

621.396(06)  
P15

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ им. М. К. ЯНГЕЛЯ

## РАДИОТЕХНИКА

---

Республиканский  
межведомственный  
научно-технический  
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 92

**2111**

Радиотехника

621.396(06)

P15



717949

НБ ХНУРЕ

1990

ХИГ

МНВ. № 717949

**КС**

ХАРЬКОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

1990

В сборнике рассмотрены проблемы электродинамики СВЧ применительно к созданию приборов и устройств этого диапазона. Изложены результаты исследований методов и устройств для измерений в сверхвысокочастотном и рентгеновском диапазонах. Освещены вопросы использования различных сигналов в радиоаппаратуре.

Для преподавателей, научных работников, специалистов.

Редакционная коллегия: д-р техн. наук проф. А. И. Терещенко (отв. ред.), канд. техн. наук проф. В. Д. Кукуш (зам. отв. ред.), канд. техн. наук доц. Ж. Ф. Пащенко (отв. секр.), д-р техн. наук проф. Ю. И. Волощук, д-р техн. наук проф. Б. Л. Кащеев, д-р физ.-мат. наук проф. В. М. Кузьмичев, канд. техн. наук доц. Е. М. Кулешов, д-р техн. наук проф. Н. Д. Колпаков, д-р физ.-мат. наук проф. О. А. Третьяков, д-р физ.-мат. наук проф. Н. А. Хижняк, д-р техн. наук проф. А. Г. Шейн, акад. АН УССР В. П. Шестопалов, д-р техн. наук проф. Я. С. Шифрин  
 Ответственный за выпуск канд. техн. наук Ж. Ф. Пащенко

Адрес редакционной коллегии: 310726 Харьков, пр. Ленина, 14, институт радиоэлектроники, тел. 40-93-66

Редакция научно-технической литературы  
 Зав. редакцией Л. А. Гаврилова

## СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

### РАДИОТЕХНИКА

#### В ы п у с к 92

Редактор В. В. Арнаутова  
 Художественный редактор Т. П. Короленко  
 Технический редактор Г. П. Александрова  
 Корректор Л. Н. Быкова

ИБ № 13217

Сдано в набор 19.02.90. Подписано в печать 04.10.90. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Усл. печ. л. 8. Усл. кр.-отт. 5,25. Уч.-изд. л. 10. Тираж 1000 экз. Изд. № 1840. Зак. 68. Цена 1,40 к.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете. 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003, ул. Университетская, 16. Зак. 1223.

СИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО  
ВИБРАТОРА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

В работе рассмотрена задача о симметричном возбуждении идеально проводящего вибратора, который расположен в однородном слое плоскостной среды компланарно границам раздела. Цель статьи — построение аналитических выражений для распределения тока вдоль проводника и для рассеянного поля.

Отнесем трехмерное пространство к прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Ось  $Oz$  направим вертикально вверх. Область  $V = \{-\infty < x, y < +\infty, b < z < a\}$ , которая имеет вид слоя толщиной  $h = a - b$  ( $a, b = \text{const}$ ), заполнена однородным изотропным магнетодиэлектриком. Область, дополняющая  $V$  до всего пространства, заполнена плоскостной одноосной средой с вертикальной оптической осью. Диадные материальные параметры совокупной среды имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(z) &= \mu_t(z) \hat{I}_t + \mu_z(z) \hat{I}_z, \hat{\epsilon}(z) = \epsilon_t(z) \hat{I}_t + \epsilon_z(z) \hat{I}_z; \\ \hat{I}_t &= \vec{x}_0 \vec{x}_0 + \vec{y}_0 \vec{y}_0; \hat{I}_z = \vec{z}_0 \vec{z}_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  — орты осей  $x, y, z$ ,  $\mu_{t,z}$  и  $\epsilon_{t,z}$  — кусочно-гладкие функции переменного  $z$ , которые на интервале  $b < z < a$  сводятся к постоянным  $\mu$  и  $\epsilon$ :  $\mu_{t,z}(z) = \mu$ ,  $\epsilon_{t,z}(z) = \epsilon$  ( $b < z < a$ ).

Заданные сторонние источники порождают в такой среде монохроматическое ( $e^{-i\omega t}$ ) поле  $\vec{E}_0(\vec{R}), \vec{H}_0(\vec{R})$ , которое считается известным,  $\vec{R} = (x, y, z)$ .

Внесем в область  $V$  проволочный вибратор в виде идеально проводящего отрезка кругового цилиндра длиной  $2l$  и диаметром  $2r_e$ . Примем, что ось вращения вибратора лежит в плоскости  $xOz$  параллельно плоскости  $xOy$ , а торцы симметричны относительно плоскости  $yOz$ . Его внутренность определяется условиями  $y^2 + (z - z_c)^2 \leq r_e^2$ ,  $-l < x < l$ . Здесь  $z_c$  — вертикальная координата точки  $(0, 0, z_c)$ , в которой ось вибратора пересекает плоскость  $yOz$ .

Считаем, что вибратор не пересекает область локализации сторонних источников. Создаваемое ими поле в присутствии вибратора представим как сумму первичного поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  и рассеянного поля  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ , ограничимся случаем длинного и тонкого вибратора:  $r_e \ll l, |kr_e| \ll 1$ , где  $k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$ ,  $0 \leq \arg V < \pi$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме. Известные величины  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$  в этом случае можно рас-

смагивать как поле отрезка  $\{-l < x < l, y = 0, z = z_c\}$  нити электрического тока  $I(x)$ , текущего вдоль оси  $x$ .

Расчет поля, создаваемого в регулярной среде, в отсутствии вибратора, электрическим источником с объемной плотностью  $\vec{J}(\vec{R}) = x_0 \delta(y) \delta(z - z_c) I(x)$ , проводим с привлечением полевых функций Грина слоистой среды [1; 2].

Введем в рассмотрение функции  $\varphi_e^+(z, \kappa)$ ,  $\varphi_\mu^+(z, \kappa)$ ,  $(\varphi_e^-(z, \kappa)$ ,  $\varphi_\mu^-(z, \kappa))$  как решения уравнения

$$[D_\eta + k_\eta^2(z) - \kappa^2] U(z) = 0, \quad (\eta = \mu, \varepsilon) \quad (2)$$

на интервале  $a < z < +\infty$  ( $-\infty < z < b$ ), которые в точках разрыва коэффициентов этого уравнения непрерывны вместе с величиной  $\eta_t^{-1}(z) \dot{U}(z)$ , а при  $z \rightarrow +\infty$  ( $z \rightarrow -\infty$ ) изображают уходящую волну. Здесь  $\dot{U}(z)$  — производная функции  $U(z)$  по переменной  $z$ ,  $\kappa$  — параметр, в общем случае комплексный,  $k_{\mu, \varepsilon}$  — локальные волновые числа,  $D_{\mu, \varepsilon}$  — дифференциальные операторы:

$$k_\varepsilon^2 \equiv k_0^2 \varepsilon_2 \mu_t, \quad k_\mu^2 \equiv k_0^2 \mu_2 \varepsilon_t, \quad D_\eta \equiv \eta_2 \partial_z \eta_t^{-1} \partial_z. \quad (3)$$

Определим следующие вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon(a, \kappa) &= \frac{1}{ik_0 \varepsilon_t(a+0)} \frac{\varphi_e^+(a+0, \kappa)}{\varphi_e^+(a+0, \kappa)}, \\ \zeta_\varepsilon(b, \kappa) &= -\frac{1}{ik_0 \varepsilon_t(b-0)} \frac{\varphi_e^-(b-0, \kappa)}{\varphi_e^-(b-0, \kappa)}, \\ \zeta_\mu(a, \kappa) &= ik_0 \mu_t(a+0) \frac{\varphi_\mu^+(a+0, \kappa)}{\varphi_\mu^+(a+0, \kappa)}, \\ \zeta_\mu(b, \kappa) &= -ik_0 \mu_t(b-0) \frac{\varphi_\mu^-(b-0, \kappa)}{\varphi_\mu^-(b-0, \kappa)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты  $\zeta_\varepsilon(a, \kappa)$ ,  $\zeta_\varepsilon(b, \kappa)$  представляют собой импеданс, а  $\zeta_\mu(a, \kappa)$ ,  $\zeta_\mu(b, \kappa)$  — адмитанс границы  $z = a$  или  $z = b$  соответственно. Введем в рассмотрение коэффициенты отражения плоской волны вертикальной ( $R_\varepsilon$ ) или горизонтальной ( $R_\mu$ ) поляризации, падающей из однородной среды с материальными параметрами слоя на границу  $z = a$  или  $z = b$  под углом скольжения  $\theta = \arccos(\kappa/k)$ :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(a, \kappa) &= \frac{\gamma(\kappa) - k_0 \varepsilon \zeta_\varepsilon(a, \kappa)}{\gamma(\kappa) + k_0 \varepsilon \zeta_\varepsilon(a, \kappa)}; \quad R_\varepsilon(b, \kappa) = \frac{\gamma(\kappa) - k_0 \varepsilon \zeta_\varepsilon(b, \kappa)}{\gamma(\kappa) + k_0 \varepsilon \zeta_\varepsilon(b, \kappa)}; \\ R_\mu(a, \kappa) &= \frac{\gamma(\kappa) \zeta_\mu(a, \kappa) - k_0 \mu}{\gamma(\kappa) \zeta_\mu(a, \kappa) + k_0 \mu}; \quad R_\mu(b, \kappa) = \frac{\gamma(\kappa) \zeta_\mu(b, \kappa) - k_0 \mu}{\gamma(\kappa) \zeta_\mu(b, \kappa) + k_0 \mu}; \\ \gamma(\kappa) &= \sqrt{k^2 - \kappa^2}, \quad 0 \leq \arg \gamma(\kappa) < \pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Применив к рассматриваемой модели среды результаты [1], приходим к следующим выражениям для поля нитевидного тока:

$$\vec{E}_s(\vec{R}) = -\frac{4\pi}{i\omega} \left[ k_0^2 \vec{j} + \nabla \frac{1}{\varepsilon_t(z)} \left( \frac{\nabla_t}{\mu_z(z)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\vec{z}_0}{\mu_t(z)} \right) \right] \cdot \int_{-l}^l \vec{A}l(x') dx'; \quad (6)$$

$$\vec{H}_s(\vec{R}) = (4\pi/c) \hat{\mu}^{-1}(z) \cdot \nabla \times \int_{-l}^l \vec{A}l(x') dx', \quad -\infty < x, y, z < +\infty.$$

В этих формулах  $\vec{A} \equiv \vec{A}(z, y, x - x')$ ,  $\hat{\mu}^{-1}$  — диада, обратная к  $\hat{\mu}$ ,  $\nabla_t$  — горизонтальная компонента оператора  $\nabla$ .  $\vec{l}$  — единичная диада:  $\nabla_t = \vec{x}_0 \partial_x + \vec{y}_0 \partial_y$ ,  $\vec{l} = \vec{l}_t + \vec{l}_z$ . Величина  $\vec{A}(z, y, x - x')$  совпадает с векторным потенциалом единичного электрического диполя, расположенного в точке  $(x', 0, z_c)$  параллельно оси  $x$ . Когда точка наблюдения  $(x, y, z)$  находится вне однородного слоя  $V$ , вектор  $\vec{A}$  запишется как

$$\begin{aligned} \vec{A}(z, y, x - x') = & -(1/4\pi) \int_0^{+\infty} \kappa \exp(i\gamma h) \{ \mu [x_0 \vec{J}_0 + \\ & + \vec{z}_0(x - x') (J_1/\kappa D) \partial_z] F_\mu(z, \kappa) / i \Delta_\mu \gamma + \\ & + \vec{z}_0(x - x') \mu_t(z) (J_1/\kappa D) F_\varepsilon(z, \kappa) / \Delta_\varepsilon(\kappa) \} d\kappa. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $z > a$  либо  $z < b$ ,  $\gamma \equiv \gamma(\kappa)$ ,  $J_{0,1}$  — функции Бесселя:  $J_{0,1} \equiv J_{0,1}(\kappa D)$ ,  $D = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$ ,

$$F_\eta(z, \kappa) = \begin{cases} \varphi_\eta^+(z, \kappa) [1 + R_\eta(a, \kappa)] [R_\eta(b, \kappa) e^{i\gamma(z_c - b)} + \\ + e^{-i\gamma(z_c - b)}] / \varphi_\eta^+(a + 0, \kappa), & a < z < +\infty; \\ \varphi_\eta^-(z, \kappa) [1 + R_\eta(b, \kappa)] [e^{i\gamma(z_c - a)} - \\ - R_\eta(a, \kappa) e^{-i\gamma(z_c - a)}] / \varphi_\eta^-(b - 0, \kappa), & -\infty < z < b; \end{cases} \quad (8)$$

знак «-» при  $\eta = \varepsilon$ , «+» при  $\eta = \mu$ ;

$$\Delta_\eta \equiv \Delta_\eta(\kappa) = 1 - \exp(2i\gamma h) R_\eta(a, \kappa) R_\eta(b, \kappa), \quad (\eta = \varepsilon, \mu). \quad (9)$$

Когда точка наблюдения находится внутри однородного слоя, величину  $\vec{A}$  можно представить как сумму двух слагаемых, первое из которых равно векторному потенциалу точечного источника в безграничной среде с материальными параметрами слоя, а второе учитывает наличие границ  $z = a$  и  $z = b$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}(z, y, x - x') = & \vec{x}_0 \frac{\mu \exp(ik|\vec{R} - \vec{R}'|)}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|} + \vec{\pi}(z, y, x - x'), \\ & b < z < a, \quad \vec{R}' = (x', 0, z_c). \end{aligned} \quad (10)$$

Вектор-функции  $\vec{\pi}$  имеет вид

$$\vec{\pi}(z, y, x - x') = (\mu/4\pi) \int_0^{+\infty} d\kappa \left[ \vec{x}_0 i \kappa \rho_\mu(z, \kappa) J_0(\kappa D) / \gamma \Delta_\mu - \vec{z}_0 (x - x') \left( \frac{q_e(z, \kappa)}{\Delta_e} + \frac{r_\mu(z, \kappa)}{\Delta_\mu} \right) \frac{J_1(\kappa D)}{D} \right], \quad (11)$$

$$\rho_\mu(z, \kappa) = R_\mu(b, \kappa) e^{i\gamma(z-2b)} [e^{i\gamma z_c} + R_\mu(a, \kappa) e^{i\gamma(2a-z_c)}] + R_\mu(a, \kappa) e^{i\gamma(2a-z)} [e^{-i\gamma z_c} + R_\mu(b, \kappa) e^{i\gamma(z_c-2b)}], \quad (12)$$

$$q_e(z, \kappa) = R_e(b, \kappa) e^{i\gamma(z-2b)} [e^{i\gamma z_c} - R_e(a, \kappa) e^{i\gamma(2a-z_c)}] + R_e(a, \kappa) e^{i\gamma(2a-z)} [R_e(b, \kappa) e^{i\gamma(z_c-2b)} - e^{-i\gamma z_c}].$$

Величина  $z_\mu(z, \kappa)$  получается из  $q_e(z, \kappa)$  заменой  $R_e \rightarrow -R_\mu$ . Считается, что полюса подынтегральных выражений в (7), (11), которые совпадают с нулями функций  $\Delta_\mu(\kappa)$ ,  $\Delta_e(\kappa)$ , смещены с контура интегрирования в комплексную плоскость переменного  $\kappa$  за счет диссипативных потерь в среде (возможно, исчезающе малых). Величины, содержащиеся в знаменателе  $\Delta_e$  или  $\Delta_\mu$ , определяют соответственно вертикально и горизонтально поляризованные компоненты электромагнитного поля (6).

Для того чтобы выражения (6) представляли собой искомое рассеянное поле, необходимо и достаточно, чтобы компонента суммарного электрического поля  $\vec{E}_0 + \vec{E}_s$ , касательная к поверхности вибратора, обращалась на этой поверхности в нуль. Приняв во внимание только условие для продольной (вдоль  $\vec{x}_0$ ) компоненты на боковой поверхности вибратора, получаем уравнение типа Поклингтона относительно  $I(x)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l dx' [K_f(x-x') + K_r(x-x')] I(x') + \frac{d}{dx} \int_{-l}^l dx' L(x-x') I(x') = i \omega \epsilon E_0(x), \quad -l < x < l. \quad (13)$$

В этом уравнении  $E_0(x) = \vec{x}_0 \cdot \vec{E}_0(\vec{R})$  при  $\vec{R} = (x, r_e, z_c)$

$$K_f(x-x') = \exp(ikD_s)/D_s, \quad D_s = \sqrt{(x-x')^2 + r_e^2},$$

$$K_r(x-x') = i \int_0^{+\infty} \kappa \rho_\mu(z_c, \kappa) J_0(\kappa D_s) d\kappa / \gamma \Delta_\mu;$$

$$L(x-x') = -(x-x') \frac{d}{dz} \Big|_{z=z_c} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{q_e(z, \kappa)}{\Delta_e} + \frac{r_\mu(z, \kappa)}{\Delta_\mu} \right] \frac{J_1(\kappa D_s)}{D_s} d\kappa. \quad (14)$$

Обратив дифференциальный оператор  $(d^2/dx^2 + k^2)$  в левой части (13), приходим к уравнению типа Халлена для  $I(x)$ :

$$\int_{-l}^l dx' K_f(x-x') I(x') = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + Q(x) + \varphi(x|I). \quad (15)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные,  $\varphi(x|I)$  — зависящий от  $x$  функционал тока

$$\begin{aligned} \varphi(x|I) \equiv & \int_{-l}^l dx' I(x') [K_f(x-x') + \\ & + \int_{-l}^l dx'' \frac{\sin k|x-x''|}{2k} \frac{d}{dx''} L(x''-x')]; \\ Q(x) = & (i\omega\epsilon/2k) \int_{-l}^l dx' \sin k|x-x'| E_0(x'). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя стандартное приближение [3], основанное на выделении статистической части ядра  $K_f(x-x')$ , перейдем от (15) к уравнению с малым параметром в правой части:

$$I(x) = \alpha [C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + Q(x) - F(x|I)], \quad (17)$$

где  $F(x|I)$  — зависящий от  $x$  функционал тока, а  $\alpha$  — малый параметр теории вибраторов:

$$\begin{aligned} F(x|I) \equiv & \varphi(x|I) + \int_{-l}^l dx' [K_l(x-x') I(x') - g(x-x') I(x)], \\ g(x-x') = & 1/D_s, \quad \alpha = 1/[2 \ln(2la^{-1})]. \end{aligned} \quad (18)$$

Дополнив (17) условием исчезновения тока на концах вибратора:  $I(l) = I(-l) = 0$ ; получаем задачу для неизвестной величины  $I(x)$ . Найдем ее решение в частном случае симметричного возбуждения:  $E_0(-x) \equiv E_0(x)$ . В этом случае  $I(x)$  — четная функция, что влечет за собой равенство  $C_2 = 0$ .

Для построения решения воспользуемся модифицированным методом итераций [3]. Вычтем из правой части (17) ее значение при  $x = l$ , равное нулю. В результате имеем

$$I(x) = \alpha [C_1 f(x) + Q_d(x) - F_d(x|I)]; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f(x) = & \cos kx - \cos kl, \quad Q_d(x) = Q(x) - Q(l), \\ F_d(x|I) \equiv & F(x|I) - F(l|I). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставим в (19) формальное асимптотическое решение, отвечающее методу итераций:

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} [C_1 P_n(x) + Q_n(x)]. \quad (21)$$

Это приводит к цепочке прямых формул для  $P_n(x)$ ,  $Q_n(x)$ :

$$\begin{aligned} P_0(x) = & f(x), \quad Q_0(x) = Q_d(x); \\ P_n(x) = & -F_d(x|P_{n-1}), \quad Q_n(x) = -F_d(x|Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Постоянную  $C_1$  находим подстановкой (21) в уравнение  $I(l) = C_1 \cos kl + Q(l) - F(l|l) = 0$ . Итоговое выражение для тока следующее:

$$I(x) = \alpha \frac{v_0(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} \beta_n(x)}{\cos kl - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} F(l|P_n)}; \quad (23)$$

$$\beta_n(x) = v_{n+1}(x) + \rho_n(x);$$

$$v_n(x) = Q_n(x) \cos kl - Q(l) P_n(x); \quad (24)$$

$$\rho_n(x) = \sum_{m=0}^n [F(l|Q_m) P_{n-m}(x) - F(l|P_m) Q_{n-m}(x)];$$

$$v_0(x) = Q(x) \cos kl - Q(l) \cos kx;$$

$$\beta_0(x) = F(x|f) Q(l) - F(x|Q_d) \cos kl + F(l|Q_d) \cos kx - F(l|f) Q(x).$$

Отсюда вытекает приближенная формула для тока

$$I(x) = \alpha v(x) / \Delta; \quad (25)$$

$$v(x) \equiv v_0(x) = \frac{ik_0 c e}{2k} \left[ \sin k(x-l) \int_{-l}^x dx' E_0(x') \cos kx' - \right. \\ \left. - \sin k(x+l) \int_x^l dx' E_0(x') \cos kx' + \right. \\ \left. + 2 \cos kl \cos kx \int_x^l dx' E_0(x') \sin kx' \right]; \quad (26)$$

$$\Delta \equiv \cos kl - \alpha F(l|f), \quad f \equiv f(x). \quad (27)$$

Заметим, что для функции  $v(x)$ , равной нулю при  $x = l$ , величина  $F(l|v)$  определяется выражением

$$F(l|v) \equiv \int_{-l}^l dx' v(x') [K_f(l-x') + K_r(l-x') + \\ + \int_{-l}^l dx'' \frac{\sin k(l-x'')}{2k} \frac{d}{dx''} L(x''-x')]. \quad (28)$$

Формулы (23), (25) описывают как резонансное, так и нерезонансное возбуждение. Собственные режимы при симметричном возбуждении определяются уравнением  $\Delta = \cos kl - \alpha F(l|f) = 0$ . Положим  $kl = \pi(n + 1/2) + \delta_n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\delta_n$  — малая величина. Для  $\delta_n$  получаем приближенное соотношение:

$$\delta_n = \alpha (-1)^{n+1} F(l|\cos ks) |_{kl=\pi(n+1/2)}. \quad (29)$$

Величина  $\delta_n$  оказывается комплексной. Собственные частоты открытых структур лежат в полуплоскости  $\text{Im } \omega < 0$ , поэтому должно выполняться неравенство  $\text{Im } \delta_n < 0$ .

