УДК 62.506.2

В. П. ПЧЕЛИНОВ

ДЕДУКТИВНЫЙ ВЫВОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОРГАНА ЗРЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА. СООБЩЕНИЕ 2

Входные сигналы органа зрения — функции $b(\lambda)$ в общем случае состоят из бесконечно большого числа компонент [1], т. е. их множество представляет собой множество бесконечномерных векторов, определенных на интервале длин волн светового диапазона $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Цветовые же образы, каждый из которых можно описать с помощью вектора $\overline{S}$, имеющего компоненты: цветовой тон s_1, насыщенность s_2 и светлоту s_3, образуют множество трехмерных векторов.

В работе [2] установлено, что каждый из этих векторов связан взаимно-однозначной зависимостью с определенным классом эквивалентности функций $b(\lambda)$, порождаемым функцией F. Последняя входит в состав полученной математической модели спектральной чувствительности органа зрения человека.

Поскольку каждый класс эквивалентности может быть представлен своим элементом [3] и поэтому сам отождествляется как новый элемент некоторого множества, то функция F представляет собой сжимающее отображение множества входных сигналов органа зрения в фактор-множество классов эквивалентности.

Рассмотрим вопрос об определении вида этой функции. Чтобы не снижать общности получаемых результатов (так как они могут быть полезны не только при исследовании цветового зрения человека), дальнейшие выводы будем делать на абстрактном математическом уровне с последующей их интерпретацией для конкретных условий. Поскольку входные сигналы органа зрения могут быть представлены тремя различными видами множеств [2] (выпуклого множества пространства L_2, положительного конуса и всего пространства L_2), то функцию F необходимо определить для каждого из них.

Сначала рассмотрим этот вопрос для элементов выпуклого множества.

Пусть M — выпуклое множество в некотором линейном пространстве H, а Z — произвольное множество этого пространства.

Теорема 1. *Пусть имеется отображение $F: M \to Z$, удовлетворяющее условию: если $F(x_1) = F(y_1)$, $F(x_2) = F(y_2)$, то*

$$F(mx_1 + (1 - m)x_2) = F(my_1 + (1 - m)y_2). \tag{1}$$

Тогда существует подпространство $S \subset H$ такое, что сжатие h_s пространства H по модулю S ($h_s: H \to H/S$) обладает свойством:

$$\text{если } F(x) = F(y), \text{ то } h_s(x) = h_s(y), \tag{2}$$

и обратно,

$$\text{если } h_s(x) = h_s(y), \text{ то } F(x) = F(y), \tag{3}$$

где $x,\ x_1,\ x_2,\ y,\ y_1,\ y_2,\ mx_1 + (1-m)x_2,\ my_1 + (1-m)y_2 \in M$; $0 \leqslant m \leqslant 1$.

Доказательство. Обозначим через S множество всех элементов ξ из H, которые можно представить в виде

$$\xi = \beta(x - y), \tag{4}$$

где β — произвольное число, $x,\ y \in M$, причем $F(x) = F(y)$.

Покажем сначала, что S — подпространство линейного пространства H. Для этого, как известно [3], достаточно доказать, что для любых $\xi_1,\ \xi_2 \in S$ будет выполняться условие $\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 \in S$ при каких-либо β, т. е. замкнутость этого подпространства относительно сложения и умножения на число.

Замкнутость S относительно умножения очевидна из определения элементов $\xi \in S$, поэтому требуется лишь доказать, что для любых $\xi_1,\ \xi_2 \in S$ $\xi_1 + \xi_2 \in S$.

Возьмем два произвольных элемента $\xi_1,\ \xi_2 \in S$. Согласно (4), их можно представить в виде $\xi_i = \beta_i(x_i - y_i)$ и $F(x_i) = F(y_i)$ $(i = 1, 2)$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta \geqslant 0$, так как если $\beta < 0$, то ξ_i запишем так:

$$\xi_i = |\beta_i|(x_i - y_i). \tag{5}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}(x_1 - y_1) + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}(x_2 - y_2) = \\ = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2}{\beta_1 + \beta_2} - \frac{\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2}{\beta_1 + \beta_2}. \tag{6}$$

Обозначив $m = \dfrac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}$, получим

