УДК 510.62

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

НЕПОЛНЫЕ И ПОЛНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть M—n-мерное *логическое пространство* [1] над полем G и $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — его базис. Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ называются базисными. Любой вектор $x \in M$ может быть представлен в виде комбинации базисных векторов

$$x = \xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee ... \vee \xi_n e_n, \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — коэффициенты комбинации, называемые *координатами* вектора x. Представление вектора x в виде комбинации (1) базисных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$, будем называть его *разложением* по базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. При заданном базисе каждый вектор логического пространства однозначно определяется его координатами. Можно ли утверждать обратное, т. е. что при заданном базисе любому вектору x из M соответствует единственный набор координат ($\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$)? Иными словами, будет ли для каждого вектора разложение по базису единственным? В логической алгебре, в отличие от линейной, такое утверждение, вообще говоря, неверно. Следующий контрпример доказывает это.

Пусть A_1 — логическая алгебра, заданная на множестве векторов $M_1=\{a, b, c\}$ над полем скаляров $G_1=\{0, 1\}$. Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания скаляров совпадают с одноименными операциями алгебры логики. Операция дизъюнкции $x \vee y$ векторов x и y задана табл. 1. Роль нуля играет вектор a, поскольку $a \vee x=x$ для любого $x \in M_1$. Роль единицы выполняет вектор c, поскольку $c \vee x=c$ для любого $x \in M_1$. Таким образом, $a=0$, $c=1$. Операция умножения скаляра на вектор в алгебре A_1 определяется законами нуля $0 \cdot x=0$ и единицы $1 \cdot x=x$, где x — произвольный вектор из M_1 (табл. 2). Непосредственной проверкой убеждаемся, что при таком определении логической алгебры A_1 все аксиомы логического пространства выполняются. Итак, множество M_1 — это логическое пространство.

Таблица 1

$y \backslash x$	a	b	
a	a	b	c
b	b	b	c
	c	c	c

$x \vee y$

Таблица 2

$\lambda \backslash$	a	b	c
0	a	a	a
1	a	b	c

λx

В пространстве M_1 имеется единственный базис $\{b, c\}$. Действительно, векторы b и c друг от друга не зависят: $0 \cdot b=a$, $1 \cdot b=b$, $0 \cdot c=a$, $1 \cdot c=c$. Кроме того, все векторы пространства M_1 являются комбинациями векторов b и c: $0 \cdot b \vee 0 \cdot c=a$, $1 \cdot b \vee 0 \cdot c=b$, $0 \cdot b \vee 1 \cdot c=c$. Ясно, что других порождающих совокупностей, кроме $\{b, c\}$, в пространстве M_1 нет. Тем не менее в пространстве M_1 не любому вектору соответствует единственный набор координат, поскольку вектор c можно выразить еще и другой комбинацией базисных векторов, а именно $1 \cdot b \vee 1 \cdot c=b \vee c=c$.

Любое логическое пространство с заданным базисом, в котором нет единственности представления каждого его вектора набором координат, назовем *неполным*. Только что мы убедились, что неполные логические пространства существуют. Если же единственность представления имеется, то такое логическое пространство будем называть *полным*.

---

* *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О логической алгебре. К., 1990. 12 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 16.

Полные логические пространства существуют. Примером такого пространства может служить пространство M_0 алгебры A_0^* [1]. Оно состоит всего из четырех векторов a, b, c, d, каждому из которых соответствует единственный набор координат (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1,1). В полном пространстве базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ характеризуются наборами координат (1, 0, 0, ..., 0, 0), (0, 1, 0, ..., 0, 0), ..., (0, 0, 0, ..., 0, 1). На примере алгебры A_1 мы только что видели, что в неполном пространстве базисному вектору может соответствовать более одного набора координат. А именно, базисному вектору c неполного пространства M_1 соответствует два набора координат (0, 1) и (1, 1).

