

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

### 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

#### Граничные условия

Для решения системы уравнений (13) – (18), представленных в [1], необходимо задать граничные условия. Наиболее простым и распространенным случаем является применение граничных условий для идеального проводника. При отсутствии стороннего магнитного тока у поверхности идеального проводника существуют только нормальная составляющая электрического поля и тангенциальная составляющая магнитного поля. Следовательно, для реализации граничных условий достаточно задать нулевыми значения тангенциальных составляющих электрического поля и нормальных составляющих магнитного поля на границе идеального проводника. В этом случае имеем:

$$E_{1r} = E_{2r} = 0, \quad (1)$$

$$H_{1n} = H_{2n} = 0, \quad (2)$$

где  $E_{1r}, H_{1n}$  и  $E_{2r}, H_{2n}$  – тангенциальные составляющие электрического поля и нормальные составляющие магнитного поля в области вычисления на поверхности идеального проводника соответственно.

Наиболее просто условия (1) и (2) можно реализовать в декартовой системе координат. Более того, с точки зрения реализации алгоритма метода конечных разностей (МКР), в декартовой системе координат достаточным является изначально жестко зафиксировать значения трех компонент электрического поля равными нулю на границе и не изменять их значения в течении всего процесса вычисления.

Более сложным случаем является модель неограниченного пространства. Поскольку невозможно использовать для моделирования свободного пространства бесконечно большую сетку разбиения, что требует огромных вычислительных ресурсов, задача его моделирования является чрезвычайно актуальной. Существуют следующие наиболее распространенные способы моделирования свободного пространства:

1. *Достаточно большое моделируемое пространство.* В этом случае исследуемая область выбирается достаточно большой, чтобы за время, необходимое для получения решения, электромагнитная волна, отраженная от внешней границы, не достигала области, представляющей интерес. Однако данный способ является неэффективным в силу своей ресурсоемкости.

2. *Поглощающие границы.* Поглощающие границы или же поглощающие граничные условия приобрели массовое распространение ввиду их высокой эффективности и относительной простоты реализации с точки зрения программирования. С точки зрения вычисления эти граничные условия заключаются в том, что каждая из компонент вектора электрического поля в области, прилегающей к искусственным поглощающим границам, удовлетворяет следующему трехмерному волновому уравнению:

$$\left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^{-2} (\Delta t)^2 \right) \vec{E} = 0. \quad (3)$$

В работе [1] предлагается три конечно-разностных аппроксимации поглощающих граничных условий (заметим, что практическое применение получили только первые две аппроксимации: первая – ввиду простоты реализации, а вторая – ввиду высокой точности). Первая аппроксимация поглощающей границы на плоскости, параллельной оси  $x$  может быть представлена в виде

$$\left( (\Delta x)^2 - c^{-2} (\Delta t)^2 \right) \vec{E} \Big|_{x=0} = 0 . \quad (4)$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для остальных плоскостей. Основным недостатком поглощающих граничных условий первого порядка является то, что они поглощают только те волны, которые распространяются перпендикулярно к границе. Более того, при использовании граничных условий первого порядка наблюдается отражение электромагнитной волны от границ области поглощения порядка 3-4% [2]. Данные недостатки устраняются при использовании граничных условий второго порядка, которые для случая поглощающей границы на плоскости, параллельной оси  $x$ , могут быть представлены в виде

$$\left( c_0^{-1} (\Delta x)^2 - c_0^{-2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \left( (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \right) \right) \vec{E} \Big|_{x=0} = 0 . \quad (5)$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для остальных плоскостей. Однако с точки зрения последующего этапа, связанного с программированием, эти выражения требуют некоторого рода преобразований, вид которых зависит от конкретных условий решаемой задачи.

Отметим, что при введении дополнительных выражений поглощающие граничные условия могут стать практически идеальными (иметь отражение порядка 0,01%). Пути совершенствования поглощающих граничных условий будут рассмотрены ниже.