Рассмотрим случай, когда вибратор возбуждается а) дельта-генератором напряжения, приложенным к его середине:  $E_0(x) = V_0 \delta(x)$ , б) первичным полем, равномерно распределенным вдоль вибратора:  $E_0(x) = E_0 = \text{const}$ . Функция  $v(x)$  соответственно этим случаям имеет вид

$$v(x) = -\frac{ick_0 \varepsilon}{2k} V_0 \sin k(l - |x|), \quad v(x) = \frac{ick_0 \varepsilon}{k^2} E_0 (\cos kl - \cos kx). \quad (30)$$

Значения величин  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$  в любой точке пространства можно рассчитать по формулам (6). Приведем выражения для них в точке, проекция которой на плоскость  $z = z_c$  лежит во фраунгоферовой зоне вибратора. Последующие соотношения пригодны равным образом для диссипативной и недиссипативной сред.

Обозначим через  $\kappa_{\eta m}$   $m$ -й корень уравнения  $\Delta_\eta(\kappa) = 0$ , расположенный на положительной части вещественной оси или в области  $\text{Im } \kappa > 0$ . Здесь  $m = 1, 2, \dots, M_\eta$ ,  $M_\eta$  — общее количество указанных корней,  $\eta = \varepsilon, \mu$ . Для каждого  $\kappa_{\eta m}$  введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_{\eta m}(z) = \begin{cases} [1 + R_\eta(a, \kappa)] \varphi_\eta^+(z, \kappa) \varphi_\eta^+(a + 0, \kappa), & a < z < +\infty; \\ \exp[i\gamma(z - a)] + R_\eta(a, \kappa) \exp[i\gamma(a - z)], & b < z < a; \\ \exp(-i\gamma b) [1 + R_\eta(b, \kappa)] \varphi_\eta^-(z, \kappa) / R_\eta(b, \kappa) \varphi_\eta^- \times & \\ \times (b - 0, \kappa). & \\ -\infty < z < b; \kappa = \kappa_{\eta m}. & \end{cases} \quad (31)$$

Она служит решением уравнения (2) при  $\kappa = \kappa_{\eta m}$  на интервале  $-\infty < z < +\infty$ , непрерывна вместе с величиной  $\eta_z^{-1}(z) \partial_z \Phi_{\eta m}(z)$  в точках разрыва коэффициентов этого уравнения, а при  $z \rightarrow +\infty$  и  $z \rightarrow -\infty$  изображает уходящую волну. Величина  $\kappa_{\eta m}^2$  является собственным значением дискретного спектра соответствующей задачи, а  $\Phi_{\eta m}$  — ее собственной функцией [2]. Имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \Phi_{\eta m}(z) \Phi_{\eta k}(z) / \eta_z(z) = \delta_{mk} N_{\eta m}^2. \quad (32)$$

Здесь  $\delta_{mk}$  — символ Кронекера,  $N_{\eta m}$  — нормировочный коэффициент:

$$N_{\eta m}^2 = K_{\eta m} R_\eta(a, \kappa_{\eta m}) / \eta_{\kappa_{\eta m}}, \\ K_{\eta m} = 2h\kappa_{\eta m} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \kappa} \ln [R_\eta(a, \kappa) R_\eta(b, \kappa)] \Big|_{\kappa = \kappa_{\eta m}}. \quad (33)$$

Пусть  $\vec{n} = (n_x, n_y, 0)$  — некоторый вектор, в общем случае комплексный, нормированный условием  $n_x^2 + n_y^2 = 1$ . Для каждого корня  $\kappa_{em}$  определим векторы-функции

$$\begin{aligned}\vec{E}_{em}(\vec{n}, z) &= \frac{1}{k_0} \left[ \frac{z_0 \kappa_{em}}{\varepsilon_z(z)} + \frac{i n}{\varepsilon_t(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi_{em}(z), \\ \vec{H}_{em}(\vec{n}, z) &= -\vec{z}_0 \times \vec{n} \Phi_{em}(z).\end{aligned}\quad (34)$$

Каждому корню  $\kappa_{\mu m}$  поставим в соответствие функции

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\mu m}(\vec{n}, z) &= \vec{z}_0 \times \vec{n} \Phi_{\mu m}(z); \\ \vec{H}_{\mu m}(\vec{n}, z) &= \frac{1}{k_0} \left[ \frac{z_0 \kappa_{\mu m}}{\mu_z(z)} + \frac{i n}{\mu_t(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Phi_{\mu m}(z).\end{aligned}\quad (35)$$

Нетрудно проверить, что величины

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{R}) &= \vec{E}_{\eta m}(\vec{n}, z) \exp(i \kappa_{\eta m} \vec{n} \cdot \vec{r}), \\ \vec{H}(\vec{R}) &= \vec{H}_{\eta m}(\vec{n}, z) \exp(i \kappa_{\eta m} \vec{n} \cdot \vec{r})\end{aligned}\quad (36)$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{R}) - ik_0 \hat{\mu}(z) \cdot \vec{H}(\vec{R}) = 0, \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{R}) + ik_0 \hat{\varepsilon}(z) \cdot \vec{E}(\vec{R}) = 0, \quad (37)$$

во всем пространстве  $-\infty < x, y, z < +\infty$  подчиняются условию непрерывности горизонтальных компонент на границах раздела слоистой среды и условиям излучения при  $z \rightarrow +\infty$  и  $z \rightarrow -\infty$ . Поле вида (36) представляет собой собственную волну дискретного спектра слоистой среды вертикальной ( $\eta = \varepsilon$ ) или горизонтальной ( $\eta = \mu$ ) поляризации, которая распространяется в направлении единичного вектора  $\vec{n}$  [2]. Приведем следующие соотношения ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \vec{E}_{\eta m}(\vec{n}, z) \times \vec{H}_{\eta' m}(\vec{n}', z) \cdot \vec{n} = (\kappa_{\eta m} / k_0) \delta_{mk} \delta_{\eta \eta'} N_{\eta m}^2, \quad (38)$$

где  $\delta_{\eta \eta'} = 1$  или 0 при  $\eta = \eta'$  или  $\eta \neq \eta'$  соответственно.

Запишем искомое представление рассеянного поля во фраунгоферовой зоне вибратора, определенной требованиями  $|\kappa_{\eta m} l / r^2| \ll 1$  для всех  $\eta, m$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}_s(\vec{R}) &= \frac{k_0}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sum_{\eta=\varepsilon, \mu} \sum_{m=1}^{M_\eta} \frac{e^{i(\kappa_{\eta m} r - \pi/4)}}{N_{\eta m}^2 \sqrt{\kappa_{\eta m}}} q_{\eta m}(\varphi) \frac{\vec{E}_{\eta m}(\vec{n}_s, z)}{\vec{H}_{\eta m}(\vec{n}_s, z)}; \quad (39)\end{aligned}$$

$$q_{em}(\varphi) = \dot{\Phi}_{em}(z_c) \frac{i \cos \varphi}{k_0 \varepsilon} \int_{-l}^l dx' e^{-ix' \kappa_{em} \cos \varphi} I(x'); \quad (40)$$

$$q_{\mu m}(\varphi) = \sin \varphi \Phi_{\mu m}(z_c) \int_{-l}^l dx' e^{-ix' \kappa_{\mu m} \cos \varphi} I(x').$$

В этих формулах проводится суммирование по всем собственным волновым числам дискретного спектра и обеим поляризациям; единичный вектор  $\vec{n}_s$  направлен по горизонтали из центра вибратора в точку наблюдения,  $\varphi$  — азимутальный угол указанного направления:  $\vec{n}_s = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ ,  $\cos\varphi = x/r$ ,  $\sin\varphi = y/r$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Из приведенных формул видно, что в дальней зоне вертикально поляризованная компонента излучения вибратора исчезает в направлениях  $\varphi = \pi/2$ ,  $\varphi = 3\pi/2$ , а горизонтально поляризованная — в направлениях  $\varphi = 0, \pi$ .

Список литературы: 1. Жук Н. П., Третьяков О. А. Функции Грина уравнений Максвелла в плоскостных средах // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. № 5. С. 869—875. 2. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн: Пер. с англ. М., 1978. 1109 с. 3. Коротковолновые антенны / Г. З. Айзенберг, С. П. Белоусов, Э. М. Журбенко и др. М., 1985. 535 с.

Поступила в редколлегию 27.09.88

УДК 621.317

Н. Н. ГОРОБЕЦ, д-р физ.-мат. наук, Ю. И. ДАВИДЧЕВСКИЙ, канд. техн. наук,  
В. И. ЧЕБОТАРЕВ, канд. физ.-мат. наук

### ИНВАРИАНТНОСТЬ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕКТОРНЫХ СИГНАЛОВ

Анализ сигналов с вращающейся поляризацией и их поляриметрических возможностей [1—4] требуют выяснения для ряда задач целесообразной базисной формы как векторных сигналов, так и векторных передаточных характеристик (ВПХ), свойственных электродинамическим объектам.

Рассмотрена методология экспериментального определения ВПХ для задач, характеризующихся недостаточной априорной информацией об азимутальной (в ТЕМ-плоскостях волны) ориентации векторных сигналов по отношению к системе координат исследуемого электродинамического объекта. Наиболее простым примером такой задачи представляется обычное (снеллевское) отражение от плоской поверхности материала (среды) в свободном пространстве. Рассмотрим далее связь двух векторных (в ТЕМ-плоскостях волны) сигналов:  $\vec{E}_n(t) = \vec{E}_n$  на входе и  $\vec{E}_t(t) = \vec{E}_t$  на выходе электродинамического (линейного недеполяризующего) объекта. Такая связь имеет спектральную форму известного операторного преобразования, например преобразования Джонса [5]:  $\vec{S}_t = T\vec{S}_n$ , (1), где  $\vec{S}_n$ ,  $\vec{S}_t$  — спектральные вектор-матрицы базисных компонент векторных сигналов  $\vec{E}_n$  и  $\vec{E}_t$  (спектральные векторы Джонса);  $T$  — матрица Джонса, являющаяся ВПХ исследуемого объекта. Матрица  $T$  связывает спектры совпадающих и перекрестных компонент векторных сигналов  $\vec{E}_n$  и  $\vec{E}_t$ ;

$$S_{tu} = T_{uu} S_{nu} + T_{uv} S_{nv}; \quad S_{tv} = T_{vu} S_{nu} + T_{vv} S_{nv}. \quad (2)$$

Здесь  $S_{tu}, S_{tv}, S_{pu}, S_{pv}$  — комплексные спектры соответствующих базисных компонент сигналов:  $\vec{E} = \vec{E}_u + \vec{E}_v$ . (3). Отметим, что матрица  $T$  — квадратная, неэнергетическая:

$$T = \begin{bmatrix} T_{uu} & T_{uv} \\ T_{vu} & T_{vv} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Спектральные векторы Джонса имеют вид

$$\vec{S}_n = [S_{nu} \ S_{nv}], \quad \vec{S}_t = \begin{bmatrix} S_{tu} \\ S_{tv} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В преобразованиях (1), (2) предполагается, что векторные сигналы на входе и выходе объекта записаны в его координатах:  $u = x_0, v = y_0$ . В этом случае нетрудно определить экспериментально компоненты ВПХ — элементы матрицы  $T$ , используя спектры известных сигналов  $\vec{E}_{n1}, \vec{E}_{n2}$ , а также измерив спектры сигналов отклика  $\vec{E}_{t1}, \vec{E}_{t2}$ . Тогда из формы (2) получим две пары систем линейных уравнений относительно элементов (компонент) ВПХ вида (4).

Сложнее получается, если сигналы на входе и выходе объекта выражены в своих координатах, определяемых осями  $\vec{x}_n^0, \vec{y}_n^0$  и  $\vec{x}_t^0, \vec{y}_t^0$  соответственно и не совпадающих с осями объекта (в ТЕМ-плоскостях волны). Матричное преобразование Джонса содержит в этой задаче два оператора азимутального поворота  $A_\alpha, A_\beta$ :

$$\vec{S}_{ty} = A_\beta T A_\alpha \vec{S}_n = \Pi \vec{S}_n, \quad (6)$$

где  $\Pi$  — матрица преобразования с рассогласованными азимутами;  $\Pi = A_\beta T A_\alpha$  (7);  $A_\alpha$  — оператор на входе объекта (падающей волны),  $A_\beta$  — на выходе (рассеянной, прошедшей волны);  $\gamma = \alpha, \beta$ .

Рассмотрим далее два базисных выражения для сигналов падающей и рассеянной волн (3), представленных, во-первых, в линейно поляризованном ортогональном базисе:

$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ , (8), где  $u = x, v = y$ , во-вторых, в кругополяризованном базисе:  $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_L$  (9), где  $u = R; v = L$ .

В линейно поляризованном базисе вида (8) операторы  $A_\alpha, A_\beta$  имеют форму матриц поворота [5]:

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Здесь  $\gamma = \alpha, \beta$ .

Развернув матрицу (7) с учетом матриц поворота, получим

$$S_{tyx} = \Pi_{xx} S_{nx} + \Pi_{xy} S_{ny}; \quad S_{tyy} = \Pi_{yx} S_{nx} + \Pi_{yy} S_{ny}, \quad (11)$$

где

$\Pi_{xx} = T_{xx} \cos \alpha \cos \beta - T_{xy} \sin \alpha \cos \beta + T_{yx} \cos \alpha \sin \beta - T_{yy} \sin \alpha \sin \beta$ ;

$\Pi_{xy} = T_{xx} \sin \alpha \cos \beta + T_{xy} \cos \alpha \cos \beta + T_{yx} \sin \alpha \sin \beta + T_{yy} \cos \alpha \sin \beta$ ;

$$\Pi_{yx} = -T_{xx} \cos \alpha \sin \beta + T_{xy} \sin \alpha \sin \beta + T_{yx} \cos \alpha \cos \beta - T_{yy} \sin \alpha \cos \beta;$$

$$\begin{aligned} \Pi_{yy} = & -T_{xx} \sin \alpha \sin \beta - T_{xy} \cos \alpha \sin \beta + \\ & + T_{yx} \sin \alpha \cos \beta + T_{yy} \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из (12), при  $\alpha = \beta = 0$  передаточная характеристика вида  $\Pi$  переходит в  $T$ . Прежним методом (двух различных векторных сигналов) определить ВПХ исследуемой системы невозможно. Однако из преобразования (11) можно получить линейную систему уравнений для вычисления элементов ВПХ исследуемого объекта. Составим из (11) и (12) такую систему уравнений с восемью неизвестными:

$$S_{\text{тук}} = S_{\text{пхк}} \sum_{r=1}^4 z_r + S_{\text{пук}} \sum_{n=5}^8 z_n, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\text{тук}} &= S_{\text{тукк}} + S_{\text{тукл}}; \\ z_1 &= T_{xx} G \cos \alpha, \quad z_5 = T_{xx} G \sin \alpha; \\ z_2 &= -T_{xy} G \sin \alpha, \quad z_6 = T_{xy} G \cos \alpha; \\ z_3 &= T_{yx} H \cos \alpha, \quad z_7 = T_{yx} H \sin \alpha; \\ z_4 &= -T_{yy} H \sin \alpha; \\ z_8 &= T_{yy} H \cos \alpha; \\ G &= \cos \beta - \sin \beta, \quad H = \sin \beta + \cos \beta, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, 8. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения этой системы требуется уже восемь различных зондирующих сигналов, восемь сигналов отклика (восемь пар  $\vec{E}_{\text{пк}}$  и  $\vec{E}_{\text{тк}}$ ,  $k = 1 - 8$ ). Определители системы получаются громоздкими —  $8 \times 8$ . Однако из ее решений можно вычислить и компоненты ВПХ объекта и ориентацию сигналов — углы  $\alpha$  и  $\beta$ .

Более привлекательным представляется кругополяризованный базис векторных сигналов вида (9). Его использование основано на ряде методологических положений [1; 4; 6].

Векторный сигнал  $\vec{E}$  записывается адекватной моделью комплексного сигнала  $\dot{E}$ . При этом орты ТЕМ-плоскости волны  $\vec{x}^0, \vec{y}^0$  отождествляются с ортами комплексно-сигнальной плоскости 1,  $j$ :

$$\vec{x}^0 E_x + \vec{y}^0 E_y = \vec{E} \equiv \dot{E} = E_x + j E_y. \quad (16)$$

Здесь

$$\vec{x}^0 \equiv 1; \quad \vec{y}^0 \equiv j; \quad (17)$$

$E_x, E_y$  — действительные функции времени.

Спектром векторного сигнала  $\vec{E} \equiv \vec{E}(t)$  служит спектр (Фурье-преобразование) тождественного комплексного сигнала  $\dot{E} = \dot{E}(t)$ . Выразим это соответствием

$$\dot{S}(\vec{E}) = \dot{S}(\dot{E} \equiv \dot{E}) = \dot{S}_m(\omega), \quad (18)$$

в котором  $\dot{S}_m(\omega)$  трактуется как комплексный спектр векторных амплитуд кругополяризованных векторных гармоник, записанных в комплексной форме. Спектр  $\dot{S}_m(\omega)$  называют «двусторонним спектром» —

спектром по частоте кругового вращения  $\omega$ :  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  (19), где  $\omega > 0 \rightarrow \omega = 2\pi f$ ;  $\omega < 0 \rightarrow \omega = -2\pi f$ ;  $\rightarrow$  символ соответствия;  $f$  — частота колебаний (односторонняя)  $-0 \leq f \leq \infty$ . Знак  $\pm |\omega|$ , как известно, определяется направлением отсчета угла вращения векторной гармоники  $\vec{E}_R$  или  $\vec{E}_L$  в репере  $\vec{x}^0, \vec{y}^0$ .

Для векторных сигналов  $\vec{E} = \vec{E}(t)$  существует, по крайней мере, два вида комплексных спектров. Один — по частоте кругового вращения —  $\dot{S}_m(\omega)$  — комплексный спектр векторных амплитуд (18), например, связанный с рядом Фурье (в комплексной форме) для периодических сигналов:

$$\vec{E} \equiv \dot{E} = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (20)$$

где  $\dot{F}_n = \dot{S}_m(\omega)$  из (18). Второй спектр — спектр комплексных амплитуд кругополяризованных векторных гармоник по частоте колебаний —  $S(f)$ :

$$S(f) = S_L(f) \cup S_R(f) \quad (21)$$

( $\cup$  — знак объединения).

Связь между комплексными амплитудами (символического метода комплексных амплитуд) и векторными амплитудами (18) известна [6]:

$$S_R(f) = \dot{S}_{mR}(\omega) = \dot{S}_m(\omega > 0); \quad S_L(f) = \dot{S}_{mL}(\omega) = \dot{S}_m(\omega < 0). \quad (22)$$

Это следует из соотношений линейно- и кругополяризованного базиса:

$$S_R = 1/2(S_x + jS_y); \quad S_L = 1/2(S_x - jS_y). \quad (23)$$

Введение комплексных амплитуд кругополяризованных гармоник позволяет использовать спектральную матрицу Джонса — ВПХ исследуемого объекта для спектральных векторов Джонса, выраженных кругополяризованным базисом:  $\bar{S}_{\tau c} = C \bar{S}_{\tau c}$ , (24), где  $\bar{S}_c$  — спектральные векторы Джонса, выраженные кругополяризованным базисом

$$\bar{S}_c = \begin{bmatrix} S_R \\ S_L \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$C$  — ВПХ по кругополяризованному базису,

$$C = \begin{bmatrix} C_{RR} & C_{RL} \\ C_{LR} & C_{LL} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Запись векторных сигналов, смещенных по азимуту на входе и выходе исследуемой системы, в тождественной комплексно-сигнальной форме описывается оператором

$$A_\gamma \equiv \dot{A}_\gamma = e^{i\gamma}, \quad (27)$$

где  $\gamma = \alpha, \beta$ . Отсюда векторные сигналы, смещенные на угол  $\gamma$ , записываются как

$$\vec{E}_\gamma \equiv \dot{E}_\gamma = \dot{E} e^{i\gamma}. \quad (28)$$

Следовательно, и спектры векторных амплитуд будут содержать множители  $e^{i\nu}$ :

$$\hat{S}_{m\nu} = \hat{S}_m e^{i\nu}. \quad (29)$$

Спектры правокруговых и левокруговых комплексных амплитуд получаются исходя из (22) с различными знаками аргументов операторов азимутального поворота  $A_{(R,L),\nu} = e^{\pm i\nu}$ .

Рассмотренная методология позволяет записать матричное преобразование Джонса по кругополяризованному базису с учетом азимутальных поворотов в более простой форме, чем по линейно поляризованному базису (6), (11), (12):  $\bar{S}_{\tau\gamma} = Q\bar{S}_{nc}$ , (30). Здесь

$$Q_{RR} = C_{RR} e^{i(\alpha+\beta)}; \quad Q_{RL} = C_{RL} e^{-i(\alpha-\beta)}; \quad Q_{LR} = C_{LR} e^{i(\alpha-\beta)}; \\ Q_{LL} = C_{LL} e^{-i(\alpha+\beta)}. \quad (31)$$

Как видно из (31), ВПХ — матрица  $Q$  сохраняет полностью амплитудно-частотные характеристики компонент ВПХ исследуемого объекта и с точностью до аддитивной постоянной — фазочастотные.

Взяв два известных векторных сигнала  $\vec{E}_{n1}$ ,  $\vec{E}_{n2}$  и выполнив измерения спектров по кругополяризованному базису двух соответствующих сигналов отклика  $\vec{E}_{\tau1}$ ,  $\vec{E}_{\tau2}$ , по которым формируются векторы Джонса  $\bar{S}_{\tau\gamma1}$ ,  $\bar{S}_{\tau\gamma2}$ , получим две пары уравнений относительно компонент матрицы  $Q$ :

$$S_{\tau R\gamma1} = S_{nR1} Q_{RR} + S_{nL1} Q_{RL}; \quad S_{\tau R\gamma2} = S_{nR2} Q_{RR} + S_{nL2} Q_{RL}; \quad (32)$$

$$S_{\tau L\gamma1} = S_{nR1} Q_{LR} + S_{nL1} Q_{LL}; \quad S_{\tau L\gamma2} = S_{nR2} Q_{LR} + S_{nL2} Q_{LL}. \quad (33)$$

Системы разрешимы, если определители однородных систем (оба они одинаковы) не равны нулю:  $\Delta_0 \neq 0$  (34). Здесь

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} S_{nR1} & S_{nL1} \\ S_{nR2} & S_{nL2} \end{vmatrix} = S_{nR1} S_{nL2} - S_{nL1} S_{nR2}. \quad (35)$$

Отсюда получим

$$S_{nR1} S_{nL2} \neq S_{nL1} S_{nR2}. \quad (36)$$

Введя фазоры по кругополяризованному базису [6], точнее, их частотные спектры

$$q_{n1} = q_{n1}(f) = \frac{S_{nL1}}{S_{nR1}}; \quad (37)$$

$$q_{n2} = q_{n2}(f) = \frac{S_{nL2}}{S_{nR2}}, \quad (38)$$

найдем естественное поляризационное условие для (34):  $q_{n2} \neq q_{n1}$  (39). Откуда следует, что поляризационно-спектральная структура зондирующих сигналов  $\vec{E}_{n1}$ ,  $\vec{E}_{n2}$  должна быть различной.