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 - m\beta_1}{m} = \frac{\beta_1(1-m)}{m}. \tag{7}$$

Подставив этот результат в (6), запишем

$$\frac{\beta_1 x_1 + \dfrac{\beta_1(1-m)}{m}x_2}{\beta_1 + \beta_2} - \frac{\beta_1 y_1 + \dfrac{\beta_1(1-m)}{m}}{\beta_1 + \beta_2} = (mx_1 + (1-m)x_2) - \\ - (my_1 + (1-m)y_2). \tag{8}$$

Но по условию теоремы $F(mx_1 + (1-m)x_2) = F(my_1 + (1-m)y_2)$, следовательно, $\dfrac{\xi_1 + \xi_2}{\beta_1 + \beta_2} \in S$. Тогда $\xi_1 + \xi_2 \in S$. Таким образом, S — подпространство H. Покажем теперь, что если $\xi \in S$, число β' и функции $x',\ y' \in M$ таковы, что $\xi = \beta'(x' - y')$, то $F(x') = F(y')$.

Действительно, так как $\xi \in S$, то найдутся функции x, $y \in M$ и число β такие, что $\xi = \beta(x - y)$ и $F(x) = F(y)$. Тогда $\xi = \beta(x - y) = \beta'(x' - y')$, т. е.

$$\beta x + \beta' y' = \beta y + \beta' x'. \qquad (9)$$

Положив $\tau = \frac{\beta'}{\beta - \beta'}$, получим $\beta = \frac{(1-\tau)\beta'}{\tau}$, и уравнение (9) примет вид

$$\frac{(1-\tau)\beta'}{\tau} x + \beta' y' = \frac{(1-\tau)\beta'}{\tau} y + \beta' x',$$

который можно также представить как

$$(1-\tau)x + \tau y' = (1-\tau)y + \tau x'. \qquad (10)$$

Это уравнение выразит равенство отрезков, соединяющих точки x, y' и y, x', поэтому

$$F[(1-\tau)x + \tau y'] = F[(1-\tau)y + \tau x']. \qquad (11)$$

Если ввести обозначения: $x_1 = (1-\tau)x + \tau y'$, $y_1 = (1-\tau)y + \tau x'$, то получим $F(x_1) = F(y_1)$.

Таким образом, если x, $y \in M$, $F(x) = F(y)$, то $x - y \in S$ и $h_s(x) = h_s(y)$. И, наоборот, если $h_s(x) = h_s(y)$, то $\xi = x - y \in S$ и $F(x) = F(y)$. Теорема доказана. Значит, функция F является сжатием, если выполняются условия теоремы.

Рассмотрим теперь условия линейности этой функции на выпуклом множестве.

Пусть $H = L_2[t_1, t_2]$, где t_1, t_2 — произвольные независимые переменные, а M — выпуклое множество в $L_2[t_1, t_2]$.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор F был линейным на выпуклом множестве $M \subset L_2$, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям:*

1) *если $F(x_1) = F(y_1)$ и $F(x_2) = F(y_2)$, то*

$$F[mx_1 + (1-m)x_2] = F[my_1 + (1-m)y_2], \qquad (12)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2, $mx_1 + (1-m)x_2$, $my_1 + (1-m)y_2 \in M$; $0 \leqslant m \leqslant 1$;

2) *существует набор элементов $\{g_i\}$ $(g_i \in M)$ такой, что для всякого $x \in M$ найдется единственная совокупность чисел $\{\alpha_i\}$, удовлетворяющая условию*

$$F\left[mx + (1-m)\sum_i \alpha_i(x) g_i\right] = F\left[\sum_i \alpha_i'(x) g_i\right], \qquad (13)$$

где $\alpha_i(x) = \alpha_i''(x) - \alpha_i(x)$; $\sum\limits_i \alpha_i(x) = \sum\limits_i \alpha_i''(x) = 1$; $0 \leqslant m \leqslant 1$;

3) *$\alpha_i(x)$ — непрерывные функционалы.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

Пусть $x(t)$, $y(t) \in M \subset L_2[t_1, t_2]$. Тогда, согласно (13),

$$F\left[mx + (1-m)\sum_i \alpha_i'(x) g_i\right] = F\left[\sum_i \alpha_i(x) g_i\right],$$

$$F\left[my + (1-m)\sum_i \alpha'_i(y)\, g_i\right] = F\left[\sum_i \alpha''_i(y)\, g_i\right].$$