Пусть M — логическое пространство над полем G и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — его базис, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — набор координат, соответствующий вектору x, $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — набор координат, соответствующий вектору y. Тогда набор координат $(\xi_1 \vee \eta_1, \xi_2 \vee \vee \eta_2, \ldots, \xi_n \vee \eta_n)$ будет соответствовать вектору $x \vee y$. В самом деле, если $x = \xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee \ldots \vee \xi_n e_n$ и $y = \pi_1 e_1 \vee \eta_2 e_2 \vee \ldots \vee \eta_n e_n$, то $x \vee y = (\xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee \ldots \vee \xi_n e_n) \vee (\eta_1 e_1 \vee \eta_2 e_2 \vee \ldots \vee \eta_n e_n) = (\xi_1 \vee \eta_1) e_1 \vee \vee (\xi_2 \vee \eta_2) e_2 \vee \ldots \vee (\xi_n \vee \eta_n) e_n$. Набор координат $(\xi_1 \vee \eta_1, \xi_2 \vee \eta_2, \ldots \ldots, \xi_n \vee \eta_n)$ будем называть *суммой наборов координат* $(\xi_1, \xi^2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Таким образом, сумме векторов соответствует сумма их наборов координат.

Пусть λ — скаляр из поля G. Если набор координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ соответствует вектору x, то набор координат $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$ будет соответствовать вектору λx. В самом деле, если $x = \xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee \ldots \vee \xi_n e_n$, то $\lambda x = \lambda (\xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee \ldots \vee \xi_n e_n) = \lambda (\xi_1 e_1) \vee \lambda (\xi_2 e_2) \vee \ldots \vee \lambda (\xi_n e_n) = (\lambda\xi_1) e_1 \vee (\lambda\xi_2) e_2 \vee \ldots \vee (\lambda\xi_n) e_n$. Набор координат $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$ будем называть *произведением скаляра* λ *на набор координат* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Таким образом, произведению скаляра на вектор соответствует произведение этого скаляра на набор координат вектора. Только что описанные закономерности в равной мере справедливы как для полного, так и для неполного пространства. Различие состоит в том, что в случае полного пространства каждому вектору соответствует единственный набор координат, если же пространство неполно, то некоторым из его векторов будет соответствовать целое множество наборов координат, в котором содержится более одного набора.

Нам представляется, что неполное логическое пространство всегда можно расширить до полного, наполняя его некоторыми новыми векторами. Доказательство (или опровержение) этого утверждения, а также разработку способов расширения неполного пространства до полного предоставляем читателям. Ниже излагаются предварительные соображения об одном способе такого доопределения. Пусть M — неполное пространство над полем G с заданным в нем базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, M' — соответствующее ему искомое полное пространство над полем G, получаемое из пространства M посредством его доопределения. Пространство M' строим следующим образом. Каждый элемент a, принадлежащий множеству M, включаем также и в множество M', так что $M \subseteq M'$. Обозначим через I_a множество всех наборов координат, соответствующих вектору a, принадлежащему пространству M. Выбираем в каждом из множества I_a ($a \in M$) некоторый набор координат (какой именно набор координат надо взять — в этом и состоит проблема) и ставим его в соответствие вектору a, принадлежащему множеству M'.

Из всех наборов координат, уже сопоставленных с векторами множества M', образуем множество I_1. Из всех n-местных наборов скаляров поля G образуем множество I всевозможных наборов координат. Образуем множество I/I_1 всех наборов координат, еще не сопоставленных с векторами множества M'. Каждому набору координат из этого множества ставим в соответствие свой вектор, отличный от всех векторов пространства M. Все введенные таким способом векторы включаем в множество M'. Никаких других векторов, кроме упомянутых выше, в множество M' не включаем. В роли базисных векторов множества M' принимаем векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, которым соответствуют наборы координат $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 1)$. В роли нулевого вектора множества M' принимаем вектор $0'$, которому соответствует набор координат $(0, 0, \ldots, 0)$, в роли единичного — вектор $1'$, которому соответствует набор координат $(1, 1, \ldots, 1)$.