Компоненты матрицы  $Q$  — ВПХ по кругополяризованному базису получим из двух неоднородных систем (32) и (33):

$$Q_{RR} = \frac{\Delta_{RR}}{\Delta_0}; \quad Q_{RL} = \frac{\Delta_{RL}}{\Delta_0}; \quad Q_{LR} = \frac{\Delta_{LR}}{\Delta_0}; \quad Q_{LL} = \frac{\Delta_{LL}}{\Delta_0}, \quad (40)$$

где  $\Delta_0$ ,  $\Delta_{RR}$ ,  $\Delta_{RL}$ ,  $\Delta_{LR}$ ,  $\Delta_{LL}$  — соответствующие определители.

Из условий и решений поставленной задачи можно заключить следующее.

Линейные стационарные электродинамические объекты по отношению к сигналам с вращающейся поляризацией и произвольной ориентации линейной (векторным сигналам) обладают векторными передаточными характеристиками, имеющими форму матриц передачи (рассеяния, дифракции), комплексные элементы которых являются частотными характеристиками для базисных компонент векторного сигнала. Многообразие векторных поляризационных базисов гармонической волны вызывает множественность ВПХ исследуемого объекта и обуславливает целесообразность выбора такого базиса, компоненты ВПХ которого остаются инвариантными при различной ориентации по отношению к объекту как зондирующего векторного сигнала, так и сигнала отклика. Из решения задачи в линейнополяризованном ортогональном базисе сигнала, произвольно ориентированном по отношению к объекту, следует возможность вычисления по спектрам зондирующего сигнала и спектрам отклика не только комплексных частотных характеристик — компонент ВПХ объекта, но и ориентации векторных сигналов, однако задача сводится к громоздким вычислениям определителей восьмого порядка. Решение задачи в кругополяризованном базисе показывает, что ВПХ по этому базису сохраняет инвариантными амплитудно-частотные характеристики своих компонент, а фазочастотные характеристики сохраняют инвариантной «окраску», т. е. характер дисперсии; матрица вычисления оказывается наиболее простой —  $2 \times 2$  элемента.

Список литературы: 1. Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чекалин Г. М. Комплексный спектр сигналов с вращающейся и произвольной линейной поляризацией // Вестн. Харьк. ун-та. 1982. № 227. С. 3—10. 2. Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чекалин Г. М. Собственные поляризации как критерий в фазорной эллипсометрии // Вестн. Харьк. ун-та. 1985. № 273. С. 5—11. 3. Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чекалин Г. М. и др. Формирование поляризационных мультиплетов на СВЧ // Вестн. Харьк. ун-та. 1987. № 307. С. 49—55. 4. Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И. Комплексно-сигнальная модель волновых сигналов // Отбор и передача информации. 1989. № 3 (79). С. 35—40. 5. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М., 1981. 583 с. 6. Рамзэй В. Г. Передача между антеннами эллиптической поляризации. Антенны эллиптической поляризации. М., 1961. С. 15—29.

Поступила в редколлегию 27.09.88

В. С. КОРОСТЕЛЕВ, С. Н. КУЧЕРЕНКО, Г. И. ХЛОПОВ,  
канд. техн. наук, Ю. В. ЯКИМЧУК, канд. техн. наук

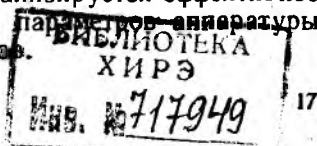
## ПРИМЕНЕНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ УГОЛКОВЫХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ ДЛЯ КАЛИБРОВКИ ДОППЛЕРОВСКИХ РЛС МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

При проведении широкого круга радиолокационных измерений [1] часто используется метод замещения, основанный на сравнении сигналов, отраженных от исследуемого объекта и от эталонного отражателя, в качестве которого применяются проводящие тела простой формы [2], в том числе уголкового отражателя (УО). Однако в случае доплеровской РЛС, которая не позволяет обнаруживать неподвижные объекты, необходимо обеспечить перемещение отражателя в радиальном направлении, например, с помощью тележки, движущейся по рельсовой направляющей [3]. Несмотря на свою простоту, указанный способ приводит к довольно громоздкой конструкции, что не всегда приемлемо, особенно в условиях натурных измерений. Поэтому представляет интерес разработка малогабаритного имитатора доплеровского сдвига частоты, основанного на возвратно-поступательном или вращательном движении отражателя. При этом за счет периодического характера фазовой модуляции отраженного сигнала, его спектр является линейчатым, а энергия распределена в диапазоне частот вблизи несущей, в связи с чем эквивалентная площадь рассеяния (ЭПР) отражателя определяется не только его геометрией, но также параметрами движения.

В работе [4] описана конструкция имитатора в виде УО, закрепленного в раскрыве акустического громкоговорителя, обеспечивающего вибрацию УО с амплитудой  $\Delta R \leq 50$  мкм в полосе частот до 400 Гц. Как было показано, даже в коротковолновой части миллиметрового диапазона (КВЧ ММД), подобный имитатор обеспечивает сравнительно небольшой индекс фазовой модуляции  $m = 2k\Delta R \leq 0,3$  рад ( $k = 2\pi/\lambda$ ), что в результате приводит к заметному уменьшению эффективного значения ЭПР<sub>эфф</sub> по сравнению с ЭПР собственно УО  $\sigma_0$  ( $\sigma_{эфф} = m^2\sigma_0 \leq 10^{-1}\sigma_0$ ).

В то же время использование имитатора в виде нескольких УО, вращающихся на общей крестовине (рис. 1), позволяет обеспечить довольно большие значения индекса фазовой модуляции при  $kL \gg 1$  ( $L$  — радиус вращения). Однако в этом случае формирование отраженного сигнала происходит гораздо сложнее, так как возрастает вклад высших гармоник частоты вращения, появляется амплитудная модуляция сигналов за счет пространственного сканирования диаграммой направленности УО при вращении, а также сказывается интерференция между отдельными отражателями.

Указанные обстоятельства решающим образом влияют на точность калибровки РЛС, в связи с чем в работе анализируется эффективное значение ЭПР вращающегося УО с учетом параметров аппаратуры спектральной обработки отраженных сигналов.



Рассмотрим сигнал на выходе линейной части приемника доплеровской РЛС, отраженный от модели имитатора в виде одиночного вращающегося УО

$$U(t) = U_0 A(t) \exp \{j\Phi(t)\}, \quad (1)$$

где

$$\Phi(t) = 2kR(t) = 2k[R_0^2 - 2LR_0 \cos \varphi(t) + L^2]^{1/2};$$

$A(t) = \sigma_0^{1/2}(t)$  — амплитудная модуляция сигнала в результате вращения УО;  $R(t)$  — изменение расстояния до УО;  $R_0$  — расстояние до центра вращения УО;  $\varphi(t)$  — зависимость угла поворота от времени. При проведении измерений радиус вращения, как правило, значительно меньше расстояния до РЛС  $R_0/kL^2 \gg 1$ , а скорость вращения обычно постоянна с высокой точностью  $\varphi(t) = \Omega t$ , поэтому выражение для

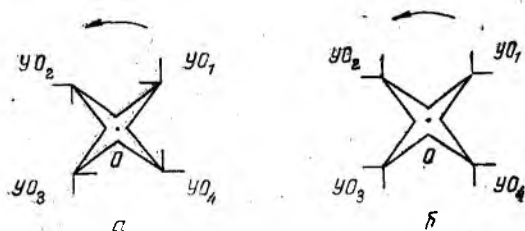


Рис. 1

$U(t)$  можно упростить, разлагая  $\Phi(t)$  в ряд по малому параметру  $L/R_0 \ll 1$  и удерживая слагаемые в первом порядке малости (приближение дальней зоны):

$$\Phi(t) = 2kL \cos \Omega t + 0(L^2/R_0^2). \quad (2)$$

Как видно, в данном приближении закон фазовой модуляции отраженного сигнала в точности совпадает с соответствующим выражением для вибрирующего уголка [5] (разница только в глубине модуляции фазы, так как  $L \gg \Delta R$ ), а напряжение после фильтра спектроанализатора, подключенного к выходу приемника РЛС, запишется в виде

$$U_\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' H(t-t') U(t'), \quad (3)$$

где  $H(t) = H_0(t) \exp \{j\omega_\Phi t\}$  — импульсная характеристика фильтра, настроенного на частоту  $\omega_\Phi$ ;  $H_0(t)$  — медленно меняющаяся огибающая импульсной характеристики. Вводя безразмерные переменные  $x = \Omega t$ ,  $p = 2kL$ ,  $\alpha = \omega_\Phi / 2kL\Omega$ , выражение (3) перепишем в форме

$$U_\Phi(t) = \frac{U_0}{\Omega} e^{j\omega_\Phi t} \int_{-\infty}^{\infty} dx H_0\left(t - \frac{x}{\Omega}\right) A\left(\frac{x}{\Omega}\right) e^{-jp(\alpha x - \cos x)}. \quad (4)$$

Так как  $H_0(t)$ ,  $A(t)$  — медленно меняющиеся функции, а параметр  $p$  принимает в КВЧ ММД весьма большие значения  $p \gg 1$ , то для вы-

числения интеграла (4) можно использовать метод стационарной фазы [5]. При этом важную роль играет ориентация УО относительно крестовины имитатора, так как в случае, приведенном на рис. 1, а, максимум отраженного сигнала совпадает с верхней границей спектра, соответствующей максимальной линейной скорости УО при его вращении ( $\alpha = \pm 1$ , фильтр настроен на максимальную частоту Доплера  $\omega_\Phi = \omega_m = 2kL\Omega$ ), а во втором случае (рис. 1, б) максимум отраженного сигнала сосредоточен вблизи нулевых доплеровских частот ( $\alpha = \omega_\Phi = 0$ ). Так как основная задача имитатора — осуществление максимально возможного доплеровского сдвига частоты, то первый вариант конструкции имитатора безусловно более предпочтителен, а максимум спектральной плотности на выходе фильтра может использоваться для калибровки РЛС. Вклад стационарной точки в (4) при  $\alpha = \pm 1$  вычисляется при помощи теоремы Эрдели [5], а мощность сигналов на выходе фильтра представляет собой последовательность импульсов в моменты времени  $t_m = m\pi/\Omega$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ;  $M = \text{ent}(\frac{\Omega}{\pi} T_n)$ ),  $T_n$  — время наблюдения), когда частота Доплера отраженного сигнала совпадает с резонансной частотой фильтра  $\omega_g = \omega_\Phi$

$$|U_\Phi(t)|^2 = U_0^2 \frac{1,66}{\Omega^2 (kL)^{2/3}} \sum_{m=0}^M |H_0(t - t_m) A(t_m)|^2. \quad (5)$$

Однако при проведении радиолокационных измерений более удобно регистрировать энергию отраженного сигнала, для чего в современных спектроанализаторах после квадратичного детектора на выходе фильтра устанавливается интегратор (например прибор Я4С-78, используемый совместно с анализатором типа СК4-73). Напряжение с его выхода записывается в виде интегрального оператора «скользящего среднего» [5], результат применения которого вычисляется особенно просто в случае, когда время усреднения  $T_0$  существенно превышает время установления колебаний в фильтре  $T_0 \gg \Delta\omega_\Phi^{-1}$  ( $\Delta\omega_\Phi$  — полоса пропускания фильтра), что практически всегда имеет место при проведении измерений. Считая, что интерференция между отдельными УО имитатора отсутствует (например, если их диаграммы рассеяния не перекрываются), выражение (5) может быть вычислено для  $N$  отражателей как

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt |U_\Phi(t)|^2 = U_0^2 \sigma_{\text{эфф}}, \quad (6)$$

где

$$\sigma_{\text{эфф}} = 6,67 \cdot 10^{-2} N \frac{2\Delta\omega_\Phi}{\Omega^{1/3} \omega_m^{2/3}} \sigma_0; \quad (7)$$

$\sigma_0$  — ЭПР неподвижного УО. Как видно, эффективность имитатора падает с увеличением скорости вращения и ширины спектра доплеровских частот, что обусловлено возрастанием индекса фазовой модуля-

ции  $p = 2kL$  и связанного с этим перераспределением энергии отраженного сигнала по диапазону частот.

Подробный анализ характера приближения, достигаемого в (3) при использовании метода стационарной фазы показывает, что фактически параметром малости задачи является отношение времени, в течение которого частота Доплера находится в пределах полосы пропускания фильтра  $t_n$ , ко времени установления колебаний в фильтре  $t_y$ :

$$\epsilon = \frac{2}{\Omega} \sqrt{\frac{\Delta\omega_{\Phi}^3}{\omega_m}} = \frac{t_n}{t_y}. \quad (8)$$

Соотношение (8) хорошо выполняется в КВЧ ММД и при больших скоростях вращения УО, тем не менее представляет интерес выяснить характер погрешности при расчете эффективной ЭПР вращающегося УО в условиях, когда условие применимости выражений (6), (7) становится трудновыполнимым, т. е.  $\epsilon \rightarrow 1$ .

Экспериментально исследовали макет имитатора в виде трех УО, каждый из которых обеспечивает ЭПР  $\sigma_0 = 1,8 \text{ м}^2$ , причем теневая сторона отражателя покрывалась поглотителем для уменьшения интерференционных эффектов. Отражатели закреплены по радиусу  $L = 26,25\lambda$ , вращение осуществлялось от электродвигателя постоянного тока, а скорость вращения контролировалась с помощью фотооптического датчика. Измерения проводились с помощью технологической доплеровской РЛС двухмиллиметрового диапазона на основе генератора дифракционного излучения (ГДИ) [6]. Излучаемая мощность составляла около 0,8 Вт, ширина диаграммы направленности рупорной антенны  $6,5^\circ$ , спектральная чувствительность приемного устройства порядка  $10^{-15} \text{ Вт/Гц}$ , на выходе которого установлен спектроанализатор типа СК4-73 с интегратором Я4С-78. Отсчет уровня мощности отраженного сигнала производился квадратичным вольтметром, подключенным в выходу фильтра, настраиваемого каждый раз на максимум доплеровского спектра исследуемых сигналов. Для измерения эффективной ЭПР макета имитатора и сопоставления его с расчетным значением (7) максимум спектральной плотности сравнивался с мощностью первой гармоники сигналов от имитатора в виде вибрирующего УО, ЭПР которого поддается точному расчету [4] и составляет  $\sigma_{\text{эфф}} = 4\sigma_0 J_1^2(2k\Delta R)$ , где  $J_1$  — функция Бесселя первого рода. Использовался УО с ЭПР  $\sigma_0 = 3,7 \text{ м}^2$ , вибрирующий с частотой  $F_b = 383 \text{ Гц}$  и амплитудой  $\Delta R = 10 \text{ мкм}$ , обеспечивающий значение эффективной ЭПР  $\sigma_{\text{эфф}} = 0,01 \text{ м}^2$ , что вполне достаточно для уверенного выделения его сигналов на расстоянии  $R_0 \geq 5 \text{ м}$ .

На рис. 2 показан характерный вид усредненного доплеровского спектра сигналов, отраженных от имитатора с вращающимися УО, где хорошо виден специфический максимум спектральной плотности, соответствующий моментам времени, когда ось диаграммы рассеяния УО направлена точно на измерительную РЛС. На рис. 3 приведены результаты измерения эффективного значения ЭПР разработанного макета имитатора совместно с данными расчета (7) (кривая 1). При этом по вертикальной оси отложены значения ЭПР в децибеллах относи-

тельно  $\sigma_{эфф} = 1 \text{ м}^2$ , приведенные к полосе фильтра спектроанализатора  $\Delta f = 1 \text{ Гц}$ , по оси абсцисс значения доплеровского сдвига частоты в герцах, соответствующие максимуму спектральной плотности. Кривые 2, 3 получены для полосы пропускания фильтра 10 и 25 Гц, а погрешность измерений по нашим оценкам не превышает  $\pm 1 \text{ дБ}$ . Как и следовало ожидать (7), для более узкополосного фильтра совпадение расчетных и измеренных данных заметно лучше (кривая 2), так как при вычислении интеграла (4) существенно важно, чтобы колебания на выходе фильтра не успевали установиться при свипировании частоты Допплера в полосе фильтра. Ход расчетных кривых правильно отображает результаты эксперимента, а систематическое превышение расчетных данных на  $1,5 \div 2,0 \text{ дБ}$  относительно измеренных обусловлено сравнительно высоким значением параметра  $\epsilon$  (8), который в нашем случае меняется в пределах  $0,35 \div 0,9$  и  $0,9 \div 1,5$  для ширины полосы пропускания фильтра 10 и 25 Гц соответственно. При этом наклон экс-

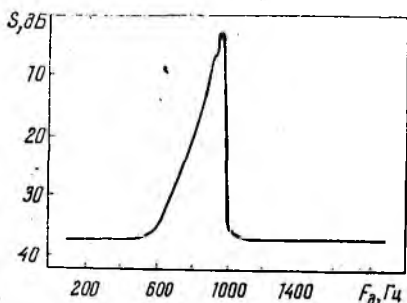


Рис. 2

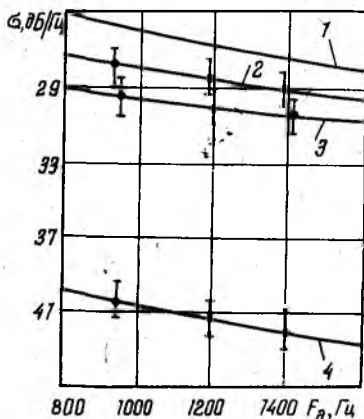


Рис. 3

периментальных кривых отличается от закона  $f^{-1}$ , подтверждая таким образом правильность сделанной оценки погрешности расчета (8), которая возрастает в области низких частот Допплера. Кроме того, определенную роль также играют погрешности изготовления УО, которые выполнены в виде легкой паянной конструкции из медной фольги.

Представляет интерес сравнить характеристики имитатора с вращающимися и вибрирующим отражателями. Подобное рассмотрение показывает, что в принципе эффективность вибрирующего УО заметно выше, так как, несмотря на малые значения индекса фазовой модуляции  $2k\Delta R \ll 1$ , его энергия сосредоточена в пределах полосы пропускания фильтра спектроанализатора, в то время как сигнал от вращающегося УО находится в полосе пропускания только небольшую часть периода вращения. Тем не менее преимущества вибрирующего УО реализуются только при очень низких значениях доплеровского сдвига частоты порядка 100 Гц, так как амплитуда вибраций резко падает с увеличением их частоты в связи с демпфированием механической колебательной системы акустического излучателя конструкцией УО.

Поэтому на высоких частотах доплеровского сдвига эффективность вращающегося имитатора несомненно выше, что, впрочем, не является единственным преимуществом.

Следует отметить специфическую особенность использования вращающегося УО, связанную с необходимостью поддерживать определенные фазовые соотношения в системе «отражатель — РЛС». Согласно работе [4] изменение фазы отраженного сигнала на  $\pi/2$  приводит к 100 % амплитудной модуляции напряжения на выходе РЛС, что налагает практически невыполнимые требования на долговременную нестабильность  $\sigma_f$  передающего устройства калибруемой РЛС:

$$\frac{\sigma_f}{f_0} \ll \frac{\lambda}{8 R_0}, \quad (9)$$

где  $f_0$  — несущая частота излучаемого сигнала;  $R_0$  — расстояние от РЛС до имитатора. Даже для такого высокостабильного генератора, как ГДИ [6], ( $\sigma_f/f_0 \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$ ), согласно (9) максимальное расстояние в КВЧ ММД не превышает десятков метров, свыше которого нестабильность частоты передатчика проявляется в виде медленных осцилляций амплитуды выходного сигнала с периодом  $30 \div 60$  с, что весьма снижает точность калибровки.

В случае имитатора с вращающимися УО, в которых достигается глубокая фазовая модуляция, долговременная стабильность частоты передатчика не играет существенной роли, а максимально допустимое расстояние определяется практически энергетическим потенциалом РЛС. Кроме того, подобный имитатор может быть выполнен в виде необслуживаемой конструкции, не требующей для своей работы дополнительных источников питания. В частности, нами успешно использован прибор МС-13 для измерения скорости ветра в качестве имитатора для калибровки РЛС при проведении радиофизических исследований спектральных характеристик сигналов, рассеянных растительностью в двухмиллиметровом диапазоне [4]. Анемометр МС-13 содержит четыре сферических металлических чашки диаметром 20 мм, закрепленных на общей крестовине и вращающихся от ветра (при скорости ветра  $3 \div 5$  м/с доплеровский сдвиг частоты составляет  $1 \div 1,5$  кГц в двухмиллиметровом диапазоне). Результаты измерений эффективного значения ЭПР приведены на рис. 3 (кривая 4), которые получены при воздействии на имитатор регулируемого воздушного потока от вентилятора и хорошо аппроксимируются зависимостью  $\sigma_{эфф} (\text{м}^2/\text{Гц}) = 0,54 \omega_m^{-1}$  (10). При работе подобного устройства на открытом воздухе необходимо считаться с изменением силы ветра, особенно при порывах. Инерционные свойства анемометра, как показывает опыт, вполне позволяют проводить калибровку РЛС в промежутки времени, когда скорость вращения отражателей практически постоянна.

Таким образом, в результате проведенных исследований предложен расчет эффективного значения ЭПР имитатора доплеровских сигналов в виде вращающихся УО, оценены рамки применимости полученных выражений, а также приведены данные экспериментального исследования, подтверждающие правильность сделанных при расчете

предположений. Показано, что калибровка энергетического потенциала доплеровской РЛС просто осуществляется путем сравнения максимума спектральной плотности сигнала от имитатора и исследуемого объекта.