Учитывая (12), получим

$$F\left[m\left(mx + (1-m)\sum_i \alpha_i(x)\, g_i + (1-m)\left(my_2 + (1-m)\sum_i \alpha'_i(y)\, g_i\right]\right.\right. =$$

$$= F\left[m\sum_i \alpha''_i(x)\, g_i + (1-m)\sum_i \alpha''_i(y)\, g_i\right]. \tag{14}$$

Возьмем теперь $Z = mx + (1-m)y$. Согласно (13), для нее также можно написать, что

$$F\left[mz + (1-m)\sum_i \alpha'_i(z)\, g_i\right] = F\left[\sum_i \alpha''_i(z)\, g_i\right]. \tag{15}$$

Подставляя в это выражение вместо функции z ее значения, получим

$$F\left[m(mx + (1-m)\,y) + (1-m)\sum_i \alpha'_i(mx + (1-m)\,y)\, g_i\right] =$$

$$= F\left[\sum_i \alpha''_i(mx + (1-m)\,y)\, g_i\right]. \tag{16}$$

В силу единственности чисел $\{\alpha_i = \alpha''_i - \alpha'_i\}$ в формулах (14) и (16) можно записать, что

$$\sum_i \left[m\alpha'_i(x) + (1-m)\,\alpha_i(y)\right] = \sum_i \alpha'_i(mx + (1-m)\,y);$$

$$\sum_i \left[m\alpha''_i(x) + (1-m)\,\alpha''_i(y)\right] = \sum_i \alpha''_i(mx + (1-m)\,y), \tag{17}$$

или $m\alpha_i(x) + (1-m)\,\alpha_i(y) = \alpha_i(mx + (1-m)\,y)$. Отсюда следует, что α_i — это аддитивные и непрерывные (с учетом условия *3* теоремы 2), а значит, линейные функционалы в L_2. Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала [3] получим

$$\alpha_i(x) = F(x) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, e_i(t)\, dt, \tag{18}$$

где $e_i(t)$ — фиксированные линейно-независимые функции из M. Теорема доказана. Отсюда следует, что условия теоремы определяют конкретный вид функции F как линейного оператора на данном множестве функций.

На практике может представлять интерес также и другая система условий линейности этой функции.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор F был линейным на выпуклом множестве $M \subset L_2$, необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялись условия:*

1) *если* $F(x_1) = F(y_1)$ и $F(x_2) = F(y_2)$, *то*

$$F\left[mx_1 + (1-m)\,x_2\right] = F\left[my_1 + (1-m)\,y_2\right]; \tag{19}$$

2) *если* $x_n \to x$, $y_n \to y$ и $F(x_n) = F(y_n)$, *то*

$$F(x) = F(y), \tag{20}$$

где $x, x_1, x_2, x_n, y, y_1, y_2, y_n, mx_1 + (1-m)x_2, my_1 + (1-$
$-m)y_2 \in M$; $0 \leqslant m \leqslant 1$.

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточност заметим, что подпространство S, рассмотренное в теореме 1, буде подпространством в L_2 как в линейном нормированном простра стве, т. е. замкнуто.

Действительно, пусть $\xi_n \in S$ и $\xi_n \to \xi$. Положим

$$x_n = \frac{|\xi_n| + \xi_n}{2}; \quad y_n = \frac{|\xi_n| - \xi_n}{2}; \quad x = \frac{|\xi| + \xi}{2}; \quad y = \frac{|\xi| - \xi}{2}.$$

Тогда $\xi_n = x_n - y_n$; $\xi = x - y$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, соглас условию (20). Тогда очевидно, что $x_n, y_n \in M$, в силу услови (20) $F(x_n) = F(y_n)$. Поэтому $F(x) = F(y)$, т. е. $\xi \in S$ и S — замкн тое подпространство. Но S является классом эквивалентнос фактор-пространства L_2/S [3].

Пусть $\{g_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — базис в L_2/S. Тогда существу набор линейных функционалов $\{\alpha_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, д которых равенства $F(x) = F(y)$ и $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ равносильны. Эт базис может быть конечномерным или счетным [3].