3. *Идеально прилегающие слои* являются еще одной разновидностью поглощающих границ, суть которых заключается в окружении области моделирования однородной поглощающей средой, обладающей слабым отражением [3].

Неоднородные электрические потери  $\sigma$  и неоднородные магнитные потери  $\sigma^*$  математически присутствуют только лишь в вихревых уравнениях:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (6)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\sigma^* \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} . \quad (7)$$

Амплитуда электромагнитной волны значительно уменьшается за время продвижения электромагнитной волны к границе области вычисления и еще раз получает затухание на обратном пути. Поскольку действующее сопротивление стационарной волны в подобной среде может быть записано как

$$Z = [(i\omega\mu_0 - \sigma^*) / (i\omega\varepsilon_0 - \sigma)]^{1/2} , \quad (8)$$

то выбор  $\sigma^* = \mu_0 \sigma / \varepsilon_0$  уменьшит его на сопротивление свободного пространства на величину характеристического сопротивления свободного пространства  $Z = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ .

4. *Глобальная ретроспективная схема усечения.* В работе [4] была предложена оригинальная методика определения значений поля на границе. В этой методике сочетаются дифференциальный и интегральный подходы к решению системы уравнений Максвелла. На рис. 1 показана физическая область вычисления, которая, согласно этому методу, делится на две зоны –  $U$  и  $V$ .

Область  $U$  содержит все источники и нелинейности. При соблюдении условия Зоммерфельда [4] можно получить точное значение в точке  $r$  в любой момент времени. Таким образом, область вычисления ограничивается поверхностью, для которой можно получить точное значение поля и практически полное отражение от внешней границы.



Рис. 1

### Практическое применение

Практическое применение МКР показывает, что этот метод обладает рядом недостатков, которые связаны с потерей точности и так называемыми вычислительными (нефизическими) эффектами. Следовательно, весьма актуальной является задача выявления и анализа подобных эффектов, а также разработка мер по их устранению или учету в конечном результате моделирования.

Любая дискретная пространственная сетка вводит некоторую пространственную периодическую неоднородность. Из-за этого имеют место такие нефизические эффекты, как вычислительная дисперсия и дифракция [5]. Как отмечалось в [6], в задаче распространения электромагнитного импульса имеет место его отклонение от первоначальной формы за счет расширения, а также – изменение его амплитуды. Перечисленные выше явления показаны на рис. 2.

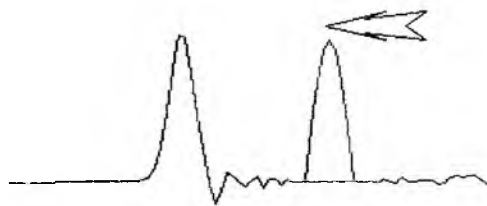


Рис. 2

Как видно, расширение импульса имеет вычислительное происхождение и является следствием потери в процессе вычисления волн, длины волны которых меньше размера элементарной ячейки, а также наложения различных возмущений, вносимых сеткой.

В [7] отмечено, что при моделировании взаимодействия релятивистского заряженного потока с электромагнитным полем, когда на каждом временном шаге с помощью МКР решаются уравнения Максвелла, возможен другой вычислительный эффект – вычислительная неустойчивость из-за излучения Вавилова-Черенкова (ИВЧ). При использовании многих конечно-разностных схем короткие волны распространяются в пространстве с фазовой скоростью, меньшей скорости света (вычислительная дисперсия). Если эта скорость оказывается меньшей скорости потока, то возникает ИВЧ «нефизической» природы (вычислительная неустойчивость). Для его устранения следует выбирать достаточно малый временной шаг  $\Delta t$ , чтобы волна за  $\Delta t$  продвигалась на расстояние, меньшее пространственного шага  $\Delta$  ( $\Delta \leq \Delta x, \Delta y, \Delta z$ ). Другой путь – ускорение коротких волн, проходящих через пространственную сетку. Здесь скрывается побочный эффект от использования «сдвинутых» сеток для компонент электрического и магнитного полей, которые используются в методе МКР. Так, определение полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и плотности полного тока  $\vec{j}$  на одной и той же сетке существенно снижает неустойчивость по сравнению со «сдвинутыми» сетками, что позволяет практически не учитывать дисперсию. В случае же «сдвинутых» сеток анализ и учет дисперсии необходим, или же следует линейно интерполировать поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  со «сдвинутых» сеток на одну общую сетку разбиения и уже эти значения использовать в дальнейших вычислениях [7].