**Список литературы:** 1. Кулемин Г. П., Разскавовский В. Б. Рассеяние миллиметровых радиоволн поверхностью земли под малыми углами. К., 1987. 232 с. 2. Кобак В. О. Радиолокационные отражатели. М., 1975. 248 с. 3. Guosui Liu, Xiangquan Shi. Average ambiguity function for random FM radar signal // Colloq. Int. radar. Paris, 21—24 May 1984. P. 339—350. 4. Коростелев В. С., Хлопов Г. И., Шестопапов В. П. Информационно-измерительная система для исследования характеристик отраженных сигналов в мм диапазоне волн // Сб. Всесоюз. конф. по статистическим методам обработки данных дистанционного зондирования окружающей среды: Тез. докл. Рига, 1986. С. 94—95. 5. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Алексеева. М., 1971. 495 с. 6. Разработка технологической РЛС миллиметрового диапазона на основе ГДИ / В. Н. Горелов, В. С. Коростелев, Г. И. Хлопов, В. П. Шестопапов // Физика и техника мм и субмм. волн. Научное приборостроение, К., 1988. С. 85.—92.

Поступила в редколлегию 15.12.88

УДК 537.874.72

В. А. АРТЕМЕНКО, канд. техн. наук, Б. В. ДЗЮНДЗЮК, канд. техн. наук,  
А. В. КОНОВКО, канд. техн. наук

### ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОХОЖДЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Прохождение плоской электромагнитной волны через один слой рассмотрено в работе [1]. Расчет основывался на решении одномерного скалярного волнового уравнения для обобщенного вектора Герца, удовлетворяющего соответствующим условиям непрерывности на границах раздела. В общем виде были получены коэффициенты отражения и прохождения сквозь однослойную структуру [1], однако метод обобщения, предложенный автором, не позволил получить такой важный параметр, как коэффициент прохождения для многослойной структуры. Полученные формулы для многослойной структуры выведены в предположении, что параметры сред по обе стороны структуры одинаковы [2]. Это предположение накладывает определенные ограничения, так как, если параметры сред неодинаковы, разными оказываются и коэффициенты прохождения по  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Приводим простой метод получения коэффициентов отражения и прохождения для  $N$ -слойной структуры, удобной для практических расчетов и лишенный указанного ограничения. Для этого воспользуемся методом отражений [3].

Рассмотрим электромагнитную волну магнитного типа, компоненты поля которой определяются следующими соотношениями [1]:

$$\vec{E} = -i\omega\mu \operatorname{rot} \vec{\Pi}^M; \quad \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^M - \kappa^2 \vec{\Pi}^M,$$

где  $\vec{\Pi}^M$  — магнитный вектор Герца;  $\kappa = i(2\pi/\lambda) \sqrt{\mu_r(\epsilon_r - i60\sigma\lambda)}$  —

полное число среды;  $\mu = \mu_r \mu_0$  — абсолютная магнитная проницаемость;  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость;  $\omega$  — круговая частота;  $\lambda$  — длина волны;  $\sigma$  — проводимость;  $\epsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость.

Полагаем, что магнитные проницаемости всех сред одинаковы и равны магнитной проницаемости воздуха  $\mu_0$ . Коэффициент прохождения и отражения определим для вектора  $\vec{H}$ .

Вначале рассмотрим двухслойную структуру, состоящую из слоев 1 и 2 с волновыми числами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  (рис. 1). Верхнее и нижнее полупространства характеризуются соответственно волновыми числами  $\kappa_3$  и  $\kappa_0$ . Пусть плоская волна падает из полупространства 3 нормально к поверхности структуры. Первый слой (волновое число  $\kappa_1$ ) согласно [1] определяется следующими величинами:

коэффициентом отражения

$${}_1W_{21} = (K_{21} + K_{10} e^{-2\kappa_1 d_1}) / (1 + K_{21} K_{10} e^{-2\kappa_1 d_1}) \quad (1)$$

и коэффициентом прохождения

$${}_1S_{21} = (1 + K_{21})(1 + K_{10}) e^{-\kappa_1 d_1} / (1 + K_{21} K_{10} e^{-2\kappa_1 d_1}), \quad (2)$$

где  $K_{10} = (\kappa_0 - \kappa_1) / (\kappa_0 + \kappa_1)$ ;  $K_{21} = (\kappa_1 - \kappa_2) / (\kappa_1 + \kappa_2)$  — коэффициенты отражения от соответствующих границ.

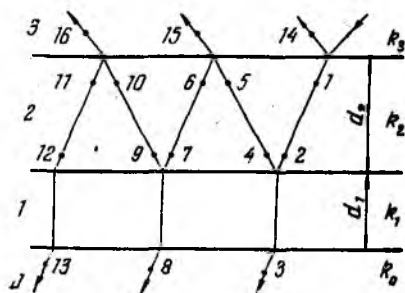
В предыдущих выражениях двойные индексы справа указывают на направление движения электромагнитной волны, а индекс слева — на количество экранирующих слоев. Так как слой 1 характеризуется полными коэффициентами отражения и прохождения, переотражения будут происходить только в слое 2.

Проходя через границу раздела сред 3 и 2 (точка 1), электромагнитная волна испытывает ослабление, пропорциональное коэффициенту преломления на границе сред  $(1 + K_{32})$ . В точке 2 необходимо учесть поглощение волны и набег фазы, характеризующийся множителем  $e^{-\kappa_1 d_1}$ . Часть излучения, пропорциональная коэффициенту отражения, от первого слоя  ${}_1W_{21}$  отразится обратно (точка 4), а оставшая часть, пройдя сквозь первый слой, выйдет в нижнее полупространство (точка 3). В точке 5 набег фазы удвоится. Часть излучения, пропорциональная коэффициенту отражения  $K_{23}$  отразится обратно (точка 6), а часть выйдет в верхнее полупространство (точка 15).

Дальнейшие переотражения происходят аналогично. Выпишем коэффициенты во всех точках, указанных на рис. 1:

$$\begin{aligned} 1 & - (1 + K_{32}); \quad 2 - (1 + K_{32}) e^{-\kappa_1 d_1}; \\ 3 & - {}_1S_{21} (1 + K_{32}) e^{-\kappa_1 d_1}; \quad 4 - {}_1W_{21} (1 + K_{32}) e^{-\kappa_1 d_1}; \\ 5 & - {}_1W_{21} (1 + K_{32}) e^{-2\kappa_1 d_1}; \quad 6 - {}_1W_{21} (1 + K_{32}) K_{23} e^{-2\kappa_1 d_1}; \end{aligned}$$

Рис. 1



$$\begin{aligned}
7 - {}_1W_{21}(1 + K_{23})K_{23}e^{-3\kappa_2 d_2}; \quad 8 - {}_1S_{21} {}_1W_{21}(1 + K_{32})K_{23}e^{-3\kappa_2 d_2}; \\
9 - {}_1W_{21}^2(1 + K_{32})K_{23}e^{-3\kappa_2 d_2}; \quad 10 - {}_1W_{21}^2(1 + K_{32})K_{23}e^{-4\kappa_2 d_2}; \\
11 - {}_1W_{21}^2(1 + K_{32})K_{23}^2e^{-4\kappa_2 d_2}; \quad 12 - {}_1W_{21}^2(1 + K_{32})K_{23}^2e^{-5\kappa_2 d_2}; \\
13 - {}_1S_{21} {}_1W_{21}(1 + K_{32})K_{23}^2e^{-5\kappa_2 d_2}; \\
14 - K_{32}; \quad 15 - {}_1W_{21}(1 + K_{32})(1 + K_{23})e^{-2\kappa_2 d_2}; \\
16 - {}_1W_{21}^2(1 + K_{32})(1 + K_{23})K_{23}e^{-4\kappa_2 d_2}.
\end{aligned}$$

Коэффициент прохождения (прозрачности) двуслойной структуры  ${}_2S_{32}$  определяется суммированием коэффициентов на лучах, вышедших в нижнее полупространство (точки 3, 8, 13 и т. д.):

$${}_2S_{32} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + K_{32}) {}_1S_{21} e^{-\kappa_2 d_2} (K_{23} {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2})^n.$$

Суммирование этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии дает

$$\begin{aligned}
{}_2S_{32} &= {}_1S_{21}(1 + K_{32})e^{-\kappa_2 d_2} / (1 - K_{23} {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2}) = \\
&= {}_1S_{21}(1 + K_{32})e^{-\kappa_2 d_2} / (1 + K_{32} {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2}).
\end{aligned}$$

Аналогично коэффициент отражения двухслойной структуры определяется суммированием коэффициентов на лучах, вышедших обратно в верхнее полупространство (точки 14, 15, 16 и т. д.):

$$\begin{aligned}
{}_2W_{32} &= K_{32} + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - K_{32}^2) {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2} ({}_1W_{21} K_{23} e^{-2\kappa_2 d_2})^n = \\
&= K_{32} + {}_1W_{21}(1 - K_{32}^2)e^{-2\kappa_2 d_2} / (1 - K_{23} {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2}) = \\
&= (K_{32} + {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2}) / (1 + K_{32} {}_1W_{21} e^{-2\kappa_2 d_2}).
\end{aligned}$$

В предыдущих выражениях учтено, что  $K_{32} = -K_{23}$ . В случае трехслойного экрана нижние два слоя заменяются эквивалентной двухслойной структурой с параметрами  ${}_2S_{32}$  и  ${}_2W_{32}$  аналогично рассматриваются.

Применяя метод математической индукции для  $N$ -слойной структуры, легко получаем коэффициент прохождения

$$\begin{aligned}
{}_N S_{(N+1)N} &= ({}_{N-1} S_{N(N-1)} (1 + K_{(N+1)N}) e^{-\kappa_2 N d_N} / (1 + K_{(N+1)N} \times \\
&\quad \times ({}_{N-1} W_{N(N-1)} e^{-2\kappa_2 N d_N}) \quad (3)
\end{aligned}$$

и коэффициент отражения

$${}^N W_{(N+1)N} = (K_{(N+1)N} + {}_{(N-1)} W_{N(N-1)} e^{-2\kappa_N d_N}) / (1 + K_{(N+1)N} \times {}_{(N-1)} W_{N(N-1)} e^{-2\kappa_N d_N}). \quad (4)$$

Полученные формулы очень удобны при машинной реализации.

Полагая в выражениях (3), (4) параметры всех слоев одинаковыми, нетрудно найти известные формулы для однослойной структуры с суммарной толщиной, с помощью которых удобно проверять правильность полученных выражений.

Заметим, что выражение (3) было получено для вектора  $\bar{H}$ . Чтобы найти коэффициент прохождения по вектору  $\bar{E}$ , достаточно (3) домножить на величину  $\kappa_N/\kappa_0$ .

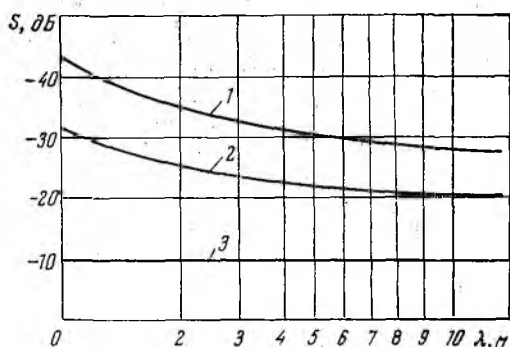


Рис. 2

При этом выражение (4) приобретает множитель  $(-1)$ . В случае, когда по обе стороны экранирующей структуры среды будут одинаковыми, коэффициенты прохождения по  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  совпадут.

В качестве примера был приведен расчет коэффициента экранирования в зависимости от длины волны для трехслойной структуры с параметрами:  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 2$ ;  $d_1 = d_3 = 0,01$  м;  $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$  Ом<sup>-1</sup> м<sup>-1</sup>;  $\epsilon_2 = 3,4$ ;  $\sigma_2 = 0,2$  Ом<sup>-1</sup> м<sup>-1</sup>;  $d_2 = 0,25$  м. Параметры  $\sigma_0$ ,  $\sigma_4$  и  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_4$  соответствуют значениям проводимости и электрической проницаемости воздуха.

Кривая 1 на рис. 2 показывает зависимость изменения коэффициента прохождения от длины волны для трехслойной структуры в целом, 2 — соответствует изменению коэффициента прохождения для второго слоя. Ослабление первого и третьего слоев практически не зависит для выбранных параметров в данном диапазоне частот от длины волны и составляет 9,9 дБ. Из рис. 2 видно, что три изолированных экрана в сумме экранируют несколько эффективнее, чем один трехслойный экран из тех же материалов. В работе [3] также отмечено это обстоятельство, что связано, по мнению автора, со значительным обратным действием слоев друг на друга.

Список литературы: 1. Краев А. П. Основы геоэлектрики. М., 1966. 587 с. 2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973. 373 с. 3. Каден Г. Электромагнитные экраны. М., 1957. 327 с.

Поступила в редколлегию 15.09.88

*Е. И. ШМАТЬКО*, канд. физ.-мат. наук, *Н. А. КОВАЛЕВА*, *А. В. ШИЯН*,  
*В. И. ИСАЧЕНКОВ*, канд. техн. наук, *А. И. СОБОЛЕВА*

### **ВЫБОР ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ, ЗАПОЛНЕННОГО АКТИВНОЙ СРЕДОЙ**

Наиболее интересной с точки зрения генерирования и усиления СВЧ-колебаний является система активная среда — электронный пучок [1]. Такая система в широком диапазоне параметров пучка и среды неустойчива. Для нее характерно объемное взаимодействие пучка с полем электромагнитной волны. Она представляет собой высокочастотное устройство, в котором имеет место длительное взаимодействие электронного потока с медленной электромагнитной волной, распространяющейся по волноводу.

Возможность широкой электронной перестройки области рабочих частот путем изменения параметров такого волновода обеспечивается использованием активной среды в качестве замедляющей структуры.

В данных системах можно реализовать большие коэффициенты усиления, сокращение пространства взаимодействия, увеличение КПД за счет более высоких значений импеданса связи, заполненных средой волноводов, повышение мощности в результате проведения через среду больших электронных токов.

Однако при разработке систем с заполнением возникает ряд трудностей, связанных с невозможностью непосредственного излучения в вакуум генерируемых волн среды, с перекачкой СВЧ-энергии из ВЧ-части спектра в низкочастотную, с релаксационными срывами генерации вследствие раскачки дрейфовых колебаний вблизи ионно-циклотронной частоты. Поэтому интересно использование в заполненных активной средой волноводах замедляющих структур, с помощью которых можно влиять на возбуждение низкочастотных колебаний среды.

Непрерывный рост требований к приборам СВЧ, для которых основными параметрами являются средняя мощность и широкополосность, привел к созданию более совершенных ЛБВ. Их основным составным узлом стала замедляющая система со связанными резонаторами. К ее достоинствам следует отнести отличные электрические характеристики в отношении импеданса, ширины полосы и структуры типа колебаний, простота конструкции, круговая симметрия, простота перестройки рабочей частоты, изменения мощности и ширины полосы.

Поля в пространстве взаимодействия замедляющих систем типа диафрагмированный волновод и цепочка связанных резонаторов разделены так, что продольное электрическое поле сосредоточено в основном в пространстве взаимодействия, а поперечные электрические и магнитные поля — вне пролетного канала. Это ослабляет перекачку энергии в НЧ-область, усиливает отбор СВЧ-мощности и повышает КПД.

В работах [2; 3] описаны эксперименты по генерации СВЧ-излучения черенковским генератором с замедляющей системой в виде

гофрированного волновода на сплошном и трубчатом пучках, генератором с замедляющей системой, нагруженной дисками, а также генератором с замедляющей системой типа диафрагмированный волновод. В зависимости от плотности рабочей среды, магнитного поля максимальная мощность излучения достигала  $P = 600$  МВт, а КПД генерации — около 20 %.

В статье рассмотрен генератор с замедляющей системой типа диафрагмированный волновод, заполненный активной средой, в центре которого движется пучок электронов (рис. 1).

Искажение поля активной средой становится столь существенным, что требует самосогласованного решения уравнений электромагнитного поля и уравнений движения материальной среды, а в случае сильноточных пучков также и уравнений движения электронов пучка.

Уравнения Максвелла для пространственно-ограниченных сред

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{D} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1)$$

дополняются материальным уравнением  $D_i = \hat{\epsilon}_{ij} E_j$  (2), где  $\epsilon_{ij}$  — оператор тензора диэлектрической проницаемости, и граничными условиями.

Решается также линеаризованное уравнение Власова для электронов материальной среды и пучка

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \delta f}{\partial r} - \frac{\Omega}{v_s(v)} \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{B}] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial p} \quad (3)$$

с равновесным распределением электронов пучка по импульсам вида

$$f_{0b} = \frac{n_b}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}). \quad (4)$$

Здесь  $p_{\perp 0} = m\gamma U_{\perp}$ ,  $p_{\parallel 0} = n\gamma U_{\parallel}$ ,

$U_{\perp}$ ,  $U_{\parallel}$  — поперечная и продольная составляющие скорости пучка, или с равновесным распределением электронов плазмы (тепловым движением пренебрегаем)  $f_{0p} = n_p \delta(\vec{p})$  (5). В выражении (3)  $\Omega = \frac{eB_0}{mc}$  — циклотронная частота, где  $B_0$  — внешнее продольное магнитное поле, удерживающее плазму от поперечного расплывания.

Для принятой модели в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  решение системы уравнений следует искать в виде

$$f(r) \exp(-i\omega t + ik_z z + il\varphi), \quad (6)$$

где  $\omega$  — частота;  $k_z^2$  и  $l$  — продольное и азимутальное волновые числа.

Подставляя решения вида (6) в систему (1) и (3), легко вычислить искомый оператор тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  [2; 4].

При взаимодействии пучков заряженных частиц со средой возникают черенковские и циклотронные пучковые неустойчивости, суть которых состоит в резонансном взаимодействии излучения электромагнитных волн электронами пучка с собственными колебаниями резонатора:

$$\omega_0(k_z) = kv_{\parallel} + s \frac{\Omega}{\gamma} \quad (7)$$

Здесь  $\omega_0(k_z)$  — собственная частота электромагнитных колебаний резонатора в отсутствие пучка. Если  $s = 0$  — резонанс называется черенковским, при  $s \neq 0$  — циклотронным,  $v_{\parallel} = v_{\phi}$ ,  $s = \pm 1$ .

Из дисперсионного уравнения, полученного подстановкой решений в виде (6) в уравнение поля с учетом радиальных, а также продоль-

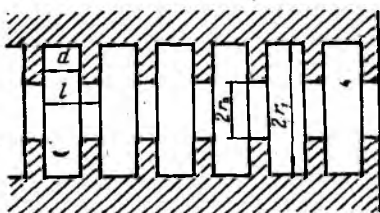


Рис. 2

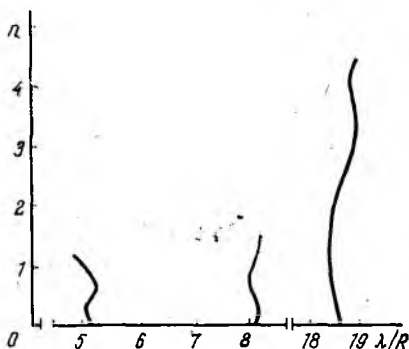


Рис. 3

ных граничных условий, находим комплексные собственные значения  $\omega$ , действительная часть которых дает частоты возбуждаемых волн, а мнимая часть — инкременты их нарастания.

Оптимальная геометрия диафрагмированного волновода круглого сечения (рис. 2) выбирается из решения его дисперсионного уравнения и определяются собственные частоты большого числа типов колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{d}{l} &= \sum \frac{k I_1(\gamma_n r_2)}{\gamma_n I_0(\gamma_n r_2)} I_0\left(\frac{\beta_n d}{2}\right) \frac{\sin \frac{\beta_n d}{2}}{\frac{\beta_n d}{2}} = \\ &= \frac{J_1(kr_2) N_0(kr_1) - N_1(kr_2) J_0(kr_1)}{J_0(kr_2) N_0(kr_1) - N_0(kr_2) J_0(kr_1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $I_0, I_1$  — модифицированные функции Бесселя,  $J_0, J_1, N_0, N_1$  — функции Бесселя и Неймана. На рис. 3 приведены дисперсионные характеристики диафрагмированного волновода, характеризующие высокочастотные ветви В- и Е-типов волн.

В случае заполнения активной средой наряду с высокочастотными ветвями В- и Е-типов волн появляются также низкочастотные ветви волн Е-типа.

Рассматриваются магнитно-циклотронные пучковые неустойчивости на волнах  $B$ - и  $E$ -типов, дисперсионные уравнения которых имеют вид

$$k_{\perp}^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(\tilde{\omega}_b^2) (B\text{-тип}), \quad (9)$$

где 
$$k_{\perp} = \frac{\mu_{1s}}{R}, \quad k_z = \frac{\omega_0}{u_{\parallel}}, \quad \mu_{1s} = 1,84(H_1); \quad (10)$$

$$\tilde{\omega}_b^2 = \begin{cases} \omega_b^2 & \text{— при сплошном пучке;} \\ \frac{r_0 \Delta [J_{l+1}^2(k_{\perp} r_0) + J_{l-1}^2(k_{\perp} r_0)] \omega_b^2}{R^2 [J_l^2(\mu_{1s}) - J_{l-1}(\mu_{1s}) J_{l+1}(\mu_{1s})]} & \text{— при трубчатом пучке;} \end{cases}$$

$$k_{\perp}^2 + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) k_z^2 = k_{\perp} k_z \varepsilon_{\parallel}(\tilde{\omega}_b^2) (E\text{-тип});$$

$$k_{\perp} = \frac{\mu_{1s}}{R}, \quad \omega_b = \sqrt{e^2 n_b \varepsilon_0 m_l}, \quad \omega_p = \sqrt{l^2 n_p / \varepsilon_0 m_l}; \quad (11)$$

$\Delta$  — толщина пучка;  $R$  — радиус волновода,

$$\tilde{\omega}_b^2 = \begin{cases} \omega_b^2 & \text{— при сплошном пучке;} \\ \frac{r_0 \Delta [J_{l+1}^2(k_{\perp} r_0) + J_{l-1}^2(k_{\perp} r_0)] \omega_b^2}{R^2 J_{l+1}^2(\mu_{1s})} & \text{— при трубчатом пучке.} \end{cases} \quad (12)$$

Решения дисперсионных уравнений (9) и (11) при циклотронном возбуждении высокочастотных волн  $B$ - и  $E$ -типов имеют вид

$$\omega_{01,2} = \gamma_{\parallel}^2 \frac{\omega_H}{\gamma} \left[ 1 \pm \frac{u_{\parallel}}{c} \sqrt{\frac{1 - k_{\perp}^2 c^2 \gamma^2}{\gamma_{\parallel}^2 \omega_H^2}} \right] (B\text{-тип}); \quad (13)$$

$$\omega_{01,2} = \gamma_{\parallel}^2 \frac{\omega_H}{\gamma} \left[ 1 \pm \frac{u_{\parallel}}{c} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2 + \omega_0^2 \gamma^2}{\gamma_{\parallel}^2 \omega_H^2}} \right] (E\text{-тип}), \quad (14)$$

где 
$$\omega_H = \frac{l B_{0z}}{mc}, \quad \gamma = \left[ 1 - \frac{1}{c^2} (u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2) \right]^{-1/2}, \quad \gamma_{\parallel} = \left[ 1 - \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} \right]^{-1/2}.$$

Возбуждение возможно в случаях

$$k_{\perp} c \gamma / \omega_H < \gamma_{\parallel} \quad \text{для волн } B\text{-типа};$$

$$\sqrt{k_{\perp}^2 c^2 + \omega_p^2} \gamma < \omega_H \quad \text{для волн } E\text{-типа}.$$

Подбором параметров  $R$ ,  $u_{\parallel}$ ,  $\omega_H$ ,  $\gamma$  можно либо разрешить, либо полностью запретить возбуждение той или иной волны.