Операцию сложения векторов на множестве M' определяем следующим правилом: если вектору x' соответствует набор координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а вектору y' — набор координат $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, то в роли вектора $x' \vee y'$ берем тот, которому соответствует набор координат $(\xi_1 \vee \eta_1, \xi_2 \vee \eta_2, \ldots, \xi_n \vee \eta_n)$. Иными словами, если

$$x' = \xi_1 e'_1 \vee \xi_2 e'_2 \vee \ldots \vee \xi_n e'_n \text{ и } y' = \eta_1 e'_1 \vee \eta_2 e'_2 \vee \ldots \vee \eta_n e'_n, \text{ то } x' \vee y' =$$
$$= (\xi_1 \vee \eta_1)\, e'_1 \vee (\xi_2 \vee \eta_2)\, e'_2 \vee \ldots \vee (\xi_n \vee \eta_n)\, e'_n.$$

Операцию умножения скаляра на вектор для пространства M' определяем следующим правилом: если вектору x' соответствует набор координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, то в роли вектора $\lambda x'$ берем тот, которому соответствует набор координат $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n)$. Иными словами, если $x' = \xi_1 e'_1 \vee \xi_2 e'_2 \vee \ldots \vee \xi_n e'_n$,

$$\text{то } \lambda x' = \lambda\xi_1 e'_1 \vee \lambda\xi_2 e'_2 \vee \ldots \vee \lambda\xi_n e'_n.$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы логического пространства для так введенных на множестве M' операций $x' \vee y'$ и $\lambda x'$ выполняются. Следовательно, множество M' есть логическое пространство. Пространство M' — полное, поскольку каждому из его векторов соответствует единственный набор координат. Будет ли только что построенное пространство M' расширением пространства M? Это пока неизвестно. Ответ на поставленный вопрос будет положительным, если, сузив пространство M' до множества M и сохранив в M операции сложения векторов и умножения скаляра на вектор, введенные в M', мы получим логическое пространство, совпадающее с исходным пространством M над полем G. Если же получим нечто иное, то ответ будет отрицательным. Предстоит выяснить, какие наборы координат следует присваивать элементам множества M при включении их в множество M', чтобы цель — расширение неполного пространства M до полного M' — достигалась. Предстоит также доказать, что такое присвоение всегда возможно.

В качестве примера попытаемся описанным методом расширить до полного неполное пространство $M_1=\{a, b, c\}$ рассмотренной выше алгебры A_1, заданное над полем $G_1=\{0, 1\}$. Базисными в пространстве M_1 являются векторы $e_1=b$ и $e_2=c$. В роли нулевого вектора выступает вектор $0=a$, в роли единичного — вектор $1=c$. Все элементы a, b, c пространства M_1 включаем также и в пространство M_1'. Вектору a соответствует множество наборов координат $I_a=\{(0, 0)\}$, вектору b — множество $I_в=\{(1, 0)\}$, вектору c — множество $I_c=\{(0, 1), (1, 1)\}$. Вектору a пространства M_1' ставим в соответствие единственно возможный набор координат $(0, 0)$, вектору b — также единственно возможный набор координат $(1, 0)$.

Вектору c ставим в соответствие набор координат $(0, 1)$, в последнем случае выбор набора не единственно возможный, можно было бы вместо набора координат $(1, 0)$ взять набор $(1, 1)$, тогда пространство M_1' получилось бы иным. Формируем множества $I_1=\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, $I=\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, $I\diagdown I_1= =\{(1, 1)\}$. Набору координат $(1, 1)$ ставим в соответствие вектор d, который включаем в множество M_1'. Образуем множество $M_1'=\{a, b, c, d\}$. Базисными в пространстве M_1' будут векторы $e_1'=b$ и e_2' c, поскольку им соответствуют наборы координат $(1, 0)$ и $(0,1)$. Нулем пространства M_1^1 будет вектор $0'=a$, поскольку ему соответствует набор координат $(0, 0)$. Единицей пространства M_1' будет вектор $1'=\mathbf{d}$, поскольку ему соответствует набор координат $(1,1)$.