Другим не менее важным моментом является тот факт, что необходимо различать «нефизическое» ИВЧ с реальным (физическим) излучением равномерно движущихся источников [8]. Эффект ИВЧ в несколько суженном понимании состоит в том, что электрический заряд (электрон), движущийся в среде с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , излучает электромагнитные волны с непрерывным спектром и со специфическим угловым распределением [8]. При этом излучение на циклической частоте  $\omega$  имеет место только, если скорость заряда  $v$  превышает фазовую скорость света в рассматриваемой среде  $v_\phi = c/n(\omega)$ . Имеем:

$$v > c/n(\omega), \quad (9)$$

где  $n(\omega)$  – показатель преломления света (на частоте  $\omega$ ) в среде ( $c$  – скорость света в вакууме). Упомянутая специфичность углового распределения состоит в том, что волновой вектор излучаемых волн  $\vec{k}$  образует со скоростью  $\vec{v}$  угол  $\theta_0$ . При этом имеем:

$$\cos(\theta_0) = c/n(\omega)v. \quad (10)$$

К результатам (9) и (10) можно прийти, используя принцип Гюйгенса: каждая точка на пути заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ , служит источником сферической волны, испускаемой в момент прохождения через нее заряда (рис. 3). Причем при условии (9) эти сферы имеют общую огибающую – конус с вершиной, совпадающей с мгновенным положением заряда (рис. 3).

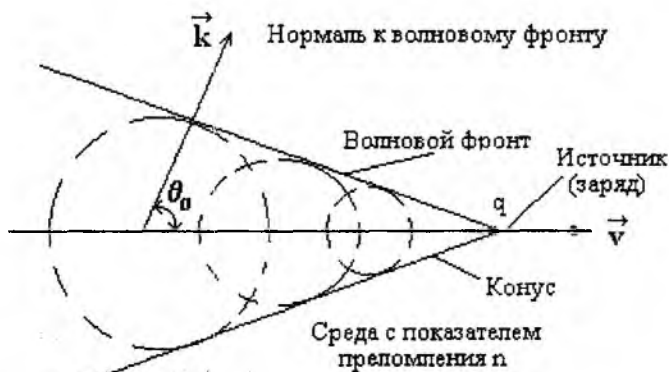


Рис. 3

Результат математического моделирования излучения равномерно движущегося заряда (двумерная модель) представлен на рис. 4.

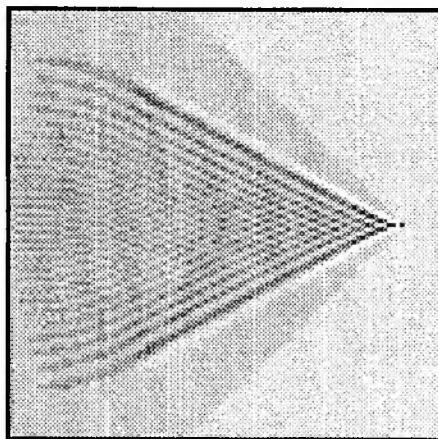


Рис. 4

Следует отметить, что МКР не предоставляет возможность различить собственно излучение равномерно движущегося заряда от «нефизического» излучения, связанного с вышеупомянутой погрешностью метода. Определение спектрального состава излучения реализуется переходом в вычислениях из рассмотрения процессов во временной области к его рассмотрению в частотной области с помощью преобразования Фурье. Методология такого перехода изложена в [9].