При черенковском механизме возбуждения низкочастотной плазменной волны  $E$ -типа дисперсионное уравнение

$$k_{\perp}^2 + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) k_z^2 = \frac{\kappa^2 \omega_b^2 \gamma^{-1} \gamma_{\parallel}^{-2}}{(\omega - k_z u_{\parallel})^3}, \quad (15)$$

$$\tilde{\omega}_b^2 = \begin{cases} \omega_b^2 & \text{— при сплошном пучке;} \\ 2 \frac{r_0 \Delta J_l^2(k_{\perp} r_0)}{R^2 J_{l+1}^2(\mu_{1s})} \omega_b^2 & \text{— при трубчатом пучке} \end{cases}$$

имеет всего одно решение:

$$\omega_0^2 = \sqrt{\omega_p^2 - k_{\perp}^2 u^2 \gamma_{\parallel}^2}. \quad (16)$$

Черенковская неустойчивость может развиваться только тогда, когда  $\omega_p > k_{\perp} u \gamma_{\parallel}$ .

Решения дисперсионных уравнений в резонаторе (как фрагменте замедляющей системы) имеет следующий вид:

$$k_{z1,2,3} = k_{z0} + \omega' / |v_{до}| + \delta_{1,2,3}; \quad (17)$$

$$k_{z4} = -k_{z0} - \omega' / |v_{до}|; \quad (18)$$

$$k_{z1,2,3} = k_{z0,1,2} \pm \frac{\omega'}{|v_{до1,2}|} + \delta_{1,2,3}; \quad (19)$$

$$k_{z4} = -k_{z0,1,2} \pm \frac{\omega'}{|v_{до1,2}|}. \quad (20)$$

Решения (17, 18) реализованы для черенковской пучковой неустойчивости, а решения (19), (20) В- и Е-типов соответственно для магнитно-циклотронных пучковых неустойчивостей;  $\omega'$  — отстройка частоты от точного резонанса.

Решением дисперсионного уравнения относительно  $\omega'$  является результат рассмотрения начальной задачи, решением его относительно  $k_z$  является результат рассмотрения граничной задачи.

Все эти решения необходимы для исследования пучковых неустойчивостей в конечных системах.

Таким образом, при взаимодействии пучков заряженных частиц со средней возникают пучковые и плазменные неустойчивости, которые приводят к возбуждению в спектре колебаний гармоник. Развитие этих «спутельных» неустойчивостей существенно и приводит к уширению спектра. Дополнительно необходимо рассматривать магнитно-циклотронные пучковые неустойчивости на волнах В- и Е-типов на встречной и попутной волнах в случаях сплошного и трубчатого пучков при больших и малых расстройках. С учетом этих типов пучковых неустойчивостей ширина полосы и уширение спектральной линии возрастает.

Результаты исследования влияния различных параметров (температуры, размеров замедляющей системы, плотности активной среды и пучка, ускоряющего напряжения) на ширину спектра и уширение спектральной линии будут опубликованы в последующих работах.

**Список литературы:** 1. *Бернашевский Г. А.* Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ. М., 1965. 96 с. 2. *Богданкевич Л. С., Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* Плазменная СВЧ электроника // *Успехи физ. наук.* М., 1981. № 1. С. 3—32. 3. *Fridman M.* // *Appl. Phys. Zett.* 1975. Vol. 26. P. 366. 4. *Ерохин Н. С., Кузелев М. В., Моисеев С. С.* Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. М., 1982. 272 с.

Поступила в редколлегию 06.12.88

В. И. МЕЛЕШКО, канд. техн. наук, В. И. ВЬЮНИК, Б. И. ГОНЧАРОВ,  
канд. техн. наук, Т. А. МАЛАШИХИН

### О МНОГОЗОНДОВОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ МОДУЛЯ И ФАЗЫ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ СВЧ-ТРАКТА

Быстрое развитие техники СВЧ требует создания совершенных методов и средств измерения параметров СВЧ-трактов. Особое значение при этом приобретает возможность автоматизации процесса измерений с использованием современных микропроцессорных средств. Применение этих средств позволяет получить значительно более высокие точностные характеристики и существенно увеличить производительность создаваемых измерительных комплексов.

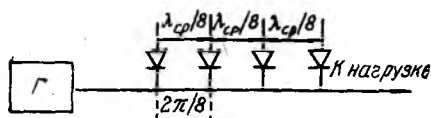


Рис. 1

Один из основных параметров, характеризующих передачу энергии по СВЧ тракту — комплексный коэффициент отражения  $\rho = |\rho| \exp [i\varphi]$ , где  $|\rho|$  — модуль коэффициента отражения, а  $\varphi$  — его фаза.

В работе исследован известный [1] четырехзондовый метод определения модуля и фазы комплексного коэффициента отражения. Достоинством его является то, что он легко поддается автоматизации.

Приводится вывод явных формул для  $\rho$  и  $\varphi$ , изучены точностные характеристики этого метода, а также возможные его модификации для  $n$  — детекторов. Тем самым развиваются многозондовые методы измерения  $\rho$  и  $\varphi$  с использованием микропроцессорных средств. Основное внимание уделено измерению фазы. Данные методы успешно применяются в автоматизированных системах контроля СВЧ элементов.

Суть метода четырех зондов состоит в следующем.

В линии с четырьмя зондами (рис. 1), расположенными один от другого на расстоянии  $\lambda_{ср}/8$ , (где  $\lambda_{ср}$  — расчетная длина волны в волноводе на средней частоте), измеряются напряжения, наводимые полями падающей и отраженной волны в зондах. Суммарные поля падающей и отраженной волн в точках размещения зондов описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1 &= |E_n| \cos(\omega t - 3\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t + 3\pi\delta/8 + \varphi); \\ E_2 &= |E_n| \cos(\omega t - \pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t + \pi\delta/8 + \varphi); \\ E_3 &= |E_n| \cos(\omega t + \pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t - \pi\delta/8 + \varphi); \\ E_4 &= |E_n| \cos(\omega t + 3\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t - 3\pi\delta/8 + \varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $|E_n|$  и  $|E_0|$  — амплитуды падающей и отраженной волны;  $\varphi$  —

фаза отраженной волны,  $\delta = \lambda_{cp}/\lambda$  — расстройка, вызванная отличием рабочей длины волны от ее среднего значения. Напряжения на нагрузках квадратичных детекторов равны  $U_{\partial k} = aE_k^2$ , ( $k$  — номер детектора) (2).

После подстановки (1) в (2) и выделения постоянной составляющей получим значения напряжений на нагрузках детекторов:

$$\begin{aligned} U_{\partial 1} &= a |E_n|^2 / 2 [1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(3\pi\delta/4 + \varphi)]; \\ U_{\partial 2} &= a |E_n|^2 / 2 [1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(\pi\delta/4 + \varphi)]; \\ U_{\partial 3} &= a |E_n|^2 / 2 [1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(\pi\delta/4 - \varphi)]; \\ U_{\partial 4} &= a |E_n|^2 / 2 [1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos(3\pi\delta/4 - \varphi)], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $|\rho| = |E_0|/|E_n|$  — модуль коэффициента отражения, а  $a$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств детектора. Примем  $a$  одинаковыми для всех детекторов и равными единице. Найдем из (3) выражение для  $\varphi$  и  $|\rho|$ .

Вычитая из  $U_{\partial 1}U_{\partial 3}$ , а из  $U_{\partial 2}U_{\partial 4}$ , имеем

$$\begin{aligned} U_x &= U_{\partial 1} - U_{\partial 3} = -2 |E_n|^2 |\rho| \sin \pi\delta/2 \sin(\varphi + \pi\delta/4); \\ U_y &= U_{\partial 2} - U_{\partial 4} = -2 |E_n|^2 |\rho| \sin \pi\delta/2 \sin(\varphi + \pi\delta/4). \end{aligned}$$

Откуда

$$U_x |U_y = \sin(\varphi + \pi\delta/4) | \sin(\varphi - \pi\delta/4); \quad U_x/U_y (\sin\varphi \cos\pi\delta/4 - \cos\varphi \sin\pi\delta/4) = \sin\varphi \cos\pi\delta/4 + \cos\varphi \sin\pi\delta/4.$$

Путем несложных преобразований получаем выражение

$$\varphi = \text{arctg} [(-U_x - U_y)/(U_y - U_x) \text{tg}\pi\delta/4]. \quad (4)$$

Возводя в квадрат  $U_x$  и  $U_y$  и складывая, записываем

$$\begin{aligned} U_x^2 + U_y^2 &= 4 |\rho|^2 \sin^2 \pi\delta/2 \sin^2(\varphi + \pi\delta/4) + 4 |\rho|^2 \sin^2 \pi\delta/2 \sin^2(\varphi - \pi\delta/4) = \\ &= 2 |\rho|^2 \sin^2 \pi\delta/2 [2 \sin^2 \varphi \cos^2 \pi\delta/4 + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \pi\delta/4] = \\ &= 2 |\rho|^2 \sin^2 \pi\delta/2 [\cos 2\varphi (-\cos^2 \pi\delta/4 + \sin^2 \pi\delta/4) + \\ &\quad + (\cos^2 \pi\delta/4 - \sin^2 \pi\delta/4)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\rho| = \sqrt{(U_x^2 + U_y^2)/4 \sin^2 \pi\delta/2 [\cos 2\varphi (\sin^2 \pi\delta/4 - \cos^2 \pi\delta/4) + (\cos^2 \pi\delta/4 - \sin^2 \pi\delta/4)]}. \quad (5)$$

Если расстройка отсутствует, т.е.  $\delta = 1$ , то выражения (4), (5) упрощаются. Например,

$$\varphi = \text{arctg} [-U_x - U_y)/(U_y - U_x)]. \quad (6)$$

Анализируя установленные формулы, можно прийти к некоторым общим выводам относительно методики измерений фазы, наметить пути повышения точности и достоверности таких измерений.

Прежде всего отметим, что правая часть формулы (6) представляет собой арктангенс в смысле главного значения, функции  $\text{arctg}$ , обратной функции  $\text{tg}$ . Значения функции  $\text{arctg}$  лежат в интервале от  $-\pi/2$

до  $\pi/2$ . При короткозамыкающей (КЗ) нагрузке фаза  $\varphi = \pi$ , так как при отражении от металла происходит скачок фазы на  $\pi$ . Формула же (6) дает при КЗ нагрузке  $\varphi = 0$ . Поэтому в выражение (6) нужно добавить член, равный  $\pi$ , т. е. рассматривать не главное значение  $\text{arctg}$ , а седнюю с ним ветвь

$$\varphi = \text{arctg} [(-U_x - U_y)/(U_y - U_x)] + \pi. \quad (7)$$

Важным моментом является также относительное расположение зондов и поля стоячей волны при К.З. нагрузке. В случае симметричного расположения зондов относительно максимума стоячей волны, вычисляемая по формуле (7) фаза  $\varphi = \pi$ . При несимметричном же их расположении к истинному значению фазы  $\varphi_{\text{ист}}$  добавляется некоторая величина  $\varphi_{\text{доб}}$  (добавочная), которую необходимо в этом случае постоянно учитывать, т.е.  $\varphi_{\text{ист}} = \varphi_{\text{изм}} - \varphi_{\text{доб}}$ , где  $\varphi_{\text{изм}}$  — измеряемое и вычисляемое значение фазы. Таким образом, необходима начальная калибровка измерителя при КЗ нагрузке, для определения  $\varphi_{\text{доб}}$ .

Перейдем к обобщению описанного метода для случая произвольного числа зондов  $n \geq 2$ . Для этого рассмотрим сначала шестизондовую систему и запишем поля в точках размещения зондов, аналогично тому, как это сделано в (1). Поле в точках размещения зондов есть суперпозиция полей падающей и отраженной волны. С учетом различия набега фазы и дополнительного сдвига фазы отраженной волны, вызванного скачком фазы на нагрузке (отсчет фазы производится от плоскости симметрии анализатора), получим систему уравнений, описывающую поля в точках размещения зондов:

$$\begin{aligned} E_1 &= |E_n| \cos(\omega t - 5\pi/8) + |E_0| \cos(\omega t + 5\pi/8 + \varphi); \\ E_2 &= |E_n| \cos(\omega t - 3\pi/8) + |E_0| \cos(\omega t + 3\pi/8 + \varphi); \\ E_3 &= |E_n| \cos(\omega t - \pi/8) + |E_0| \cos(\omega t + \pi/8 + \varphi); \\ E_4 &= |E_n| \cos(\omega t + \pi/8) + |E_0| \cos(\omega t - \pi/8 + \varphi); \\ E_5 &= |E_n| \cos(\omega t + 3\pi/8) + |E_0| \cos(\omega t - 3\pi/8 + \varphi); \\ E_6 &= |E_n| \cos(\omega t + 5\pi/8) + |E_0| \cos(\omega t - 5\pi/8 + \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Данная система записана для случая  $\lambda = \lambda_{\text{ср}}$ , т. е. для некоторой фиксированной длины волны  $\lambda_{\text{ср}}$ , относительно которой определены расстояния между зондами, равные  $\lambda_{\text{ср}}/8$ , или в угловых единицах  $2\pi/8$ . Для других длин волн  $\lambda \neq \lambda_{\text{ср}}$  набег фазы в точках размещения зондов превысит набег фазы, присутствующий в формулах (8), во столько раз, во сколько раз  $\lambda_{\text{ср}}$  будет больше  $\lambda$ .

С учетом этого формулы (8) можно переписать для общего случая  $\lambda \neq \lambda_{\text{ср}}$  в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= |E_n| \cos(\omega t - 5\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t + 5\pi\delta/8 + \varphi); \\ E_2 &= |E_n| \cos(\omega t - 3\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t + 3\pi\delta/8 + \varphi); \\ E_3 &= |E_n| \cos(\omega t - \pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t + \pi\delta/8 + \varphi); \\ E_4 &= |E_n| \cos(\omega t + \pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t - \pi\delta/8 + \varphi); \\ E_5 &= |E_n| \cos(\omega t + 3\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t - 3\pi\delta/8 + \varphi); \\ E_6 &= |E_n| \cos(\omega t + 5\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t - 5\pi\delta/8 + \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая (1) и (9) и используя метод математической индукции, записываем систему уравнений для произвольного числа детекторов  $n$ :

$$E_k = |E_n| \cos(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) + |E_0| \cos(\omega t + (n - 2k + 1)\pi\delta/8), \quad (10)$$

где  $n$  — общее число детекторов;  $k$  — номер детектора,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Приводим систему уравнений, описывающих напряжения на нагрузках детекторов, подставив (10) в (2):

$$\begin{aligned} U_{\partial k} &= aE_k^2 = a [|E_n| \cos(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) + \\ &+ |E_0| \cos(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8 + \varphi)]^2 = a |E_n|^2 [\cos(\omega t - \\ &- (n - 2k + 1)\pi\delta/8) + |\rho| \cos(\omega t + (n - 2k + \\ &+ 1)\pi\delta/8 + \varphi)]^2 = a |E_n|^2 [\cos^2(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) + \\ &+ 2|\rho| \cos(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) \cos(\omega t + (n - \\ &- 2k + 1)\pi\delta/8 + \varphi) + |\rho|^2 \cos^2(\omega t + (n - 2k + 1)\pi\delta/8 + \varphi)]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках содержит три слагаемых. Первое слагаемое можно представить как

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) &= \cos^2 \omega t \cos^2((n - 2k + \\ &+ 1)\pi\delta/8) + 2\cos \omega t \cos((n - 2k + 1)\pi\delta/8) \sin \omega t \sin((n - \\ &- 2k + 1)\pi\delta/8) + \sin^2 \omega t \sin^2((n - 2k + 1)\pi\delta/8). \end{aligned}$$

Путем несложных преобразований, выделяя постоянную (не зависящую от частоты) составляющую, получаем

$$\cos^2(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) = 1/2. \quad (11)$$

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} 2|\rho| \cos(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) \cos(\omega t + (n - 2k + 1)\pi\delta/8 + \varphi) &= \\ = 2|\rho| \cos(-(n - 2k + 1)\pi\delta/4 - \varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Выделяя в (12) постоянную составляющую, имеем

$$\begin{aligned} 2|\rho| \cos(\omega t - (n - 2k + 1)\pi\delta/8) \cos(\omega t + (n - 2k + 1)\pi\delta/8 + \varphi) &= \\ = 2|\rho| \cos(-(n - 2k + 1)\pi\delta/4 - \varphi)/2 = \\ = |\rho| \cos((n - 2k + 1)\pi\delta/4 + \varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично для третьего слагаемого находим постоянную составляющую

$$|\rho|^2 \cos^2(\omega t + (n - 2k + 1)\pi\delta/8 + \varphi) = |\rho|^2/2. \quad (14)$$

Складывая (12), (13), (14), получаем систему, описывающую напряжения на нагрузках детекторов:

$$U_{\partial k} = a |E_n|^2/2 [1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos((n - 2k + 1)\pi\delta/4 + \varphi)],$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что ошибки в измерении напряжения  $U_{\partial k}$  на детекторах являются гауссовыми, с нулевым средним и дисперсиями

$\sigma_k^2$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда оценка  $\hat{\theta}$  максимального правдоподобия неизвестных параметров  $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$  будет определяться как

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} \|\Sigma^{-1}(F(\theta) - y)\|^2, \quad (15)$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма вектора,  $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ;

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} f_1(\theta) \\ \vdots \\ f_n(\theta) \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$f_k(\theta) = a |E_n|^2 / 2 [1 + |\rho|^2 + 2|\rho| \cos((n - 2k + 1)\pi/4 + \varphi)],$$

$$y_k = U_{\partial_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Численное определение оценки осуществляется итерационным методом псевдообратных операторов [3]

$$\theta^{l+1} = \theta^l - (\Sigma^{-1}F_{\theta}(\theta^l))^+ (\Sigma^{-1}(F_{\theta}(\theta^l) - y)),$$

где  $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$  — псевдообратная матрица;  $A^*$  — транспонированная матрица,  $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

В соответствии со статистической корреляционно-информационной теорией радиосистем [4] дисперсионная матрица оценки  $\theta$  есть

$$D(\hat{\theta}) = [F_{\hat{\theta}}^*(\theta_n) \Sigma^{-2} F_{\theta}(\theta_n)]^{-1} = [\Sigma_{k=1}^n \sigma_k^{-2} f_{\hat{\theta}}^*(\theta_n) f_{\theta}(\theta_n)]^{-1}, \quad (16)$$

( $\theta_n$  — истинные значения искомых параметров).

Из (16) следует, что дисперсия оценки фазы имеет вид

$$D(\hat{\varphi}) = [\Sigma_{k=1}^n \sigma_k^{-2} f_{\varphi}^*(\theta_n) f_{\varphi}(\theta_n)]^{-1}. \quad (17)$$

Отсюда для четырехзондового метода, например, получаем

$$D(\hat{\varphi}) = \sigma^{-2} a |E_n|^2 / 2 (F^*F)^{-1} = \sigma^{-2} a |E_n|^2 / 16. \quad (18)$$

Здесь

$$F = \begin{pmatrix} -2 \sin(3\pi/4 + \varphi); \\ -2 \sin(\pi/4 + \varphi); \\ 2 \sin(\pi/4 - \varphi); \\ 2 \sin(3\pi/4 - \varphi). \end{pmatrix}.$$

Из (18) видно, что при равноточных измерениях напряжений на нагрузках детекторов погрешность измерения фазы при гауссовых помехах не зависит от значения фазы.

Аналогично устанавливается дисперсия оценки фазы в соответствии с (15) при равноточных измерениях напряжений на нагрузках детекторов в общем случае  $n$  детекторов. Эта дисперсия имеет вид

$$D(\hat{\varphi}) = \sigma^{-2} a |E_n|^2 / 4n$$

и также является инвариантной относительно самого значения фазы.

На рис. 2 показаны значения дисперсии  $D(\varphi)$  оценки  $\varphi$  (зависимость от различных истинных значений фазы  $\varphi$  и для различных значений количества зондов  $n$ ). Прямая  $\eta_1(\varphi)$  соответствует  $n = 2$ ;  $\eta_2(\varphi) - n = 4$ ;  $\eta_3(\varphi) - n = 6$ . При этом взято  $\sigma^{-2}a|E_n|^2/2 = 1$ . Для неравноточных измерений, когда  $a|E_n|^2/2 = 1$ ;  $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = 1$ ;  $\sigma_2^2 = 0,5$ , дисперсия  $D(\varphi)$ , как это следует из общей формулы (17), принимает вид соответствующий кривой  $\eta_4(\varphi)$ .

В таблице приведены результаты различных значений, полученные четырехзондовым методом и при помощи измерительной линии при различных нагрузках. Измерения проводились на частоте 9,6 ГГц. Из таблицы видно, что отклонения значений фаз вполне допустимое. Преимуществом четырехзондового метода является то, что измерения велись в автоматическом режиме.

Номер измерения	Фаза, измеренная четырех зондовым анализатором	Фаза, измеренная измерительной линией	Отклонение значений фаз
1	0,75	0,66	0,09
2	0,825	0,77	0,055
3	0,809	0,79	0,019
4	0,994	0,962	0,032
5	0,734	0,802	-0,068

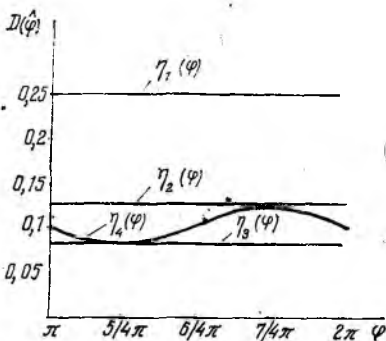


Рис. 2

**Список литературы:** 1. Бондаренко И. К., Дейнега Г. А., Маграчев З. В. Автоматизация измерений параметров СВЧ трактов. М., 1969. 372 с. 2. Валитов Р. А. Радиотехнические измерения. М., 1963. 632 с. 3. Мелешко В. И. Итерационные методы возмущенных псевдообратных операторов для вычисления обобщенных решений желинейных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. № 3. С. 573—585. 4. Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М., 1981. 287 с.

