УДК 621.396.677.8

Ф. Ю. ДРАНИЩЕВ, Л. А. ПОСПЕЛОВ, д-р. техн. наук

ПСЕВДОСТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЧ-ГИПЕРТЕРМИИ

1. Известно [1], что применительно к ВЧ гипертермии выполняются следующие условия:

$$l, a\delta \leq \lambda, \tag{1}$$

где l – глубина залегания опухоли в теле пациента, a – апертура излучающего электрода, δ – глубина скин-слоя ВЧ поля в теле пациента, λ – длина волны ВЧ поля в органах тела пациента. Это условие совпадает с условием применимости известного квазистатического приближения, когда пространственное распределение поля задаётся уравнением Лапласа. Однако применительно к ВЧ гипертермии последнее приближение обладает существенным недостатком. Оно не учитывает диссипацию электромагнитного поля в теле пациента, а диссипация обеспечивает весь лечебный эффект в гипертермической онкологии.

Поэтому в волновом уравнении, записанном в виде

$$\Delta\bar{E} + \left(\varepsilon' + i\varepsilon''\right)\frac{\omega^2}{c^2}\cdot\bar{E} = 0 \tag{2}$$

и описывающем пространственное распределение напряженности $\bar{E}$ гармонического ($\bar{E} \sim e^{-i\omega t}$) электромагнитного поля, сохраним и действительную ε' и мнимую ε'' части диэлектрической проницаемости ($\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$) и преобразуем его с использованием условий (1). Поскольку решение уравнения (2) в общем случае комплексно, то есть

$$\bar{E} = \bar{E}' + i\bar{E}'', \tag{3}$$

то можно найти уравнения отдельно для величин $\bar{E}'$ и $\bar{E}''$. Они имеют следующий вид:

$$\left(\bar{\Delta} + \varepsilon'\right)^2 \bar{E}' = \varepsilon''^2 \bar{E}'; \tag{4}$$

$$\bar{E}'' = -\frac{1}{\varepsilon''}\left(\bar{\Delta} + \varepsilon'\right)\bar{E}', \tag{5}$$

где введено обозначение: $\bar{\Delta} \equiv \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \Delta$. Оценки показывают, что первое слагаемое в уравнении (4) существенно больше второго, что соответствует условию (1). Это позволяет пренебречь величиной ε' в скобках уравнений (4) и (5). Это означает, что в приближении (1) уравнение (2) можно записать в виде

$$\bar{\Delta}\bar{E} + i\varepsilon''\bar{E} = 0, \tag{6}$$

а уравнение (4) и соотношение (5) приобретут вид

$$\bar{\Delta}^2\bar{E}' = \varepsilon''^2\bar{E}'; \tag{7}$$

$$\bar{E}'' = -\frac{1}{\varepsilon''}\bar{\Delta}\bar{E}'. \tag{8}$$

2. Соотношения (7) и (8) составляют исходные уравнения в псевдостатическом приближении. В векторном виде уравнения псевдостатического приближения оказываются удобными для решения задач электродинамики, когда граничные условия заданы для напряженности поля. Это относится к задачам исследования излучения электромагнитных волн антеннами различного типа.

Если рассматривается задача возбуждения электромагнитного излучения однородно заряженным электродом, когда задан потенциал на идеально проводящем электроде, тогда удобнее использовать уравнение, в котором искомым является не напряженность электрического поля, а его потенциал. Это уравнение можно получить следующим образом.

Пренебрежение слагаемыми, содержащими ε' в уравнениях (2) и (4), физически означает, как и в известном квазистатическом приближении, пренебрежение фазовыми эффектами при анализе распространения электромагнитных волн. Из этого следует утверждение, что в выражении для поля через его потенциалы (скалярный φ и векторный $\bar{A}$):

$$\bar{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \tag{9}$$

вторым слагаемым необходимо пренебречь, поскольку оно существенно меньше первого. Следовательно, в псевдостатическом приближении справедливо соотношение

$$\bar{E} = -\nabla\varphi, \tag{10}$$

как и в квазистатическом приближении. И исходные уравнения псевдостатического приближения можно записать в другой форме:

$$\bar{\Delta}\varphi + i\varepsilon''\varphi = 0. \tag{11}$$

Для действительной и мнимой составляющей потенциала

$$\varphi = \varphi' + i\varphi'', \tag{12}$$

будут справедливы соотношения

$$\bar{\Delta}^2\varphi' = \varepsilon''^2\varphi'; \tag{13}$$

$$\varphi'' = -\frac{1}{\varepsilon''}\bar{\Delta}\varphi', \tag{14}$$

которые являются скалярной разновидностью основного уравнения псевдостатического приближения.

