УДК 517.958 : 517.988.8 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.273

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧ РІВНЯННЯ З БІГАРМОНІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Савченко А.В.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: anton.savchenko@nure.ua

The aim is to apply the two-sided approximation method to solve the Dirichlet problem for a nonlinear equation with a biharmonic operator. The considered mathematical model appears during the process studying of deflection of a plate fixed at the boundary. In particular, this problem has found a wide applications in microelectromechanical systems. Thus, the current task is to develop numerical methods to solve it. In this study, we suggest to apply the two-sided approximation method based on the Green's function using.

Розглянемо основну крайову задачу (задачу Діріхле) для нелінійного еліптичного рівняння з бігармонічним оператором:

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\Delta^2 u = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор, Ω – круг одиничного радіуса с центром у початку координат, $\mathbf{n}$ – зовнішня до межі $\partial\Omega$ нормаль.

Задача (1), (2) виникає, наприклад, при дослідженні мікроелектромеханічних систем та описує процес прогину круглої пластини закріпленої на межі під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску. В такому випадку функція $f(\mathbf{x}, u)$ має вигляд [1]

$$f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \mu, \tag{3}$$

де $\lambda = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3}$, $\mu = \dfrac{PR^4}{Dd}$, ε_0 – електрична стала, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жорсткість на прогин, E – модуль пружності Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, ε_0 – електрична стала, ε – діелектрична проникність середовища, V – прикладена напруга між пластинами, P – рівномірний гідростатичний тиск, d – відстань між пластинами, R – радіус пластини, h – товщина пластини.

До розв’язання задачі (1), (2) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна, який полягає у заміні крайової задачі еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна та знаходженні його чисельного розв’язку методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих банахових просторах.

Оскільки $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, то функція Гріна крайової задачі (1), (2) має вигляд [2]

$$G(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi}|\mathbf{x}-\mathbf{s}|^2 \int\limits_1^{\frac{\left| |\mathbf{x}|\mathbf{s} - \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right|}{|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}} \frac{v^2-1}{v}\,dv, \tag{4}$$

де $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Відомо [2], що $G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \geq 0$, якщо $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$.

Тоді крайова задача (1), (2) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Рівняння (5) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ невід’ємних функцій [3].

Функція $f(\mathbf{x},u)$ вигляду (3) є неперервною і додатною при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $0 < u < 1$ і монотонно зростає за u, а отже, інтегральний оператор (5) буде ізотонним. Оскільки $f(0) = \lambda + \mu > 0$, то шукатимемо інваріантний конусний відрізок у вигляді $< v_0, w_0 >=< 0, \beta >$, де $0 < \beta < 1$. За β слід обрати найменший корінь рівняння

$$\lambda M = (1-\beta)^2(\beta - \mu M), \tag{6}$$

де $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}$.

Сформулюємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left[\frac{\lambda}{(1-v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \left[\frac{\lambda}{(1-w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$v^0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) = 0, \quad w^0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) = \beta. \tag{9}$$

Теорема 1. Якщо рівняння (6) має розв’язок $\beta \in (0; 1)$ і $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} < 1$, то крайова задача (1) – (2) має єдиний додатний розв’язок $u^*(\mathbf{x})$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (7) – (9).

Обчислювальний експеримент проведено для наступних значень параметрів:

$$h = 20 \text{ мкм},\ d = 1 \text{ мкм},\ R = 250 \text{ мкм},\ E = 169 \text{ ГПа},\ \nu = 0{,}3,$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}},\ \varepsilon = 1{,}005,\ P = 200 \text{ кПа},\ V = 200 \text{ В}. \qquad (10)$$

Знаходимо, що $\lambda = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3} = 5{,}61501$. Для функції Гріна (4) маємо, що $M = 0{,}0156249$. Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді $< 0, \beta >$, де β – визначається з рівності (6). Обчисливши отримуємо, що $\beta = 0{,}257909$. Тоді $\dfrac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} = 0{,}4294... < 1$, а отже, виконана умова збіжності ітераційного процесу відповідно до теореми 1.

Задаємо точність $\delta = 10^{-4}$ та проводимо ітераційний процес (7) – (9). Процес зійшовся із заданою точністю за п'ять ітерацій.

Задача (1) – (2) з зазначеними у (10) параметрами була чисельно розв'язана у [4, 5]. У [4] авторами було отримано максимальне відхилення пластини, що дорівнює 0,225 мкм. Авторами у [5] було отримано значення максимального відхилення пластини – 0,22639 мкм. При застосуванні методу двобічних наближень нами отримано, що максимальне відхилення пластини становить 0,21829 мкм. Бачимо, що отримане за допомогою методу двобічних наближень значення максимального відхилення пластини менше ніж отримані в [4, 5], але цілком узгоджується з ними. При застосуванні методу двобічних наближень було отримано значення похибки наближеного розв'язку, яке дорівнює $0{,}44 \cdot 10^{-4}$, а тому з такою точністю можемо стверджувати, що максимальне відхилення пластини дорівнює $0{,}21829$ мкм.

Список використаних джерел:

1. Koochi A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics : Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam : Elsevier, 2020. 270 p.

2. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1905. № 20. P. 97–135.

3. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 379 p.

4. Ahmad B., Pratap R. Elasto-electrostatic analysis of circular microplates used in capacitive micromachined ultrasonic transducers. *IEEE Sensors Journal.* 2010. № 10 (11). P. 1767–1773.

5. Mechanical behavior of a circular micro plate subjected to uniform hydrostatic and non-uniform electrostatic pressure / A. Nabian, G. Rezazadeh, M. Haddad-derafshi, A. Tahmasebi. *Microsystem Technologies*. 2008. № 14. P. 235–240.