Поступила в редколлегию 29.07.88

УДК 621.382.2

В. П. ТИМОФЕЕВ, канд. физ.-мат. наук, С. С. ХВОСТОВ,  
Е. В. КРАВЕЦ, Б. И. ГОНЧАРОВ, канд. техн. наук

### ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ СВЧ-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХСАНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

Активное применение микропроцессорной техники в измерительных системах различного назначения позволяет реализовать многофункциональные адаптивные устройства, которые обладают высокими метрологическими характеристиками и существенно повышают производительность труда, например, в службах входного и выходного конт-

роля. Значительные усилия разработчиков направлены на создание современных автоматизированных измерительных систем (АИС) для регистрации важнейших параметров СВЧ-двухполюсников, четырехполюсников и СВЧ-полупроводниковых элементов. Самостоятельный интерес представляет автоматизированное измерение электрических параметров СВЧ-полупроводниковых диодов различных классификационных групп.

Задачи автоматизированного измерения с удовлетворительной точностью полных входных сопротивлений исследуемых СВЧ-диодов, помещенных в измерительную диодную камеру, а также таких электрических параметров, как постоянная времени параметрических диодов, определили необходимость усложнить схему разрабатываемой системы. Классическая схема рефлектометра, позволяющая измерять только модуль коэффициента отражения, была дополнена системой автоматической регистрации фазы коэффициента отражения, выполненной на основе сосредоточенных СВЧ-зондовых датчиков [1]. Выбор указанной схемы построения АИС дает возможность измерить двумя независимыми способами модуль коэффициента отражения и на этой основе калибровать показания, полученные по выходным напряжениям зондовых датчиков, т. е. измерить с необходимой точностью фазу коэффициента отражения. При этом можно избежать неоднозначности отсчета возникающих фазовых сдвигов [2]. Сравнения с другими известными методами измерения модуля и фазы коэффициента отражения [1; 2] показывают преимущество многозондового метода, поскольку в нем отсутствуют механически подвижные элементы конструкции АИС, имеется возможность непосредственной цифровой обработки выходных сигналов датчиков.

Современная тенденция к миниатюризации измерительной радиоэлектронной аппаратуры заставила авторов статьи попытаться достигнуть решения поставленных задач путем конструктивного выполнения СВЧ-тракта АИС на основе полосковых несимметричных линий передачи. Была разработана топология, выбраны необходимые навесные элементы, изготовлены элементы фиксации, крепления и стыковки со стандартной СВЧ-измерительной аппаратурой. Однако проведенные исследования показали, что возникающие в несимметричных линиях паразитные высокочастотные поверхностные типы волн, излучения и отражения в местах стыка подложек и местах крепления навесных элементов не позволяют получить требуемые метрологические характеристики АИС. С аналогичными проблемами столкнулись авторы работы [3].

Среди линий передач сантиметрового диапазона закрытого типа наиболее приемлемым по совокупности характеристик является стандартный прямоугольный волновод [1]. Основное внимание было сосредоточено на разработке зондовых СВЧ-датчиков. Основываясь на рекомендациях [1, 4], рассмотрена схема, при которой измерение модуля и фазы коэффициента отражения и вытекающих из них СВЧ-параметров исследуемых двухполюсников производится путем регистрации картины распределения электромагнитной волны в измерительном тракте [2].

Принцип работы датчика основан на возбуждении электромагнитного поля в запердельном круглом волноводе, который через свой торец связан с основным измерительным трактом посредством круглого отверстия в середине широкой стенки прямоугольного волновода. Амплитуда возбуждаемого поля пропорциональна амплитуде стоячей волны основного тракта в месте расположения СВЧ-датчика. Датчики разнесены вдоль оси волновода на расстояние, кратное нечетному числу  $\Lambda/8$ , где  $\Lambda$  — длина рабочей волны в измерительном тракте.

Необходимый диаметр отверстия связи оценивался из желаемого переходного ослабления (15÷20 дБ) и окончательно определялся экспериментально. Требования к геометрии отверстия связи, запердельного волновода и остальным элементам предъявлялись следующие: отсутствие паразитных резонансов на рабочей частоте, минимальные собственные коэффициент стоячей волны по напряжению (КСВН) и затухание, вносимые датчиком как неоднородностью, в основной измерительный тракт, обеспечение необходимого уровня связи и ее достаточная «сосредоточенность» для оптимальной работы детекторного датчика.

Проведенные эксперименты по выбору активного полупроводникового элемента в схеме датчика, способов его крепления, обеспечивающего необходимую связь с полем в запердельном волноводе и его смену при настройке и регулировке, показали, что наиболее полно удовлетворить перечисленным требованиям позволяет конструкция зонда с использованием СВЧ-смесительных диодов типа КА120А или АА112А с металлоглазным корпусом. Осевая и продольная фиксация СВЧ-диода осуществляется с помощью полой втулки из фторопласта, которая служит диэлектрическим заполнением запердельного волновода и обеспечивает формирование петли связи с электромагнитным полем.

Сложной задачей настройки разрабатываемой системы является обеспечение выравнивания амплитудно-частотных характеристик зондовых датчиков, поскольку они определяют индивидуальную чувствительность каждого зонда и, в конечном счете, определяют метрологические характеристики всей АИС. Исследования показали, что при рабочих уровнях СВЧ-мощности в измерительном тракте  $P = 1 \div 3$  мВт датчики, выполненные на основе полупроводниковых диодов КА120А, обеспечивают выходной сигнал  $U \geq 150$  мВ при нулевом токе смещения  $I_{см}$ . В режиме работы тракта на согласованную нагрузку при различных  $P$  индивидуальное выравнивание чувствительности зондовых датчиков осуществлялось регулировкой в наибольших пределах сопротивления нагрузочного резистора. Однако для этого производилась предварительная подборка экземпляров СВЧ-диодов по максимальной идентичности вольт-амперных характеристик на рабочем участке. При использовании смесительных диодов Шоттки типа АА112А, работающих при  $I_{см} \neq 0$ , имелась дополнительная возможность настройки идентичности зондовых датчиков за счет индивидуального подбора тока смещения.

На рис. 1 приведена типичная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) чувствительности исследуемого зондового датчика,

снятая с помощью свип-генератора прибора Р2-61 по его индикатору, для выбранного отверстия связи диаметром 4 мм (кривая 1). Сигнал датчика подавался в канал отраженной волны Р2-61 при работе его в режиме измерения затухания. Многозондовый СВЧ-датчик должен вносить минимально возможные возмущения в основной измерительный тракт, гарантируя при этом необходимую чувствительность в диапазоне измеряемых КСВН от 1,06 до 3,5. Рис. 2 иллюстрирует частотную характеристику вносимого в измерительный волноводный тракт суммарного затухания разработанного узла СВЧ зондовых датчиков. Для сравнения здесь же приведена АЧХ четырехзондового датчика в микрополосковом исполнении (кривая 2).

Исходными величинами для расчета важнейших СВЧ параметров двухполюсников или полупроводниковых диодов являются величины

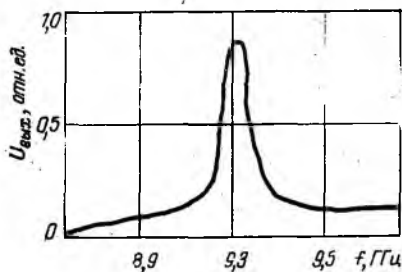


Рис. 1

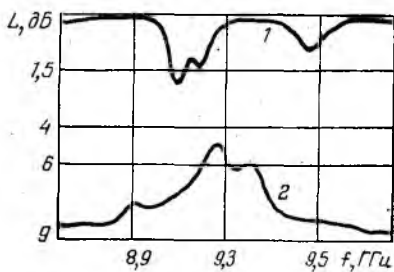


Рис. 2

модуля  $|\dot{\Gamma}|$  и фазы  $\varphi$  комплексного коэффициента отражения  $|\dot{\Gamma}|$ . Используя методики [2,4], эти величины можно определить по измеренным выходным сигналам многозондных СВЧ-датчиков. Для случая квадратичного детектирования выходные сигналы датчиков, разнесенные на расстояние  $\Lambda/8$  вдоль оси тракта, оконечная нагрузка которого имеет коэффициент отражения  $\dot{\Gamma} = |\dot{\Gamma}| e^{j2\alpha}$ :

$$U_k = 1 + |\dot{\Gamma}|^2 + 2|\dot{\Gamma}| \cos \left[ \varphi - \frac{\pi}{2} (k-1) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда, воспользовавшись приемами [2, 4], с помощью несложных преобразований получим выражения для  $|\dot{\Gamma}|$  и  $\varphi$  в случае трехзондового узла СВЧ-датчиков:  $|\dot{\Gamma}| = \sqrt{A - 1} - \sqrt{A}$ , где

$$A = (m_{13} + 1)^2 (m_{32} + m_{12})^2 [(m_{13} - 1)^2 (m_{32} + m_{12})^2 + (m_{13} + 1)^2 (m_{12} + m_{32} - 2)^2]^{-1};$$

$$m_{13} = U_1/U_3; \quad m_{12} = U_1/U_2; \quad m_{32} = U_3/U_2;$$

$$\varphi = \frac{1 + |\dot{\Gamma}|^2}{2|\dot{\Gamma}|} \left( \frac{m_{13} - 1}{m_{13} + 1} \right) \sin 2\beta x_1 - \frac{1 + |\dot{\Gamma}|^2}{2|\dot{\Gamma}|} \left( \frac{m_{13} + m_{32} - 2}{m_{32} + m_{12}} \right) \cos 2\beta x_1.$$

Здесь  $\beta = 2\pi/\Lambda$  — фазовая постоянная в линии;  $x_1$  — расстояние от условного конца линии до первого зонда. Исследования показали, что

для данного метода существует некая оптимальная величина  $x_1$ , позволяющая снизить погрешность регистрации  $|\dot{\Gamma}|$  и  $\varphi$ . В работе принято  $x_1 = 3\lambda/4$ . Необходимые калибровки показаний датчиков выполнены при работе на согласованную нагрузку ( $|\Gamma| = 0$ ) и при использовании короткозамыкателя в плоскости включения нагрузки ( $|\Gamma| = 1$ ).

В таблице приведены результаты контрольных измерений, позволяющие судить о полученных метрологических характеристиках АИС, в которой использован трехзондовый узел СВЧ-датчиков. В качестве образцового прибора при измерении  $|\Gamma|$ ,  $\varphi$  и КСВН  $= (1 + |\Gamma| / 1 - |\Gamma|)$  применялась волноводная измерительная линия типа P1-28 совместно с измерителем напряжений типа В8-7. Согласно техническим данным собственная относительная погрешность измерений с использованием указанной аппаратуры в качестве образцовой не превышает для КСВН 3,9 %.

Таким образом, показана перспективность и преимущества перед другими методами применения многозондовых СВЧ сосредоточенных датчиков для построения современных АИС на базе использования микроЭВМ. Приведены результаты исследований, позволяющие обосновать выбор оптимальной конструкции СВЧ-датчика, выполненного на волноводных элементах закрытого типа и полупроводниковом смесительном диоде в металлостеклянном корпусе. Получены в аналитической форме выражения для модуля и фазы коэффициента отражений через выходные напряжения зондовых датчиков, которые для вычисления искомых величин и вывода на протоколирование требуют минимальной затраты аппаратных средств.

Приведенные оценки метрологических характеристик разработанной АИС с использованием узла СВЧ-зондовых датчиков при измерении параметров полупроводниковых СВЧ-диодов показали, что погрешность проведения автоматизированных измерений не выходит за пределы, оговоренные в соответствующих разделах ГОСТов 19656.0—19656.15.

Список литературы: 1. Бондаренко И. К., Дейнега Г. А., Маграчев З. В. Автоматизация измерений параметров СВЧ-трактов. М., 1969. 304 с. 2. Тишер Ф. Техника измерений на сверхвысоких частотах. Справочное руководство: Пер. с нем. М., 1963. 368 с. 3. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Полосковые линии передачи. М., 1980. 312 с. 4. Схема для автоматизированных измерений коэффициентов отражения на сантиметровых волнах / Боцман В. И., Тимофеев В. П., Гончаров Б. И. и др. // Радиотехника. 1984. Вып. 70. С. 112—115.

Регистрируемый параметр	Пределы измерений	Средняя относительная погрешность, %
Коэффициент стоячей волны по напряжению (КСВН)	более 1,2	$\pm 1,8$
	до 1,7	$\pm 1,2$
	» 2,3	$\pm 2,6$
	» 3,5	$\pm 7,8$
Фаза коэффициента отражения	» $30^\circ$	$\pm 10$
	» $180^\circ$	$\pm 2,6$

Поступила в редколлегию 02.08.88

*В. И. ВЛАСОВ, А. А. КОНТАРЬ*, канд. техн. наук,  
*А. И. ТЕРЕЩЕНКО*, д-р техн. наук

## ПЕРЕМЕННЫЙ ВОЛНОВОДНЫЙ АТТЕНУАТОР НА ОСНОВЕ ГИБКОГО ВОЛНОВОДА

В технике СВЧ для уменьшения мощности радиосигнала, распространяющегося по волноводному тракту, широко используются аттенуаторы (ослабители). Аттенуатор представляет собой четырехполюсник, на выходе которого мощность сигнала по сравнению с мощностью на входе уменьшена вследствие поглощения части мощности на поглощающих элементах или отражения от реактивных элементов.

Известно несколько типов механически перестраиваемых волноводных аттенуаторов. Наиболее простую конструкцию имеют аттенуаторы поглощающего типа, действие которых основано на затухании электромагнитных волн в поглощающих материалах. Из-за трудности отвода тепла от поглощающего элемента, расположенного внутри волновода, такие аттенуаторы применяются только в трактах низкого уровня мощности. Начальное затухание аттенуаторов данного типа в сантиметровом диапазоне волн составляет  $0,2 \div 0,5$  дБ, максимальное затухание — около 30 дБ [1]. Усовершенствованные конструкции обеспечивают минимальный фазовый сдвиг [2; 3] и высокую точность установления заданного значения затухания [4].

Основным типом аттенуаторов, используемых для создания эталонных мер ослабления в диапазоне частот от 3 до 200 ГГц, являются поляризационные аттенуаторы, действие которых основано на зависимости поглощения электромагнитных волн от плоскости их поляризации. К достоинствам таких аттенуаторов нужно отнести расчетный закон изменения ослабления, высокую стабильность (временную, температурную и др.) и частотную независимость ослабления, независимость электрической длины аттенуатора от вводимого ослабления, значительный частотный диапазон, равный 0,85 рабочей полосы стандартного прямоугольного волновода. Недостатками поляризационных аттенуаторов являются нелинейность шкалы ослабления, сравнительно высокий коэффициент стоячей волны, большие габаритные размеры, низкий допустимый уровень мощности, высокая стоимость [5].

В волноводных трактах высокого уровня мощности применяются аттенуаторы на делителях мощности [1; 5], в которых уменьшение мощности происходит вследствие полного поглощения ее части, отделенной от основного потока с помощью делителя мощности, представляющего собой пассивный четырехполюсник. Характеристика ослабления данных аттенуаторов может быть рассчитана с хорошей точностью; начальное ослабление невелико — от долей децибела до нескольких децибел. Уровень рабочей мощности определяется только электрической прочностью элементов конструкции (направленных ответвителей) и возможностями присоединенных к ним поглощающих нагруз-

зок. Недостатки подобных аттенуаторов — сложность конструкции, значительные размеры, высокая стоимость.

Еще одним типом переменных волноводных аттенуаторов являются предельные [5], действие которых основано на затухании электромагнитных волн внутри волновода при длине волны больше критической. У предельных аттенуаторов ослабление меняется по линейному закону в большом (до 100—140 дБ) динамическом диапазоне, однако у них сравнительно высокий КСВ, высокое начальное ослабление, сложная конструкция.

Существенный недостаток известных конструкций механически перестраиваемых аттенуаторов — наличие в волноводе отверстий, через которые осуществляется связь механизма управления с перемещаемым регулирующим элементом. Чтобы воспрепятствовать электромагнитному излучению из этих отверстий, в конструкцию аттенуатора приходится вводить дополнительные поглощающие элементы и экраны.

В процессе работы над созданием эластичных волноводов из композиционных материалов авторы пришли к выводу, что возможность упругой деформации таких волноводов позволяет разработать на их основе механически перестраиваемые волноводные аттенуаторы. В данном случае регулировка ослабления может осуществляться путем сжатия эластичного волновода и изменения формы и размеров его поперечного сечения, что принципиально невозможно для жестких металлических волноводов.

При предварительных экспериментах использовался гибкий прямоугольный волновод из композиционного материала с электропроводящим покрытием внутренней поверхности. Он мог упруго деформироваться в поперечном сечении, имея высокую прочность на сжатие.

С физической точки зрения в основу работы аттенуатора положена зависимость мощности, проходящей по волноводу, от формы и размеров его поперечного сечения при неизменном периметре и конечной проводимости стенок. Такая зависимость в неявном виде для прямоугольного волновода, работающего на волне типа  $H_{10}$ , определяется выражением [6]:

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{8,69 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \right]}{129\pi b \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}},$$

где  $\Delta_{\text{пог}}$  — погонное затухание (дБ/м);  $\omega$  — круговая частота;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость;  $\sigma$  — проводимость материала стенок;  $\lambda_0$  — длина волны в свободном пространстве;  $a$  — ширина;  $b$  — высота волновода.

Деформация (сжатие) прямоугольного волновода может осуществляться усилием, направленным перпендикулярно к широким стенкам либо перпендикулярно к узким. В первом случае, когда уменьшается размер  $b$ , погонное затухание, как это следует из приведенной выше формулы, растет и при  $b \rightarrow 0$  стремится к бесконечности. Во втором

случае при уменьшении размера  $a$ , если  $a < \frac{\lambda_0}{2}$ , волновод находится в режиме отсечки и затухание (при достаточной длине деформированного участка) также стремится к бесконечности. В данном случае реализуется предельный аттенуатор.

Экспериментальные исследования переменного аттенуатора на отрезке гибкого волновода длиной 0,2 м показали, что при уменьшении размера  $b$  коэффициент стоячей волны КСВ достигает 2—2,5, а при уменьшении размера  $a$  превышает 18—20, что всегда наблюдается у несогласованного предельного аттенуатора [5]. Максимальное ослабление в обоих случаях было не менее 20 дБ.

Для уменьшения отражения сжатие волновода осуществлялось так, что деформация поперечного сечения волновода была наибольшей в середине отрезка волновода и уменьшалась к его концам.

Уменьшить КСВ можно одним из трех способов: увеличением длины волновода, введением в волновод развязывающего поглотителя и повышением поглощающей способности внутренней поверхности волновода. Первый способ приводит к нежелательному увеличению габаритных размеров аттенуатора. Кроме того, выполнение длинного отрезка эластичного волновода связано с технологическими трудностями и повышением расхода дорогостоящего серебра, входящего в состав электропроводящего покрытия. Второй и третий способ в исследуемой конструкции было решено совместить путем применения гибкого волновода с уменьшенной проводимостью внутренней поверхности.

Испытывались волноводы из композиционного материала, в котором наполнителем служил коллоидный графит [7], а связующим — каучук КЛСЕ. Сжатие производилось усилием, перпендикулярным к широким стенкам волновода. Другой вариант давал значения КСВ, превышающие 10 ÷ 15, и в дальнейшем не использовался. Меняя процентное содержание графита (от 20 % и выше), можно было уменьшать КСВ до 1,2 ÷ 1,1, снизив при этом начальное затухание волновода (в недеформированном состоянии) до 4 ÷ 6 дБ/м. Однако получение электромагнитной энергии через стенки волновода при малом содержании графита и потеря эластичности при высоком (разрушение после 10 ÷ 15 деформаций) привели к необходимости использовать композиционный материал иного типа. Он отличался от описанного тем, что коллоидный графит был заменен сначала углеволокном, а затем — углелентой.

Таким образом, был выполнен макет аттенуатора, состоящего из эластичного отрезка волновода с соединительными металлическими фланцами и механизма, деформирующего волновод с целью управления его затуханием.

Для согласования аттенуатора с волноводным трактом большое значение имеет форма кривой, по которой происходит деформация отрезка эластичного волновода в продольном его сечении. Реализовать заданную форму этой кривой можно только при определенной длине этого отрезка. Если учесть, что погонное затухание волновода сечением  $23 \times 10$  мм, выполненного из углеленты и силиконового каучука КЛСЕ (или УФ), составляет 12 ÷ 15 дБ/м, при длине отрезка 0,2 м начальное ослабление не превышает 3 дБ. Оно падает с уменьшением

длины отрезка, но здесь возникают трудности с согласованием. Поэтому мы остановились на отрезке длиной 0,15—0,2 м.

Отрезок волновода сжимался пластинами, одновременно перемещаемыми во встречном направлении с помощью механизма, показанного на рис. 1. Для регулировки ослабления вращался винт 5, который образует с ползунами 2 и 4 две винтовые пары с правой и левой резьбой. На ползунах укреплены пластины 1, сжимающие волновод 3.

Как видно из рис. 1, пластины на среднем участке (длины  $l$ ) параллельны друг другу, а затем отогнуты от оси волновода под некоторым углом  $\alpha$ . При обработке конструкции менялись  $d$  и  $\alpha$ .

В найденном опытным путем наилучшем варианте  $d = 40$  мм,  $\alpha = 15^\circ$ , длина пластин  $l = 100$  мм, радиус изгиба  $R = 50$  мм. Особое внимание должно быть уделено параллельности пластин на среднем участке.

Фланцы волновода изготавливались из латуни и соединялись с волноводом при помощи хвостовика — отрезка волновода, имеющего скос для плавного перехода к волноводу. При изготовлении волновода фланцы с хвостовиками надевались на оправку из алюминия или стали, имеющую поперечное сечение, соответствующее окну волновода. Затем производилась намотка углеренты под углом  $45^\circ$  к продольной оси волновода. Благодаря этому обеспечивалась возможность упругой деформации волновода как в продольном, так и в поперечном направлении, что предотвращало большие механические напряжения и разрушение аттенюатора при жестком закреплении его концов.