На основании теоремы Рисса об общем виде линейного фун ционала получаем, что

$$\alpha_i(x) = F(x) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, e_i(t)\, dt, \qquad (2$$

где $e_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — фиксированные линейно-независим функции. Поскольку других видов линейных функционалов в не существует [3], то функция F будет иметь лишь этот еди ственный вид. Теорема доказана.

Таким образом, мы определили две независимые системы усл вий линейности функции F на выпуклом множестве пространст L_2, из которых вытекает одинаковая и единственная форма записи.

Рассмотрим вопрос о линейной независимости функций $e_i($ Для условий, сформулированных в теореме 2, она вытекает единственности набора чисел $\{\alpha_i(x)\}$, определенных согласно (1 Это можно показать следующим образом. Допустим, систе функций $\{e_i(t)\}$ — конечномерна. Допустим также, что функц $e_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно зависимы. Тогда хотя бы од из них можно записать в виде линейной комбинации остальны например:

$$e_1(t) = k_2 e_2(t) + k_3 e_3(t) + \ldots + k_n e_n(t), \qquad (2$$

где $k_2, k_3, \ldots, k_n$ — вещественные числа. Согласно (18), лине ный функционал имеет вид

$$\alpha_1(x) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, e_1(t)\, dt.$$

Используя (27), полученное выражение запишем в виде

$$\alpha_1(x) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,(k_2e_2(t) + k_3e_3(t) + \ldots + k_ne_n(t))\,dt =$$
$$= k_2\alpha_2(x) + k_3\alpha_3(x) + \ldots + k_n\alpha_n(x).$$

Значит, для некоторой функции $x(t)$ набор чисел $\{\alpha_i(x)\}$ не будет единственным, что противоречит условию 2 теоремы. Таким образом, в формуле (18) функции $e_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются линейно-независимыми.

Для условий теоремы 3 линейная независимость функций $e_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в формуле (21) вытекает из конечномерности базиса, с помощью которого может быть задана любая система в пространстве L_2. Но если известен базис системы $\{g_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то каждый ее элемент $x(t)$ единственным образом представим [3] в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,g_i, \tag{23}$$

где $\alpha_i(x)$ — линейные функционалы, определяемые с помощью формулы (21).

Из единственности представления этого элемента следует единственность набора чисел $\{\alpha_i(x)\}$. Дальнейшее доказательство линейной независимости функций $e_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ аналогично ранее приведенному. Теперь мы можем констатировать, что все элементы, входящие в состав рассматриваемой модели, определены. Остается установить лишь адекватность данной модели и каждой из систем условий линейности, сформулированных в теоремах 1 и 2. Для этого, как известно, достаточно из модели вывести указанные условия.

Рассмотрим вывод условий теоремы 2. Для вывода условия (12) возьмем две произвольные пары функций $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t) \in M \subset L_2[t_1, t_2]$, для которых выполняются соотношения:

$$\Phi(x_1, y_1) = Q[\varphi(F(x_1)), \varphi(F(y_1))] = 1; \tag{24}$$

$$\Phi(x_2, y_2) = Q[\varphi(F(x_2)), \varphi(F(y_2))] = 1. \tag{25}$$

Введем обозначения:

$$\xi_1 = \varphi[F(x_1)]; \quad \eta_1 = \varphi[F(y_1)], \tag{26}$$

$$\xi_2 = \varphi[F(x_2)]; \quad \eta_2 = \varphi[F(y_2)]. \tag{27}$$

Тогда, согласно (24) и (25), будут выполняться равенства

$$\xi_1 = \eta_1 \text{ и } \xi_2 = \eta_2. \tag{28}$$

Для каждой из взятых функций, в соответствии с (18), можно написать соотношения:

$$F(x_j) = \alpha_i(x_j) = \int_{t_1}^{t_2} x_j(t)\,e_i(t)\,dt, \tag{29}$$

$$F(y_j) = \alpha_i(y_j) = \int_{t_1}^{t_2} y_j(t)\,e_i(t)\,dt; \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2). \tag{30}$$