3. Первый случай можно проиллюстрировать на примере задачи возбуждения в диссипативной среде электромагнитного поля высокочастотным зазором микрополосковой антенны [2], содержащей открытый плоский прямоугольный резонатор площадью $a \times 2a$, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_0. Пусть в центре зазора шириной h приложено высокочастотное напряжение величиной V_0. Считаем, что зазор занимает часть плоскости, определяемой следующими условиями:

$$|z| \le a,\ |x| \le h/2,\ h << a, \tag{15}$$

а поле возбуждается в объеме $y >> 0$, заполненном диссипативной средой с диэлектрической проницаемостью, соответствующей условиям (1).

Граничное условие для напряженности электрического поля при значении координаты $y = 0$ приближенно можно записать в виде

$$E_x\Big|_{y=0} = \left(V_0/h\right)\cos k_0 z, \tag{16}$$

где

$$k_0 \cong \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}. \tag{17}$$

В цилиндрических координатах: $z, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \psi = \operatorname{arctg} x/y$, в силу симметрии задачи, напряженность электрического поля для области $\rho \ge 0$ будет иметь только одну азимутальную составляющую:

$$E_\psi = E(z,\rho), \tag{18}$$

не зависящую от угла ψ.

При этом уравнение (7) приобретает вид

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 E'_\psi = \varepsilon''^2 E'_\psi, \tag{19}$$

где

$$\Xi \equiv z\frac{\omega}{c}. \quad (20)$$

Граничным условием для поля E_ψ будет соотношение (16), переписанное в виде

$$E_\psi\Big|_{\rho=\frac{h}{2}} = \frac{V_o}{h}\cos k_o z. \quad (21)$$

Можно показать, что решением этой задачи будет функция

$$E_\psi(z,\rho) = E_0\frac{K_0(\kappa\rho)}{K_0(\kappa\frac{h}{2})}\cos k_0 z, \quad (22)$$

где использованы обозначения

$$E_0 \equiv V_0/h; \quad (23)$$

$$\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon_o + \varepsilon''}. \quad (24)$$

$K_0(\kappa\rho)$ – функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка чисто мнимого аргумента. Если считать критерием скорости спада электрического поля расстояние ρ_0, на котором амплитуда напряженности поля уменьшается в e раз, тогда получим

$$\rho_0 = \frac{c}{\omega}\frac{\alpha_o}{\sqrt{\varepsilon_o + \varepsilon''}}, \quad (25)$$

где α_o определяется из уравнения

$$\frac{K_o(\alpha_o)}{K_o(\kappa\frac{h}{2})} = \frac{1}{e}. \quad (26)$$

С учётом того, что из условия резонанса в резонаторе

$$k_o a = \frac{\pi}{2}, \quad (27)$$

соотношение (25) можно переписать в виде

$$\rho_o = 2\frac{\alpha_o}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_o}}}a. \quad (28)$$

Отсюда следует, что при условии $\varepsilon_0 >> \varepsilon''$

$$\rho_{o\max} = 2\frac{\alpha_o}{\pi}a, \quad (29)$$

эта величина не зависит от свойств среды и является параметром, характеризующим только апертурное рассеяние его. В обратном случае, когда $\varepsilon_0 << \varepsilon''$, величина ρ_0 определяет глубину скин-слоя:

$$\rho_0 = 2\frac{\alpha}{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon_o}}{\sqrt{\varepsilon''}}a. \quad (30)$$

4. В качестве второго применения основного уравнения псевдостатического приближения можно рассмотреть задачу отыскания электромагнитного поля, возбуждаемого заряжаемым электродом, имеющем форму эллипсоида вращения. Пусть радиус эллипсоида равен a. Считаем, что на поверхность идеально проводящего эллипсоида приложен потенциал $V = V_0 e^{-i\omega t}$ от внешнего источника напряжения. Перейдем от декартовых координат (x, y, z) к эллипсоидальным координатам (σ, ζ, ξ) [3].

