/10.1002/rsa.20134> (date of access: 27.04.2026).

10. Parshani R., Buldyrev S. V., Havlin S. Critical effect of dependency groups on the function of networks. *Proceedings of the national academy of sciences*. 2010. Vol. 108, no. 3. P. 1007–1010.

URL: <https://doi.org/10.1073/pnas.1008404108> (date of access: 27.04.2026).

11. Герасімчук М.Д., Лазарєв Ю.Ф., Толочко Т.О. Моделювання систем у середовищі MATLAB-SIMULINK. Київ : НТУУ «КПІ», 2006. 175 с.

12. Янченко П.С., Мірошніченко Т.О., Шергін В.Л. *Моделювання перколяції на основі моделі з нечіткою логікою*. Наука і техніка сьогодні. 2026. №4(58), с. 4880-4893. URL: [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2026-4\(58\)-4880-4893](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2026-4(58)-4880-4893) (date of access: 06.05.2026)