### Совершенствование граничных условий

Основным недостатком поглощающих граничных условий является нефизическое отражение электромагнитной волны от границ, которые в идеальном случае должны полностью их поглощать. На рис. 5 представлено численное решение задачи, целью которой является тестирование поглощающих граничных условий второго порядка. Для этого точечный источник электромагнитной волны был специально расположен в приграничной области. Как показано на рис. 5 (двумерная модель), фронт волны в приграничных областях имеет искажения, обусловленные влиянием электромагнитных волн, отраженных от границ области вычисления.

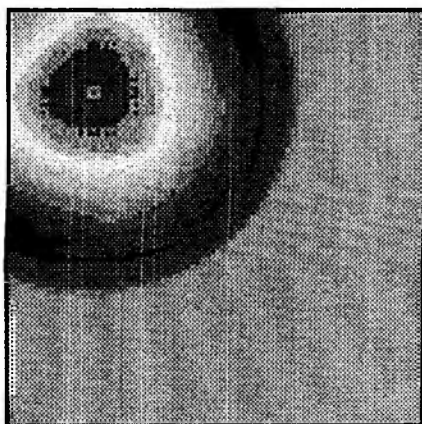


Рис. 5

В работе [2] проведен тщательный анализ погрешности поглощающих граничных условий. Практически доказано, что, несмотря на кажущуюся достаточность применения граничных условий второго порядка, необходимо вводить дополнительные угловые поглощающие

граничные условия. Коэффициент отражения  $R$  поглощающей границы в углах области вычисления зависит от угла распространения электромагнитной волны  $\Theta$  следующим образом

$$R(\Theta) = \left| \frac{\cos(\Theta) - 1}{\cos(\Theta) + 1} \right|^2 \quad (11)$$

В случае отсутствия потерь на границах, коэффициент отражения  $R$  может быть записан через фазовую скорость  $v_\phi$ , которая, в свою очередь, является функцией частоты  $f$ . Это соотношение имеет вид:  $v_\phi = c / \cos(\Theta)$ . При этом (9) принимает вид

$$R(f) = \left| \frac{v_\phi(f) - c}{v_\phi(f) + c} \right|^2 \quad (12)$$

Выражение (12) является базовым для угловых поглощающих граничных условий, практическое применение которых обеспечивает максимальное поглощение электромагнитной волны.

Таким образом, практика применения метода конечных разностей к различным задачам распространения электромагнитных волн показала, что важным моментом такого применения является анализ вычислительной погрешности, наличие и величина которой обусловлены конечно-разностной аппроксимацией системы уравнений Максвелла. Поэтому возможность прогнозирования появления вычислительной неустойчивости, контроля ее величины становится важным этапом и необходимым условием практического применения метода конечных разностей.

**Список литературы:** 1. *Mur G.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *IEEE Transactions on Magnetic Compatibility*, 1981, vol. EMC-23, pp. 377 – 382. 2. *Svigelj J. A., Mittra R.* The dispersive boundary condition applied to nonuniform orthogonal meshes // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1999, vol. 47, No. 3, pp. 257 – 264. 3. *Berenger J.P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Comp. Phys.*, 1994, vol. 114, No. 2, pp.185 – 200. 4. *Ziolkowsky R. W., Madsen N. K., Carpenter R. C.* Three-dimensional computer modeling of electromagnetic fields: A global lookback lattice truncation scheme // *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 50, pp. 360 – 408. 5. *Schneider J.B., Kruhlak R.J.* Dispersion of homogeneous and inhomogeneous waves in the Yee finite-difference time-domain grid // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2001, vol. 49, no.2, pp. 280 – 287. 6. *Yee K. S.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations // *IEEE Transactions Antennas and Propagation*, 1966, vol. AP-14, pp. 302 – 307. 7. *Рошаль А. С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979. 222 с. 8. *Гинзбург В. Л.* Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова – Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // *Успехи физических наук*, 1996. Т. 166, № 10, С. 1033 – 1042. 9. *Maksymov I. S., Churyumov G. I.* Photonic Green's functions calculation by using FDTD method // *Proceeding Mathematical Methods in Electrodynamics*. Kiev, 2002.С. 245 – 247.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 04.12.2002