В связи с тем, что в формулах (26), (27) φ — это функция взаимно-однозначного соответствия, то согласно (28) получим

$$F(x_1) = F(y_1) \text{ и } F(x_2) = F(y_2). \tag{31}$$

По определению выпуклого множества [2] каждая пара функций, являющихся ее элементами, должна удовлетворять условию $mx_1 + (1-m)x_2 \in M$; $my_1 + (1-m)y_2 \in M$. Каждое из этих выражений представляет собой некоторую функцию, поэтому их линейные функционалы имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_i(mx_1 + (1-m)x_2) &= F(mx_1 + (1-m)x_2) = \\ &= m\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)\,e_i(t)\,dt + (1-m)\int_{t_1}^{t_2} x_2(t)\,e_i(t)\,dt = \\ &= mF(x_1) + (1-m)F(x_2), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{32}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\alpha_i(my_1 + (1-m)y_2) &= F(my_1 + (1-m)y_2) = \\ &= mF(y_1) + (1-m)F(y_2).\end{aligned} \tag{33}$$

Согласно (31), слагаемые правых частей равенств (32) и (33) попарно равны, поэтому равны и их левые части, т. е.

$$F(mx_1 + (1-m)x_2) = F(my_1 + (1-m)y_2). \tag{34}$$

Таким образом, мы доказали, что если выполняются равенства (31), то будет выполняться и (34), а это и есть условие (12). Для вывода условия *2* рассматриваемой теоремы запишем выражение (13) в виде

$$\beta_j\left[mx + (1-m)\sum_i \alpha_i'(x)\,g_i\right] = \beta_j\left[\sum_i \alpha_i''(x)\,g_i\right], \tag{35}$$

где $\beta_j\,(j = 1, 2, \ldots, p)$ — линейные функционалы, определяемые по формуле (18).

Раскроем скобки в этом выражении:

$$m\beta_j(x) + (1-m)\sum_i \alpha_i'(x)\,\beta_j(g_i) = \sum_i \alpha_i''(x)\,\beta_j(g_i) \tag{36}$$

или

$$\sum_i [\alpha_i''(x) - (1-m)\,\alpha_i'(x)]\,\beta_j(g_i) = m\beta_j(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

Нам нужно показать, что существуют числа $\alpha_i'(x)$ и $\alpha_i''(x)$, для которых выполняется равенство (37), причем разность $\alpha_i''(x) - \alpha_i'(x) = \alpha_i(x)$ определена однозначно.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_i \alpha_i(x)\,\beta_j(g_i) = m\beta_j(x). \tag{38}$$

Заметим, что в ней система функционалов $\{\beta_j(g_i)\}$ линейно-независима, в силу линейной независимости функций $e_j(t)$ $(j =$

$=1, 2, \ldots, p$), входящих в выражения, описывающие линейные функционалы, как это было показано ранее. Поэтому существуют такие $g_1, g_2, \ldots, g_n$, что определитель, состоящий из элементов $\{\beta_j(g_i)\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, p$), отличен от нуля, а значит, существует единственное решение этой системы относительно $\alpha_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. единственный набор чисел $\{\alpha_i(x)\}$ при данной совокупности функций $\{g_i(t)\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), что и требовалось доказать.

Условие *3* рассматриваемой теоремы вытекает непосредственно из того факта, что формула (18) описывает линейные функционалы. Отсюда следует, что система условий теоремы 2 и математическая модель, описанная в [2] с учетом (18),— адекватные понятия. Адекватность этой модели и системы условий теоремы 3 доказывается аналогичным образом, поскольку условие *1* из модели выводится точно так же, как соответствующее условие теоремы 2, а условие *2* вытекает из линейности функционала $\alpha_i(x)$, описываемого согласно (21).

Таким образом, из каждой рассмотренной системы условий линейности функции F можно вывести (с привлечением свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности) только данную модель и ничто иное.

Аналогичные системы условий для элементов положительного конуса $K \subset L_2[t_1, t_2]$ и всего пространства сформулированы и доказаны в работе [4].