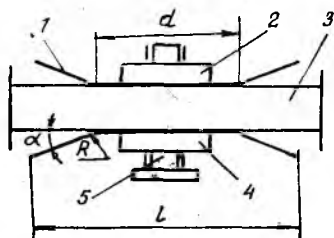


Рис. 1

Толщина стенок волновода, определенная опытным путем, составляла 2 мм. При этом обеспечивалась высокая механическая прочность как в процессе изготовления, так и эксплуатации, и отсутствие электромагнитного излучения через стенки. Наматывалось 10 слоев углеренты толщиной 0,15 мм. При намотке углеренты производилась ее пропитка связующим, затем осуществлялась полимеризация последнего (для ускорения процесса — при температуре 150—200 °С), после чего оправка извлекалась.

Предварительные испытания описанной выше конструкции аттенюатора на волноводе прямоугольного сечения показали, что он имеет недостаток — значительное начальное ослабление, обусловленное, в частности, недостаточным электрическим контактом между эластичным волноводом и хвостовиками фланцев.

Для уменьшения начального ослабления было испробовано плавное увеличение поперечного сечения от фланцев к середине отрезка волновода. Лучшие результаты дало увеличение размера  $b$  (высоты волновода). Недостатки такой конструкции — сложность изготовления оправки, которая должна быть составной, и невозможность использования углеренты шириной более 25 мм.

Наконец, была разработана конструкция аттенюатора на основе круглого волновода, работающего при диаметре 30 мм на волне  $H_{11}$ . Сопряжение круглого волновода с трактом стандартного прямоугольного сечения  $23 \times 10$  мм осуществлялось посредством плавных металлических переходов. Сжатие производилось в направлении вектора  $E$ .

Данная конструкция имела увеличенные в сравнении с предыдущими габаритные размеры и массу, но меньший коэффициент стоячей волны и существенно меньшее начальное ослабление (в связи с увеличением площади поперечного сечения волновода и лучшим контактом волновода с хвостовиками фланцев). Кроме того, она была более технологичной.

Для устранения ворсистости из-за отслоения отдельных нитей углероды первый ее слой наматывался на тонкий (0,05 мм) стеклоткани, пропитанной связующим. Отрицательного влияния на параметры аттенюатора это не оказывало [8].

Измерения параметров аттенюатора — начального ослабления, диапазона изменения ослабления, диапазона частот, коэффициента стоячей волны — производились на панорамном измерителе КСВ Р2-61. Схема измерений была модифицирована включением третьего

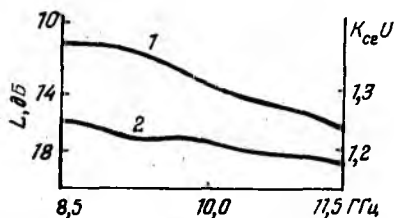


Рис. 2

направленного детектора, благодаря чему можно было измерять ослабление и КСВ, не разбирая волноводный тракт.

Электрические параметры разработанных аттенюаторов приведены в таблице.

Конструкции	Начальное ослабление, дБ	Диапазон изменения ослабления, дБ		КСВ не более
		На частоте 8,5 ГГц	На частоте 11,5 ГГц	
На прямоугольном волноводе	3,0	2,0 ÷ 20,0	3,0 ÷ 24,0	1,35
На круглом волноводе	1,8	1,0 ÷ 20,0	1,8 ÷ 24,0	1,30

Аттенюаторы имеют в заданном частотном диапазоне частотную зависимость ослабления и КСВ. Для круглого волновода при ослаблении порядка 10 дБ на частотах 8 ÷ 5 — 11,5 ГГц это иллюстрируется на рис. 2, где кривой 1 обозначено ослабление, 2 — КСВ.

Допустимый уровень мощности на входе аттенюатора определялся, исходя из допустимой температуры нагрева стенок эластичного волновода, которая, в свою очередь, зависела от термостойкости связующего. Поскольку максимальная рабочая температура применяющихся связующих была примерно 300—350 °С, аттенюатор на прямоугольном волноводе мог работать при мощностях до 50 Вт, на круглом — до 70 Вт.

Список литературы: 1. Андреев Д. П., Гак И. И., Цемблер И. И. Механически перестраиваемые приборы СВЧ и разделительные фильтры. М., 1973. 232 с. 2. А. с. 1107197 СССР, МКИ<sup>4</sup> Н 01 Р 1/22. Волноводный аттенуатор / В. Б. Беляев // Открытия. Изобретения. 1984. № 29. С. 166. 3. А. с. 1092617 СССР, МКИ<sup>4</sup> Н 01 Р 1/22. Переменный аттенуатор / Ю. А. Седов // Открытия. Изобретения. 1984, № 18. С. 155. 4. А. с. 1050016 СССР, МКИ<sup>4</sup> Н 01 Р 1/22. Переменный волноводный аттенуатор / Н. А. Беколов // Открытия. Изобретения. 1983. № 39. С. 217. 5. Калашиников В. С., Шегурей А. Ф. Расчет и конструирование аттенуаторов СВЧ. М., 1930. 88. с. 6. Баскаков С. И. Основы электродинамики. М., 1973. 248 с. 7. Бушминский И. П. Изготовление элементов конструкций СВЧ. М., 1974. 304 с. 8. А. с. 1406671 СССР, МКИ<sup>4</sup> Н 01 Р 1/22. Переменный волноводный аттенуатор / В. И. Власов, А. А. Контарь, А. И. Терещенко // Открытия. Изобретения, 1988. № 24. С. 215.

Поступила в редколлегию 29.12.88

УДК 621.372

В. Ю. ТИХОВСКИЙ, Г. Г. КАНАРИК, канд. техн. наук, М. П. КУХТИН

### ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ДОБРОТНОСТИ ОБЪЕМНЫХ СВЧ-РЕЗОНАТОРОВ

Среди методов измерения добротности СВЧ-резонаторов широкое распространение получили методы [1], основанные на измерении частотной зависимости коэффициента стоячей волны по напряжению  $K_{стV}$ . Они обладают достаточно высокой точностью, однако требуют больших затрат времени на проведение измерений с целью построения полной частотной зависимости  $K_{стV}$  и определения полосы пропускания на половинном уровне мощности. Кроме того, применение их неэффективно в случае температурной нестабильности резонаторов.

В работе предлагается модификация частотного метода измерения добротности  $Q_{нен}$ , учитывающая активные  $R_1$  и реактивные  $X_1$  потери в устройстве связи, позволяющая сократить число измерений, автоматизировать процесс обработки результатов. Определение добротности сводится к измерению коэффициентов стоячей волны на резонансной частоте и двух произвольных расстройках и к решению системы трех алгебраических трансцендентных уравнений относительно  $Q_{нен}$ ,  $R_1$ ,  $X_1$ .

Резонатор, связанный с передающей линией и включенный на отражение, представляется эквивалентной схемой (рисунок),  $L_1$  представляет индуктивность элемента связи, а сопротивление  $R_1$  характеризует его активные потери, при этом можно отвлечься от истинной причины потерь.

В произвольном сечении  $a-a$  полное сопротивление передающей линии

$$\frac{Z_{aa}}{Z_0} = \frac{R_1 + iX_1}{Z_0} + \frac{\beta_1}{1 + i2Q_{нен}\delta_i}, \quad (1)$$

где  $\beta_1 = \frac{\omega M}{R_S Z_0}$  — отношение вносимого активного сопротивления к активному сопротивлению резонатора;  $\delta_i = \frac{\omega_i - \omega_0}{\omega_0}$  — относительная расстройка резонатора;  $Q_{\text{нен}}$  — ненагруженная добротность;  $Z_0$  — волновое сопротивление передающей линии.

Можно подобрать такую опорную плоскость  $b - b$ , в которой реактивное сопротивление всей системы равно нулю:

$$\frac{Z_{\text{вв}}}{Z_0} = (R_1 + Q_1)(B - A \operatorname{tg} \gamma l) / Z_n + i [AB - (R_1 + Q_1)^2 \operatorname{tg} \gamma l] / Z_n, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — постоянная распространения в линии;  $l$  — расстояние между сечениями  $a - a$  и  $b - b$ :

$$A = X_1 - Q_2 + Z_0 \operatorname{tg} \gamma l; \quad Q_2 = 2Q_{\text{нен}} \delta_i Q_1, \quad Q_1 = \beta_1 Z_0 / Q;$$

$$B = Z_0 - (X_1 - Q_2) \operatorname{tg} \gamma l; \quad Q = 1 + 4Q_{\text{нен}}^2 \delta_i^2;$$

$$Z_n = B^2 + (R_1 + Q_1)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma l.$$

Такой опорной плоскостью является положение узла при расстройке. Выражение (2) определяет полное сопротивление, справедливое для любой  $\delta_i$  (частоты). Обращение в нуль реактивного сопротивления дает возможность найти  $\operatorname{tg} \gamma l$  и исключить в явном виде зависимость активного сопротивления от  $\gamma l$ , а следовательно, и освободиться от конкретного выбора точки отсчета.

$$\text{Уравнение} \quad AB - (R_1 + Q_1)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma l = 0 \quad (3)$$

является квадратичным относительно  $\operatorname{tg} \gamma l$ ,

$$(\operatorname{tg} \gamma l)_{1,2} = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - 1}, \quad (4)$$

$$\text{где} \quad K = \frac{Z_0^2 - (X_1 - Q_2)^2 - (R_1 + Q_1)^2}{(X_1 - Q_2)}.$$

Решение со знаком (+) удовлетворяет уравнению (3) при  $\beta_1 = 1$ . Это означает, что на резонансной частоте в передающей линии отсутствуют стоячие волны. Поэтому данное решение отбрасываем как несоответствующее физичности эксперимента.

С учетом (4) активное сопротивление в узле при расстройке может быть представлено в виде

$$Z_{\text{вв}} / Z_0 = a / C_0, \quad (5)$$

где  $a = Q_R (1 + C^2); \quad Q_R = (R_1 + Q_1) / Z_0;$

$$C = \frac{K}{2} - \sqrt{(K/2)^2 - 1}; \quad C_0 = [1 + (X_1 Z_0 - Q_2) C]^2 + Q_R^2 C^2.$$

В точке минимума напряжения  $Z_{\text{вв}} / Z_0$  связано с  $K_{\text{ст}U}$  в передающей линии соотношением

$$a / C_0 = 1 / K_{\text{ст}U}, \quad (6)$$

которое и описывает частотную зависимость  $K_{\text{ст}U}$  с добротностью резонатора, активным и реактивным сопротивлениями элемента связи.

Уравнение (6) содержит три неизвестных параметра  $Q_{\text{нен}}$ ,  $R_1$  и  $X_1$ . Для их нахождения решается система трех нелинейных алгебраических уравнений вида (6), соответствующих трем произвольно измеренным точкам на частотной характеристике  $K_{\text{стУ}}$  резонатора. Причем одна из них должна быть точкой резонанса. В этой точке экспериментально определяется коэффициент связи  $\beta$  резонатора с передающей линией

$$\beta_1 = \left( \beta - \frac{R_1}{Z_0} \right) \left[ 1 + \left( \frac{X_1}{Z_0} \right)^2 \right],$$

что исключает в уравнении (6) зависимость от  $\beta_1$ . Если не учитывать реактивное сопротивление элемента связи, то полученная система нелинейных алгебраических уравнений трансформируется в уравнение, лежащее в основе трудоемкой методики определения добротности резонатора путем измерения полосы частот на половинном уровне мощности.

Результаты проведенных исследований приведены в таблице.

Расстройки выбранных точек	$\frac{R_1}{Z_0}$	$\frac{Y_1}{Z_0}$	$Q_{\text{нен}}$
$-1,853 \cdot 10^{-5}$ $1,547 \cdot 10^{-5}$ Половинный уровень мощности	—	—	29400
$0$ $0,437 \cdot 10^{-5}$ $0,967 \cdot 10^{-5}$	0,037	0,95	29820
$0$ $0,437 \cdot 10^{-5}$ $1,395 \cdot 10^{-5}$	0,0377	0,967	29800
$0$ $0,967 \cdot 10^{-5}$ $1,395 \cdot 10^{-5}$	0,038	0,97	29710
$0$ $0,547 \cdot 10^{-5}$ $1,701 \cdot 10^{-5}$	0,0384	0,981	29910
$0$ $0,437 \cdot 10^{-5}$ $-0,437 \cdot 10^{-5}$	0,036	0,946	29615
$0$ $-0,437 \cdot 10^{-5}$ $-0,967 \cdot 10^{-5}$	0,0375	0,96	29760
$0$ $-0,967 \cdot 10^{-5}$ $-1,812 \cdot 10^{-5}$	0,038	0,959	29860

Обработка результатов измерений проводилась на ЭВМ ЕС—1022 с использованием подпрограммы расчета системы нелинейных алгебраических уравнений [2]. Приводятся данные измерения добротности медного резонатора, возбужденного на колебаниях  $H_{011}$  в сантиметровом диапазоне длин волн.

Анализ полученных данных показывает, что стабильные параметры имеют место, когда две произвольно выбранные точки располагаются вблизи положения резонанса. При больших расстройках расхождение в результатах, по-видимому, объясняется зависимостью  $R_1$  и  $X_1$  от частоты.

Можно предположить, что погрешность измерения параметров объемных СВЧ-резонаторов указанным методом будет одного порядка с другими частотными методами.

**Список литературы:** 1. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах. М., 1960. 620 с. 2. Powell M. J. A FORTRAN subroutine for solving systems of non-linear algebraic equation // Numerical methods for non-linear algebraic equations. Gordon and Breach. 1970. P. 115—161.

Поступила в редколлегию 22.06.88

УДК 535.33.07/08

Н. Д. КОЛПАКОВ, д-р техн. наук, Д. К. СЕДЫХ,  
Ю. А. ФЕСЕНКО, канд. техн. наук

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОТОЭМИССИОННОГО СПЕКТРОМЕТРА ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ ЛИНЕЙЧАТОГО СПЕКТРА РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Эффективную диагностику возбужденной среды можно осуществить по рентгеновским спектрам излучения [1]. Важнейшая информация о среде может быть получена по измерению параметров линий излучения: интенсивности, положению на оси частот, полуширине. Среди известных приборов для измерения рентгеновского спектра излучения привлекает внимание фотоэлектронный спектрометр (ФЭС) [2], основанный на преобразовании спектра излучения  $I(h\nu)$  в энергетическое распределение электронов  $n(\epsilon)$ , измерение этого распределения и вычисления  $I(h\nu)$  по  $n(\epsilon)$ .

По сравнению с другими этот прибор имеет хорошее спектральное разрешение линий  $\Delta h\nu_i$ , малоинерционен и позволяет производить исследования в широком диапазоне частот, в том числе и в вакуумном ультрафиолете и мягком рентгене. Прибор удобен в эксплуатации, не требует глубокого охлаждения, легко согласуется с ЭВМ. Недостатком является неоднозначность между исследуемым спектром излучения и выходным сигналом ФЭС из-за специфики преобразования сигнала.

Произведен анализ преобразования сигнала в структурных звеньях измерительного тракта ФЭС и определены причины появления искажений и помех в выходном сигнале, выработаны рекомендации по методике измерения спектра и выделения полезного сигнала.

При анализе считаем, во-первых, что спектр рассматриваемого излучения  $I(h\nu)$  состоит из набора узких дискретных линий, несущих информацию об исследуемом источнике, и непрерывного фона излучения  $\Phi(h\nu)$ :

$$I(h\nu) = \sum_{i=1}^n I_i \delta(h\nu_i - h\nu) + \Phi(h\nu),$$

где

$$\delta(h\nu_i - h\nu) = \begin{cases} 1, & h\nu = h\nu_i; \\ 0, & h\nu \neq h\nu_i; \end{cases}$$

$n$  — число регистрируемых линий в рабочем диапазоне;  $h\nu_i$  — положение линий на оси энергий квантов излучения;  $I_i$  — интенсивность линий.

Непрерывный фон тормозного излучения  $\Phi(h\nu)$  определяется распределением электронов по скоростям в источнике излучения. Для источника излучения, возбуждаемого моноэнергетическим потоком электронов, согласно [3]

$$\Phi(h\nu) = I_0 \frac{h\nu_0 - h\nu}{h\nu}.$$

Здесь  $h\nu_0$  — максимальная энергия квантов тормозного излучения.  $I_0$  — интенсивность тормозного спектра. Непрерывный фон тормозного излучения является аддитивной помехой. Сигнал задан дискретной последовательностью линий  $I_i(h\nu_i)$ , которые являются независимыми величинами.

Во-вторых, считаем, что основное преобразование сигнала, влияющее на его измеряемые параметры, осуществляется на специальном фотокатоде-конверторе ФЭС. Преобразования в остальных звеньях ФЭС учитываются введением соответствующих коэффициентов. Каждой линии излучения  $I_i(h\nu)$  соответствует несколько фотоэлектронных линий:

$$n_i(\epsilon_i) = \sum_{j=1}^m n_{ij} \delta(\epsilon - \epsilon_{ij}),$$

где  $m$  — число атомных оболочек, для которых  $h\nu_i > W_j$ ;  $W_j$  — энергия связи электронов на оболочках атомов.

Каждой серии  $\sum I_i(h\nu_i)$  линий излучения соответствует несколько фотоэлектронных серий, налагающихся друг на друга.

Рассеяние образовавшихся электронов на частицах и квазичастицах фотокатода, а также оже-электроны вызывают появление дополнительных серий в энергетическом спектре электронов. Кроме того, в выходном сигнале присутствует непрерывный фон рассеянных и вторичных электронов.

Полученный в результате преобразования выходной сигнал имеет ложную структуру. Для восстановления входного сигнала необходимо устранить непрерывный фон линий, несущий информацию о спектре излучения (оже-линии и линии характеристических потерь), выделить одну серию фотоэлектронных линий и по ним восстановить исходный сигнал.

Для решения поставленной задачи можно использовать тот факт, что серии фотоэлектронных линий сдвинуты по оси на строго фиксированную величину, постоянную для используемого фотокатода.

Поэтому, вычислив коэффициент ковариации между функцией  $n(\epsilon)$  (метод регистрации  $n(\epsilon)$  — цифровой) и  $n(\epsilon + \Delta W)$ , сдвинутой по оси энергий на  $\Delta W = W_j - W_{j-1}$ , можно выделить серии фотоэлектронных линий, образованных различными оболочками атомов, а также исключить линии, вызванные оже-электронами.

Однако этот способ не позволяет исключить линии характеристических потерь энергии электронов, поэтому лучший результат дает применение для преобразования спектра одного и того же сигнала двух различных фотокатодов. Два выходных сигнала, полученные при помощи двух фотокатодов, изготовленных из различных веществ, отличаются местоположением оже-линий и линий характеристических потерь энергии фотоэлектронов, а фотоэлектронные линии сдвинуты по оси энергий на постоянную величину. Сдвиг определяется разностью работы выхода электронов с определенных оболочек атомов веществ двух фотокатодов. Поэтому, проведя корреляционный анализ сигналов с двух различных фотокатодов (сдвиг по оси энергий определяется материалом катода), получим серию фотоэлектронных линий, которую можно отождествить с входным спектром.

**Список литературы:** 1. *Плазма в лазерах*: Пер. с англ. / Под ред. Дж. Бекери. М., 1982. 416 с. 2. *Фотоэлектронный спектрометр для измерения температуры плазмы* / Ю. В. Готт, А. Н. Силаев, Р. Р. Чистяков, В. А. Шурагин. М. 1983. 12 с. (Препринт ИАЭ—3763/7. 3. *Блохин М. А. Физика рентгеновских лучей*. М., 1953. 455 с.

*Поступила в редколлегию 15.12.88*

УДК 621.396.2

**В. Н. БЫКОВ**, канд. техн. наук, **С. Н. БЫКОВ**,  
**А. В. КОНДРАТЬЕВ**, **А. С. СУЛТАНОВ**, канд. техн. наук

### **ПРИМЕНЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ БОРЬБЫ С ЗАМИРАНИЯМИ В РАДИОЛИНИЯХ МАЛОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ**

Основной метод борьбы с замираниями сигнала при многолучевом распространении радиоволн — разделение лучей по времени прихода и накопление в приемнике (ПРМ) энергии нескольких лучей [1—3]. Для этой цели применяются широкополосные сигналы (импульсные, составные, псевдослучайные, с шумовой несущей и др.), длительность которых (длительность импульса, интервал корреляции шумовых и псевдошумовых сигналов) меньше времени разности хода отдельных лучей  $\Delta t$ , а также методы когерентного и некогерентного сложения (накопления) сигналов нескольких лучей [1; 3]. Устройства, реализующие метод когерентного сложения лучей (взаимно-корреляционный прием), являются сложными. Жесткие требования предъявляются к синхронизации устройств сложения, стабильности частоты передатчиков (ПРД), возникает необходимость в операции амплитудного взве-

шивания, пропорционального коэффициенту передачи радиоприема по каждому лучу. Так, для функционирования в радиоприемах тропосферной связи взаимно-корреляционной системы «Rake» [1] при когерентном приеме многолучевого сигнала точность синхронизации должна быть порядка  $2 \cdot 10^{-10}$  Гц (до фазы высокочастотного заполнения), допустимая нестабильность частоты должна быть не хуже  $10^{-8}$ , максимальное время запаздывания прямого и переотраженных от неоднородностей тропосферы лучей составляет  $\Delta t = (2-3)$  мкс. При этом небольшое увеличение погрешности системы синхронизации приводит к увеличению вероятности ошибочного приема на несколько порядков [4].

Протяженность радиоприема передачи информации между стационарными и подвижными объектами на местности со сложным рельефом, в том числе в городской местности, составляет величину от сотен метров до единиц километров. В таких радиоприемах вследствие касания диаграммой направленности антенны (ДНА) земной поверхности и городских построек также формируются прямой и переотраженные лучи [1; 2]. Время запаздывания этих лучей составляет единицы наносекунд, и для их разделения необходимо расширение полосы спектра сигнала до нескольких сотен мегагерц и более. При этом реализация высокой точности синхронизации в системе когерентного сложения лучей является трудновыполнимой задачей.

Системы автокорреляционного приема хотя и проигрывают взаимно-корреляционным системам в помехоустойчивости [3], но проще реализуемы технически, в частности, нет необходимости в синхронизации и амплитудном взвешивании. В системах с автокорреляционной обработкой находят применение сравнительно легко генерируемые в СВЧ-диапазоне шумовые сигналы, несущее колебание которых является широкополосным и представляет собой ограниченный по спектру «белый шум», а модулирующий (информационный) сигнал — узкополосный квазислучайный процесс [3]. Преимущества автокорреляционного приема широкополосных сигналов для борьбы с замираниями демонстрируют системы «Аккорд» и «Сатурн» [1; 3]. Однако и эти системы, являясь сравнительно узкополосными (ширина спектра сигнала  $\Delta f_c < 1$  МГц), не позволяют разделять лучи в радиоприемах ограниченной дальности.