Определяем операцию сложения векторов пространства M_1' $b\vee c=(1\cdot e_1' 0\cdot e_2')\vee(0\cdot e_1'\vee 1\cdot e_2')=(1\vee 0)e_1'\vee(0\vee 1)e_2'=1\cdot e_1'\vee 1\cdot e_2'=d$ и т. д. Полученные таким способом значения операции сложения $x'\vee y'$ векторов x' и y' пространства M_1' приведены в табл. 3. Определяем операцию умножения скаляра поля G_1 на вектор пространства M_1': $0\cdot b=0\cdot(1\cdot e_1'\vee 0\cdot e_2')=(0\cdot 1)e_1\vee(0\cdot 0)e_2=0e_1\vee 0\cdot e_2= =\mathbf{a}$ и т. д. Полученные таким способом значения операции $\lambda x'$ умножения скаляра $\lambda\in G_1$ на вектор $x'\in M_1'$ приведены в табл. 4.

Итак, мы построили пространство M_1'. В его состав входят, кроме всех элементов пространства M_1, еще и элемент d. Проверим, является ли пространство M расширением пространства

M_1. Для этого сужаем множество M до множества M_1, выбрасывая из него элемент d. Если на множестве M_1 сохранить действие операций $x' \vee y'$ и $\lambda x'$, то они будут определяться табл. 5, 6. Операция $\lambda x'$ совпадает с умножением коэффициента на вектор

Таблица 3

$y' \backslash x'$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

$x' \vee y'$

Таблица 4

$\lambda \backslash x'$	a	b	c	d
0	a	a	a	a
1	a	b	c	d

$\lambda x'$

Таблица 5

$y' \backslash x'$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	—
c	c	—	c

$x' \vee y'$

Таблица 6

$\lambda \backslash x'$	a	b	c
0	a	a	a
1	a	b	c

$\lambda x'$

в пространстве M_1. Однако, как это видно из сравнения табл. 1, 5, операции $x \vee y$ и $x' \vee y'$, заданные на множестве M_1, не совпадают. Первая определена всюду, вторая же операция — частичная. Таким образом, построенное нами пространство M_1' не является расширением пространства M_1.

Этот пример доказывает, что при включении элементов множества M_1 в множество M_1' им нельзя приписывать наборы координат произвольным образом. При формировании пространства M_1' мы поставили в соответствие вектору c набор координат (0, 1) и, как видим, расширения пространства M_1 не получили.

Таблица 7

$y' \backslash x'$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	c
c	c	c	c	c
d	d	c	c	d

$x' \vee y'$

Испытаем теперь вторую из имеющихся возможностей и присвоим вектору c набор координат $(1, 1)$. Теперь набору $(1, 0)$ ставим в соответствие вектор d. Таблица для операции $\lambda x'$ остается прежней, операция $x' \vee y'$ теперь характеризуется табл. 7. При исключении из нее элемента d она превращается в таблицу, значения которой совпадают со значениями табл. 1. Итак, реализуя второй вариант построения пространства M_1' приходим к полному пространству, которое является расширением пространства M_1.

Пусть M — полное логическое пространство над полем G с базисом $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и k — число элементов поля G. Каждому набору $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ скаляров поля G соответствует свой вектор $x \in M$, равный $x = \xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee ... \vee \xi_n e_n$. Вместе взятые, эти векторы образуют все пространство M. Отсюда непосредственно следует, что число l векторов пространства M составит $l = k^n$ **(2)**. Обратно, любое логическое пространство M, число векторов которого определяется формулой (2), будет полным, поскольку каждому вектору в этом случае соответствует только одно его разложение. Таким образом, *полное логическое пространство M* над полем G можно определить еще и как такое логическое пространство, у которого число скаляров k поля G, число всех векторов l и число базисных векторов r пространства M связаны зависимостью **(2)**. Для неполного пространства, очевидно, должно выполняться соотношение $l < k^n$ **(3)**.