В этой работе нет лишь доказательства системы условий, аналогичной условиям теоремы 2 для положительного конуса.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор F был линейным на положительном конусе $K \subset L_2$, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям:*

1) *если $F(x_1) = F(y_1)$ и $F(x_2) = F(y_2)$, то*

$$F(x_1 + x_2) = F(y_1 + y_2)$$
$$(x_1, x_2, y_1, y_2 \in K); \tag{39}$$

2) *существует набор элементов $\{g_i\}$ ($g_i \in K$) такой, что для всякого $x \in K$ найдется единственная совокупность чисел $\{\alpha_i(x)\}$, удовлетворяющая условию*

$$F\left[x + \sum_i \alpha_i'(x) g_i\right] = F\left[\sum_i \alpha_i''(x) g_i\right], \tag{40}$$

где $\alpha_i = \alpha_i'' - \alpha_i'$; $\alpha_i', \alpha_i'' \geqslant 0$;

3) $\alpha_i(x)$ — *непрерывные функционалы.*

Нетрудно видеть, что эти условия проще аналогичных условий, сформулированных в теореме 2, поэтому доказательство их мы опускаем. По той же причине мы опускаем доказательство адекватности этих условий и рассматриваемой математической модели.

Другую систему условий для конуса, как показано в [4], можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Для того чтобы функция F была линейной н положительном конусе $K \subset L_2$, необходимо и достаточно, чтоб выполнялись условия:*

1) *если* $F(x_1) = F(y_1)$ *и* $F(x_2) = F(y_2)$, *то*

$$F[\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2] = F[\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2]; \quad (41)$$

2) *если* $x_n \to x$, $y_n \to y$ *и* $F(x_n) = F(y_n)$, *то*

$$F(x) = F(y), \quad (42)$$

где $x, x_1, x_2, x_n, y, y_1, y_2, y_n \in K \subset L_2[t_1, t_2]$; β_1, β_2 — *веществен ные, положительные числа.*

Для всего пространства $L_2[t_1, t_2]$ эти системы можно сформу лировать в виде следующих теорем, доказанных в [4].

Теорема 6. *Для того чтобы проектор F был линейным, необхо димо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

1) *если* $F(x_1) = F(y_1)$ *и* $F(x_2) = F(y_2)$, *то*

$$F(x_1 + x_2) = F(y_1 + y_2) \ (x_1, x_2, y_1, y_2 \in L_2); \quad (43)$$

2) *существует набор элементов* $\{g_i\}$ $(g_i \in L_2)$ *такой, что дл произвольной функции* $x \in L_2$ *найдется единственная совокупност чисел* $\{\alpha_i(x)\}$, *удовлетворяющая условию*

$$F(x) = F\left(\sum_i \alpha_i(x) g_i\right); \quad (44)$$

3) $\alpha_i(x)$ — *непрерывные функционалы.* Как видно, эта система условий еще проще, чем аналогичная система для положитель ного конуса.

Вторая система условий для элементов L_2 отличается от усло вий, сформулированных в теореме 5, лишь принадлежностью функций не положительному конусу, а всему пространству L_2. Ее вывод также вытекает из вывода теоремы 5, поскольку он сделан для воспроизводящего конуса. Согласно теореме Рисса о продолжении линейного функционала [3], этот вывод распростра няется и для элементов пространства $L_2[t_1, t_2]$.

Заметим, что из каждой рассмотренной системы условий следует одинаковая форма записи функции F в виде соотноше ния (18), т. е. одинаковый вид рассматриваемой модели. По скольку доказательство адекватности этой модели и всех рас смотренных систем условий осуществляется по ранее описанной методике, то мы его опускаем.

Таким образом, мы доказали две независимые системы усло вий линейности проектора F, входящего в состав ранее рас смотренной математической модели спектральной чувствитель ности органа зрения человека для всех видов множеств входных сигналов, описанных в [2]. Заменяя в каждом из этих условий абстрактные переменные на конкретные — функции спектраль ной интенсивности лучистой яркости $b(\lambda)$ в соответствии с тре бованиями об их принадлежности к тому или иному виду мно жеств, получаем аксиомы, описывающие цветоразличительные свойства зрительной системы человека при раздельном и суммарном воздействии на нее различных световых стимулов. Назовем их аксиомами цветового зрения человека.

Аналогичные свойства были известны и ранее. Они назывались законами Грассмана. Различные формулировки этих законов приведены в работе [5].