Причем соотношение $\sigma(x,y,z)=\text{const}$ определяет систему расширяющихся эллипсов, а уравнение

$$\sigma(x,y,z)=0 \tag{31}$$

– поверхность электрода, $\zeta(x,y,z)=\text{const}$ и $\xi(x,y,z)=\text{const}$ задают поверхности взаимно ортогональных и ортогональных поверхностям эллипсоидов параболических и гиперболических конусов. Учитывая аксиальную симметрию электрода, можно провести разделение переменных в исходном уравнении (11) и получить уравнение

$$\Delta_\sigma^2\varphi'=\varepsilon''\varphi' \tag{32}$$

а также соотношение

$$\varphi''=-\frac{1}{\varepsilon''}\Delta_\sigma\varphi', \tag{33}$$

в котором использовано обозначение

$$\Delta_\sigma\equiv\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\left(\sigma^2\pm1\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\langle\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\left(\sigma^2\pm1\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right]\right\rangle\right\}\varphi. \tag{34}$$

Знаки $\pm$ относятся соответственно к сплюснутому и вытянутому вдоль аксиальной оси симметрии эллипсоиду вращения.

При $\sigma\to0$ псевдостатическое распределение потенциала переходит в решение φ_0 квазистатической задачи [4]:

$$\Delta\varphi_0=0. \tag{35}$$

Используя это, можно найти граничные условия для функции φ. В обозначениях

$$\begin{cases}\psi\equiv\varphi/V_0\\ \mu\equiv\sigma/a^2\\ \alpha\equiv c/a\end{cases} \tag{36}$$

они имеют вид

$$\begin{cases}\psi\big|_{\psi=0}=1\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0}=-\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}\Big|_{\mu=0}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^5}}\\ \dfrac{\partial^3\psi}{\partial\mu^3}\Big|_{\mu=0}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{\alpha^3}\left(3+4\sqrt{\alpha}\right)-2\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^3}{\sqrt{\alpha^7}}\end{cases}. \tag{37}$$

Уравнение (32) при граничных условиях (37) было решено численно для фиксированного набора значений параметра α и δ. Из анализа полученных результатов можно заключить, что с ростом потерь эквипотенциали электрического поля приближаются к эллипсоидальному электроду, а при уменьшении потерь их зависимости стремятся к известным зависимостям, полученным для квазистатического приближения [4].

5. Проведенный анализ ведет к комплекстным значениям распределений (в пространстве) потенциала $\varphi(\vec r)$, где $\vec r$ – радиус-вектор точки наблюдения с началом в одной из точек на поверхности электрода. Поэтому с учетом гармонической временной зависимости поля получим

$$\varphi(\vec r,t)=\varphi'(\vec r)e^{-i\omega t}+i\varphi''(\vec r)e^{i\omega t}. \tag{38}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\varphi(\vec{r},t)=|\varphi|\cos\left(\chi(\vec{r})-\omega t\right), \tag{39}$$

где

$$|\varphi|=\sqrt{\varphi'^2+\varphi''^2}; \tag{40}$$

$$\chi=\operatorname{arctg}\frac{\varphi''}{\varphi'}. \tag{41}$$

Из анализа этого соотношения можно сделать вывод о том, что влияние диссипации приводит не только к быстрому убыванию поля при удалении точек наблюдения от положения источника его возбуждения, но и к быстрому изменению его фазы в пространстве, что определяется поведением функции $\chi(\vec{r})$.

Список литературы: 1. *Гай А., Леман Ю., Стоунбридж Дж.* Применение электромагнитной энергии в терапии // ТИИР. 1974. Т. 62, №1. 2. *I. J. Bahl and P. Bhartia.* Microstrip Antenna. Dedham, MA: Artech Hause, 1980. 3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука. 1970. 4. *Ландау Л., Лифшиц М.* Электродинамика сплошных сред. ГИХ ФМ. М., 1959. (§ 4. Проводящий эллипсоид.)

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 01.02.2007