В полном логическом пространстве вводим *операции конъюнкции* и *отрицания векторов*. Пусть M — полное логическое пространство с базисом $(e_1, e_2, ..., e_n)$ над полем G, $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ — набор координат, соответствующий вектору $x \in M$, $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ — набор координат, соответствующий вектору $y \in M$. *Конъюнкцией* или *логическим произведением* (кратко — просто *произведением*) векторов x и y назовем вектор

$$xy = \xi_1\eta_1 e_1 \vee \xi_2\eta_2 e_2 \vee ... \vee \xi_n\eta_n e_n, \tag{4}$$

отрицанием вектора x назовем вектор

$$\bar{x} = \bar{\xi}_1 e_1 \vee \bar{\xi}_2 e_2 \vee ... \vee \bar{\xi}_n e_n. \tag{5}$$

Заметим, что в неполном логическом пространстве операции конъюнкции и отрицания векторов ввести, вообще говоря, невозможно, поскольку не обеспечивается их однозначность. Следующий пример доказывает это. Попытаемся ввести с помощью определения (4) операцию конъюнкции для неполного пространства M_1 над полем G_1. Вектору b соответствует набор координат $(1, 0)$ вектору c — наборы координат $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Согласно (4) имеем $bc = 1 \cdot 0 \cdot b \vee 0 \cdot 1 \cdot c = a$ и вместе с тем $bc = 1 \cdot 1 \cdot b \vee 0 \cdot 1 \cdot c = b$. Как видим, однозначность операции конъюнкции не выполняется. С нарушением однозначности мы сталкиваемся и при попытке ввести операцию отрицания с помощью определения (5): с одной стороны, $c = 0 \cdot b \vee 1 \cdot c = b$, с другой, $c = \bar{1} \cdot b \vee \bar{1} \cdot c = a$.

Легко проверить, что для операций конъюнкции и отрицания векторов выполняются следующие соотношения:
закон идемпотентности — для любого $a \in M$ $aa=a$ **(6)**;

закон коммутативности — для любых $a, b \in M$ $ab=ba$ **(7)**;
закон ассоциативности — для любых $a, b, c \in M$ $a(bc)=(ab)c$ **(8)**;
закон нуля — для любого $a \in M$ $0 \cdot a = 0$ **(9)**;
закон единицы — для любого $a \in M$ $1 \cdot a = a$ **(10)**;

законы дистрибутивности — для любых $a, b, c \in M$

$$a(b \vee c) = ab \vee ac \quad \textbf{(11)}, \quad a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c) \quad \textbf{(12)};$$

законы элиминации — для любых $a, b \in M$

$$a \vee ab = a \quad \textbf{(13)}, \quad a(a \vee b) = a \quad \textbf{(14)};$$

закон двойного отрицания — для любого $a \in M$ $\overline{\overline{a}} = a$ **(15)**;

закон отрицания нуля $\overline{0}=1$ **(16)**;
закон отрицания единицы $\overline{1}=0$ **(17)**;
закон исключенного третьего — для любого $a \in M$ $a \vee \overline{a} = 1$ **(18)**;

закон противоречия — для любого $a \in M$ $a\overline{a}=0$ **(19)**;

законы де Моргана — для любых $a, b \in M$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a}\,\overline{b} \quad \textbf{(20)}; \quad \overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b} \quad \textbf{(21)}.$$

Символы 0 и 1, фигурирующие в только что записанных равенствах, обозначают векторы, а не скаляры.

Операции умножения векторов и умножения скаляра на вектор связывают следующие соотношения:
закон ассоциативности — для любого $\alpha \in G$ и любых $a, b \in M$

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b, \qquad \textbf{(22)}$$

закон дистрибутивности — для любого $\alpha \in G$ и любых $a, b \in M$

$$\alpha(ab) = (\alpha a)(\alpha b). \qquad \textbf{(23)}$$

Поступила в редколлегию 09.01.90

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Х., 1987. С. 142. 2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М., 1971. С. 271. 3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1965. С. 520.

Поступила в редколлегию 03.05.89