Анализируя полученные нами аксиомы цветового зрения, легко видеть, что они существенно отличаются от всех известных законов Грассмана не только по форме, но и по содержанию.

Назовем наиболее существенные отличительные признаки.

1. Ни в одной из сформулированных в данной статье аксиом не используется понятие цвета или операции сложения цветов и умножения их на постоянные числа. Предметом их рассмотрения являются только излучения или отклонения излучений от заданного, т. е. объективные физические величины.

2. Экспериментальная проверка этих аксиом является наиболее простой и предусматривает использование органа зрения человека лишь в качестве нуль-органа по методике, описанной в [2], позволяющей получить объективные данные об их выполнении. Анализ многочисленных колориметрических экспериментов, проводимых ранее различными авторами и описанных в литературе [6], показывает, что все они выполняются с высокой степенью достоверности.

3. Формулировка аксиом сделана на строгом математическом языке, что значительно облегчает использование их при выводе модели.

4. Хотя из каждой системы в отдельности математически выводится модель цветового зрения человека, однако для всех видов множеств входных сигналов сформулировано по две системы аксиом. Это позволяет наиболее полно описать известные способы воздействия зрительных стимулов на орган зрения при проведении колориметрических экспериментов, а также значительно повышает достоверность полученной модели.

Запишем окончательный вид рассматриваемой модели:

$$\Phi[b_1, b_2] = Q[\varphi(F(b_1(\lambda))), \varphi(F(b_2(\lambda)))], \tag{45}$$

$$Q(\overline{S}_1, \overline{S}_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } \overline{S}_1 = \overline{S}_2; \\ 0, \text{ если } \overline{S}_1 \neq \overline{S}_2; \end{cases} \tag{46}$$

$$\overline{S}_1 = \varphi[F(b_1(\lambda))]; \quad \overline{S}_2 = \varphi[F(b_2(\lambda))], \tag{47}$$

$$F(b) = \alpha_i(b) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, e_i(\lambda)\, d\lambda, \tag{48}$$

где $e_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) — функции сложения цвета. Остальные обозначения те же, что и в работе [2].

Особенностью этой модели является то, что из нее непосредственно не вытекает вид функций $e_i(\lambda)$, а следует только то, что эти функции должны быть линейно-независимыми, что позволяе использовать данную модель при исследовании цвета в различ ных колориметрических системах. Для конкретного определени функций сложения необходима постановка дополнительных экспе риментов.

В заключение отметим, что поскольку эта модель получена путем строгих математических доказательств без привлечения каких-либо гипотетических предпосылок и на основании аксиом, использующих только объективные данные, то она также имеет объективный характер.

Высокая степень достоверности данной модели вытекает из строгости ее вывода и из того факта, что она опирается на две независимые системы аксиом для каждого вида множеств входных сигналов органа зрения, хорошо проверенных в многочисленных опытах и описывающих практически все известные способы преобразования зрительных стимулов при постановке колориметрических экспериментов.

Таким образом, рассматриваемая модель свободна от недостатков, описанных в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич М. М. Введение в фотометрию. Л. «Энергия», 1968. 244 с.
2. Пчелинов В. П. Дедуктивное построение математической модели спектральной чувствительности органа зрения человека. Сообщение 1 (см. статью в настоящем сборнике).
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972. 496 с.
4. К вопросу математического описания линейных психофизических систем.— В кн.: Проблемы бионики. Вып. 8. Харьков, 1972, с. 56—58. Авт.: Л. М. Майстровская, В. П. Пчелинов, Е. Г. Качко и др.
5. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Аксиоматическое построение модели цветового зрения.— В кн.: Проблемы бионики. Вып. 4, Харьков, 1970, с. 30—50.
6. Мешков В. В. Основы светотехники, ч. II. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961. 416 с.

Поступила 29 сентября 1976 г.

УДК 62.506.2

В. Ф. АНАНИН

МОЗГ КАК БИОЛОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА В РЕАЛЬНОМ МАСШТАБЕ ВРЕМЕНИ

В технике под системой в реальном масштабе времени имеется в виду система, использующая вычислительную машину для определения характеристик технических процессов, когда данные, поступающие в произвольное время (измеряемые величины, характеристики процессов), немедленно поступают в вы-