В связи с этим возникает необходимость оценить возможность снижения замираний, обусловленных многолучевостью, в радиоприемах малой протяженности за счет применения широкополосных шумовых сигналов.

В том случае, когда выполняется условие  $\Delta t > \tau_k$ , где  $\tau_k = 1/2\Delta f_c$  — интервал корреляции, шумовые сигналы, поступающие на вход ПРМ по разным ( $i$ -м) направлениям, некогерентно суммируются и отдельно обрабатываются в автокорреляторе. Сигнал на выходе ПРМ вследствие того, что величина  $\Delta t$  много меньше интервала корреляции информационного сигнала, пропорционален модулирующему параметру  $s(t)$  и средней мощности несущего колебания  $\bar{P}_c$ :

$$u_{c, \text{вых}} = \sum_{i=1}^n s(t + \Delta t_i) \bar{P}_{ci} = s(t) \bar{P}_s. \quad (1)$$

На рис. 1 приведена геометрия многолучевого распространения радиоволн на приземной трассе. В соответствии с этой геометрией сечение ДНА на земной поверхности представляет двумерную поверхность в виде круга (эллипса), ограниченную в горизонтальной и вертикальной плоскости шириной луча ДНА  $\theta_{0,5}$  и  $\varphi_{0,5}$ . Площадь этой поверхности может быть разделена на зоны (рис. 1), переотраженные сигналы от которых являются независимыми. Размеры каждой зоны определяются интервалами пространственной корреляции лучей в горизонтальной ( $x$  и  $R$ ) и вертикальной ( $y$  и  $R$ ) плоскости (рис. 1, б, в). Одно из

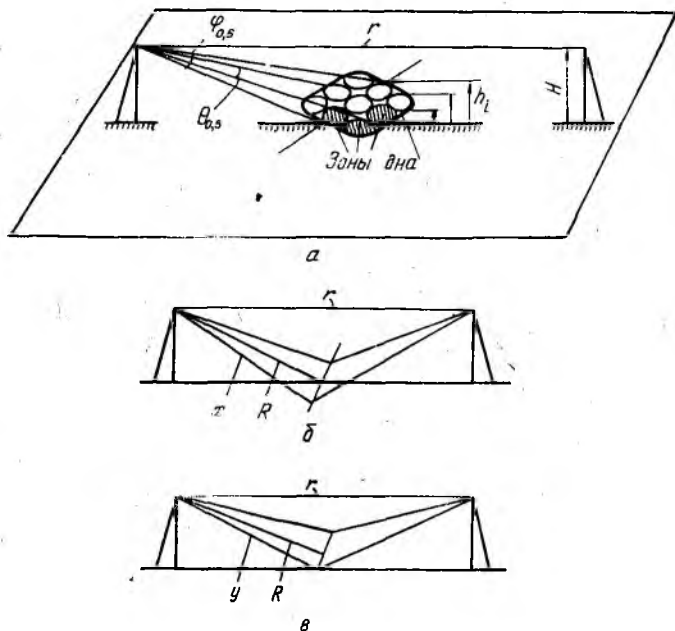


Рис. 1

условий существования независимых зон в вертикальной плоскости — наличие на трассе распространения радиоволн участков местности с различным высотным рельефом ( $h_i$  на рис. 1, а).

Условие разделения независимых зон в горизонтальной и вертикальной плоскости запишем следующим образом:

$$\Delta t = \Delta r_{r,v}/c \geq m/2\Delta f_c, \quad (2)$$

где  $\Delta r_{r,v}$  — разность хода лучей в горизонтальной и вертикальной плоскости, соответственно  $\Delta r_r = 2(x - R)$ ,  $\Delta r_v = 2(y - R)$ ;  $c$  — скорость распространения радиоволн;  $m$  — коэффициент, выбирается из условия обеспечения декорреляции внутренних шумов ПРМ и шумовых помех,  $m = (2 - 3)$ ;  $R$ ,  $x$ ,  $y$  — отрезки, обозначающие ход лучей (рис. 1). Пользуясь условием (2), считая, что для радиолиний протяженностью  $r \geq 10^3$  м при высоте подъема антенны  $H \leq 10$  м  $R \approx$

$\approx r/2$ , и проводя тригонометрические преобразования, получим соотношение для минимально допустимой полосы спектра сигнала как функции ширины ДНА и количества независимых зон в горизонтальной и вертикальной плоскости  $n$ :

$$\Delta f_c = mc / (r \cdot \arctg^2 \sqrt{\operatorname{tg}(\theta_{0,5}/2) \operatorname{tg}(\varphi_{0,5}/2) / n}). \quad (3)$$

Анализ соотношения (3) показывает, что существуют минимальные значения полосы спектра сигнала, при которых возможно разделение двух независимых зон ( $n = 2$ ) в горизонтальной и вертикальной плоскости. С ростом ширины спектра сигнала, протяженности радиолинии и ширины ДНА в обеих плоскостях пропорционально увеличивается количество независимых зон, их число может быть большим (рис. 2, а, б). При этом появляется возможность «обмена» требуемой полосы

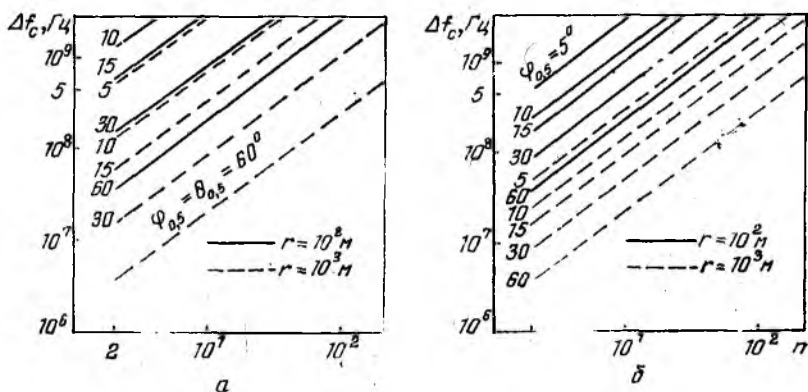


Рис. 2

спектра на ширину ДНА при фиксированном количестве независимых зон. Такой обмен должен осуществляться с учетом характера рельефа в горизонтальной и вертикальной плоскости, а также возможностей формирования шумовых сигналов с требуемой шириной спектра. В ходе расчетов принята величина коэффициента  $m = 2$ , при которой обеспечивается декорреляция шумов ПРМ [3].

В результате анализа многолучевого распространения радиоволн в наземных радиолиниях передачи информации малой протяженности получено аналитическое выражение (3), устанавливающее количественную взаимосвязь между требуемой шириной спектра сигнала, шириной ДНА в горизонтальной и вертикальной плоскости, протяженностью радиолинии и количеством различных независимых зон. Пользуясь данным выражением, можно оценить возможность снижения замираний в радиолиниях малой протяженности благодаря применению широкополосных шумовых сигналов с шириной спектра от десятков до нескольких сотен мегагерц.

Сравнивая радиолинии с узкополосными сигналами, в ПРМ которых сигнал формируется на основании одной зоны (ограниченной ши-

риной ДНА) и может быть утерян вследствие гладких замираний в зоне [1], с радиолиниями, использующими широкополосные шумовые сигналы, можно сделать вывод о более высокой помехоустойчивости последних.

Список литературы: 1. Немировский А. С. Борьба с замираниями при передаче аналоговых сигналов. М., 1984. 208 с. 2. Системы подвижной радиосвязи / И. М. Пышкин, И. И. Дежурный, В. Н. Талызин, Г. Д. Чвилев. М., 1986. 328 с. 3. Семенов А. М., Сикарева А. А. Широкополосная радиосвязь. М., 1970. 280 с. 4. Теория и применение псевдослучайных сигналов / А. И. Алексеев, А. Г. Шереметьев, Г. И. Тузов, Б. И. Глазов, М., 1969. 367 с.

Поступила в редакцию 14.03.88

УДК 621.391

Ф. В. ЛУЧЕНКО, В. С. ПОПЕНКО, канд. техн. наук

### ОЦЕНКА «ЭФФЕКТИВНОЙ» ШИРИНЫ СПЕКТРА СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Весьма часто возникает необходимость оценки систем сигналов по эффективности использования заданного диапазона частот. Этот вопрос может быть решен на основе анализа спектральных свойств систем сигналов.

Так как в реальных системах сигналы финитны, их спектры бесконечны. На практике ширину спектра заменяют условной полосой частот, поскольку точная ширина спектра имеет смысл только для финитного спектра. Среди различных определений условной полосы наиболее привлекательно определение средней квадратичной ширины спектра, впервые предложенное в работе [3] и используемое в работах [1; 2], представляющее собой второй центральный момент положительной ветви нормированной энергетической спектральной плотности, получившей название «эффективной» ширины спектра, значение которой

определяется из соотношения  $W_s^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} [U'(t)]^2 dt$  (1), где  $E$  — энергия сигнала  $U(t)$ .

Если  $U(t)$  имеет конечную длительность и непрерывную первую производную  $U'(t) \in C' [0; T]$ , то  $W_s$  — величина конечная.

Рассмотрим дискретные сигналы, задаваемые функциями, которые принимают конечное число значений при непрерывном аргументе  $t$ . Сигналы такого вида можно задать в следующей форме:  $U(t) = A(t)e^{i\theta(t)}$  (2), где  $A(t)$  — амплитуда;  $\theta(t)$  — фаза сигнала.

Для сигналов вида (2) «эффективная» ширина спектра определяется из соотношения  $W_s^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \{[A'(t)]^2 + A^2(t)[\theta'(t)]^2\} dt$  (3). У рассматриваемого класса сигналов  $A(t) = 1$   $\theta(t)$  принимает два значения 0 и  $\pi$ .

Следовательно,  $A'(t) = 0$  на всем интервале задания сигнала, а  $\theta'(t)$  имеет разрывы второго рода в точках перехода от одного значения к другому, вследствие чего она не интегрируема, а следовательно, не интегрируема и  $[\theta'(t)]^2$ , тогда для дискретного сигнала  $W_3^2 =$

$$= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} [\theta'(t)]^2 dt \quad (4).$$

Ясно, что в сравнении с любым сигналом, удовлетворяющим задаче Штурма-Лиувилля [1] (такой сигнал имеет непрерывную производную), дискретные сигналы используют полосу частот менее эффективно, так как согласно (4) для дискретного сигнала  $W_3$  бесконечна.

Из (4) следует, что для дискретного сигнала  $W_3$  найти невозможно. По мнению авторов, целесообразно применять этот показатель при относительном критерии оценки эффективности использования полосы частот различными дискретными сигналами. Пусть  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  имеют фазы соответственно  $\theta_1(t)$  и  $\theta_2(t)$ , тогда относительный критерий

$$h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [\theta_1'(t)]^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [\theta_2'(t)]^2 dt} \quad (5).$$

При  $h < 1$  пер-

вый сигнал лучше использует полосу, если  $h > 1$  — то второй. При  $h = 1$  оба сигнала используют заданную полосу частот с одинаковой эффективностью, т. е. данный критерий позволяет оценить, насколько один сигнал эффективнее использует заданную полосу частот по сравнению с другим при стремлении «эффективной» ширины спектра каждого сигнала к бесконечности.

Рассмотрим, как зависит параметр  $h$  от числа скачков фазы сигнала. Определим фазу  $\theta(t)$  через функцию Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Пусть  $\theta_1(t)$  имеет  $k$  скачков в точках  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , тогда

$$\theta_1(t) = \pi \sum_{i=1}^k \mathcal{Z}_i \eta(t - t_i) \quad (7),$$

где  $\mathcal{Z}_i = \pm 1$ .

Пусть  $\theta_2(t)$  имеет  $m$  скачков, в точках  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$

$$\theta_2(t) = \pi \sum_{i=1}^m \beta_i \eta(t - \tau_i). \quad (8)$$

где  $\beta_i = \pm 1$ .

Из (7), (8) с учетом, что  $\eta'(t) = \delta(t)$ , получаем

$$\theta_1'(t) = \pi \sum_{i=1}^k \mathcal{Z}_i \delta(t - t_i); \quad \theta_2'(t) = \pi \sum_{i=1}^m \beta_i \delta(t - \tau_i). \quad (9)$$

Тогда из (5), с учетом (9), следует, что

$$h = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^k \delta(0)}{\pi^2 \sum_{i=1}^m \delta(0)} = \frac{k}{m}. \quad (10)$$

Анализ соотношения (10) показывает, что более эффективно использует полосу частот тот сигнал, у которого меньше скачков фазы. Таким образом, можно сделать вывод, что для двухуровневых дискретных сигналов, описываемых функциями Уолша, Хаара, Радемахера, число скачков полностью характеризует эффективность использования полосы частот.

Список литературы: 1. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. М., 1970. 350 с. 2. Варакин Л. Е. Теория систем сигналов. М., 1978. 208 с. 3. Харкевич А. А. Борьба с помехами. М., 1965. 320 с.

Поступила в редколлегию 03.10.88

УДК 621.396

*И. Д. ГОРБЕНКО*, д-р техн. наук, *Ю. В. СТАСЕВ*,  
канд. техн. наук, *А. А. ЗАМУЛА*, канд. техн. наук

### АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИГНАЛОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ТИПА

Основная тенденция развития современных систем связи — повышение эффективности передачи информации. С этой целью внедряются новые методы, обеспечивающие повышение скорости передачи, снижение влияния помех в канале и экономное расходование полосы частот. Решению этих задач способствует рациональный выбор сигналов, используемых для передачи информации по каналам, методов их формирования и обработки на приеме.

В современных системах связи широко используют сложные сигналы с фазовой модуляцией. Возрастает интерес к нелинейным (с точки зрения закона построения) сигналам.

Нелинейные сигналы (НС) существуют для значений длительностей, определяемых из условия  $L = 4x + 2 = P^n - 1$  или  $L = 4x = P^n - 1$ . Здесь  $P$  — характеристика поля Галуа;  $n$  — степень расширения поля,  $x = 1, 2, \dots$ . НС принадлежат к оптимальным по минимаксному критерию системам сигналов. Объем системы, составленной из НС, определяется из выражения  $M = \varphi(L)/n$ , где  $\varphi(\cdot)$  — функция Эйлера. Правило построения НС описывается уравнением [1]:

$$\begin{aligned} W &= \Psi(\Theta^l + 1), \text{ если } \Theta^l + 1 \not\equiv 0 \pmod{P}; \\ W &= 1, \text{ если } \Theta^l + 1 \equiv 0 \pmod{P}. \end{aligned} \quad (1)$$

Метод построения НС подробно описан в работе [2].

Одной из операций, выполняемых при построении НС, является формирование поля Галуа  $GF(P^n)$ . Элементы поля  $a_i$  могут быть вычислены с использованием соотношения

$$a_i = \Theta_i^i \pmod{d(f(x), P)}, \quad (2)$$

где  $\Theta_i$  —  $i$ -й первообразный элемент поля Галуа;  $i = \overline{0, P^n - 2}$ ;  $f(x)$  — первообразный неприводимый над полем  $GF(P)$  полином.

Операции в (2) выполняются по двойному модулю ( $\text{modd}$ ) — модулю  $f(x)$  и  $P$ .

Как следует из (2), для построения всех элементов поля необходимо выполнить  $P^n - 2 = L$  операций возведения  $\Theta_i$  в степени  $i$ .

Приведем теорему о свойстве поля Галуа, определяющем связи элементов  $a_i$  поля  $GF(P^n)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{(P-1)/2}$  — элементы поля  $GF(P)$ , тогда элементы поля  $a_{(P-1)/2+1}, a_{(P-1)/2+2}, a_{P-1}$  зависят от  $(P-1)/2$  первых элементов и определяются из выражения  $a_{(P-1)/2+i} = P - a_i$  (3), где  $i = \overline{1, (P-1)/2}$ .

**Доказательство.** Известно, что  $i$ -й элемент поля может быть представлен как  $a_i = \Theta^{i-1} \pmod{P}$   $((P-1)/2 + n)$ -й. Элемент имеет вид  $a_{(P-1)/2+i} = \Theta^{(P-1)/2+i-1}$ .

Тогда (3) можно переписать следующим образом:

$$\Theta^{n-1} + \Theta^{(P-1)/2+i-1} = P \equiv 0 \pmod{P}.$$

Вынеся за скобки  $\Theta^{n-1}$ , получим

$$\Theta^{n-1} (1 + \Theta^{(P-1)/2}) = P \equiv 0 \pmod{P}. \quad (4)$$

По теореме Ферма  $\Theta^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ ;

$$(\Theta^{(P-1)/2} - 1)(\Theta^{(P-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod{P}. \quad (5)$$

В (5) только один из сомножителей левой части делится на  $P$ , в противном случае их разность, равная 2, должна делиться на  $P$ . Поэтому имеет место одно и только одно из сравнений

$$\Theta^{(P-1)/2} \equiv 1 \pmod{P}; \quad (6)$$

$$\Theta^{(P-1)/2} \equiv -1 \pmod{P}. \quad (7)$$

Сравнение (6) не может выполняться, так как в поле Галуа лишь  $\Theta^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$  и  $\Theta^0 \equiv 1 \pmod{P}$ . Поэтому выполняется сравнение (7). В этом случае справедливо и (4). Тогда  $((P-1)/2 + i)$ -й элемент поля может быть найден из соотношения  $a_{(P-1)/2+i} = P - a_i$ . Теорема доказана.

Проиллюстрируем на примере возможность построения  $((P-1)/2 + i)$ -х элементов поля по известным первым  $(P-1)/2$  элементам.

Пусть характеристика поля  $GF(P)$   $P = 13$ , первообразный элемент поля  $\theta = 2$ .

Запишем элементы данного поля:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^0 \bmod 13 = 1; a_2 = 2^1 \bmod 13 = 2; a_3 = 2^2 \bmod 13 = 4; \\ a_4 &= 2^3 \bmod 13 = 8; a_5 = 2^4 \bmod 13 = 3; a_6 = 2^5 \bmod 13 = 6; \\ a_7 &= 2^6 \bmod 13 = 12; a_8 = 2^7 \bmod 13 = 11; a_9 = 2^8 \bmod 13 = 9; \\ a_{10} &= 2^9 \bmod 13 = 5; a_{11} = 2^{10} \bmod 13 = 10; a_{12} = 2^{11} \bmod 13 = 7. \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользуемся выражением (3) для получения  $((P-1)/2 + i)$ -х элементов поля ( $i = 1, \overline{(P-1)}$ ) (2):

$$\begin{aligned} a_7 &= a_{(P-1)/2+1} = P - a_1 = 12; a_8 = a_{(P-1)/2+2} = P - a_2 = 11; \\ a_9 &= a_{(P-1)/2+3} = P - a_3 = 9; a_{10} = a_{(P-1)/2+4} = P - a_4 = 5; \\ a_{11} &= a_{(P-1)/2+5} = P - a_5 = 10; a_{12} = a_{(P-1)/2+6} = P - a_6 = 7. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнение элементов поля, приведенных в (8), с элементами поля (9) показывает, что они идентичны.

Рассмотрим более подробно, чем это сделано в теореме 1, конструкцию поля Галуа.

Для произвольно выбранного первообразного элемента  $\Theta_i$  поля произведение

$$(\Theta_i^i \Theta_i^{P-1-i}) \bmod P \equiv 1 \pmod{P}. \quad (10)$$

Справедливость (10) вытекает из того, что для простого  $P$   $\varphi(P) = P-1$  [1]. Из теоремы Эйлера следует, что  $\Theta^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ , поэтому  $(\Theta_i^i \Theta_i^{P-1-i}) \bmod P = \Theta_i^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ . Ввиду того что сравнение (10) выполняется при любом  $\Theta_i$  и  $P$ , при  $i=1$  элемент поля  $a_1$  однозначно связан с элементом  $a_{P-2}$ , при  $i=2$   $a_2$  связан с элементом  $a_{P-3}$  и т. д. Анализ (10) показывает, что элементы поля  $a_1$  и  $a_{P-2}$ ,  $a_2$  и  $a_{P-3}$  являются мультипликативно обратными.

В связи с указанным свойством поля Галуа зависимыми оказываются, очевидно, и характеры элементов поля или символы НС, построенные в поле. Эта зависимость описывается теоремой 2.

**Теорема 2.** Пусть характер элементов  $\psi(a_i)$  поля (символы НС в поле  $GF(P)$ ) определяются из соотношения

$$W_i = \psi(a_i) = \exp(j\pi i), \quad (11)$$

а индексы элементов поля  $i$  находят из решения сравнения

$$a_i = \Theta_i^i + 1 = \Theta_i^{u_i} \pmod{P},$$

тогда характеры  $(P-1)/2 + 1 + i$  ( $i = 1, \overline{(P-1)/2 - 1}$ ) элементов поля (символы сигнала) зависят от характеров  $(P-1)/2 - 1$  первых элементов поля, причем

$$W_{P-1} = (-1)^i W_{i+1}. \quad (12)$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный элемент поля  $a_i = \Theta_i + 1$ . По теореме Ферма  $\Theta^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ . Тогда элемент поля

$$\Theta^i + 1 = \Theta^i + \Theta^{P-1} = \Theta^i (1 + \Theta^{P-i-1}). \quad (13)$$

Найдем индексы элементов поля (13):

$$\text{ind}(\Theta^i + 1) = \text{ind}(\Theta^i(1 + \Theta^{P-i-1})). \quad (14)$$

Учитывая свойство индексов,  $\text{ind}(a \cdot b) = \text{ind} a + \text{ind} b$  [1] (14) можно представить в виде

$$\text{ind}(\Theta^i + 1) = \text{ind} \Theta^i + \text{ind}(1 + \Theta^{P-i-1}). \quad (15)$$

Так как основание индекса (логарифма)  $\Theta$ , то

$$\text{ind} \Theta^i \pmod{P-1} = \log_{\Theta} \Theta^i \pmod{P-1} = i$$

и соотношение (15) имеет вид

$$\text{ind}(\Theta^i + 1) \pmod{P-1} = u_i = i + \text{ind}(1 + \Theta^{P-i-1}) \pmod{P-1}.$$

Символы НС (характеры элементов поля) могут быть найдены из (11) и (15):

$$\begin{aligned} W_i &= \exp(j\pi u_i) = \exp(j\pi(i + \text{ind}(1 + \Theta^{P-i-1}) \pmod{P-1})) \\ &= \exp(j\pi i \pmod{P-1}) \exp(j\pi(\text{ind}(1 + \Theta^{P-i-1}) \pmod{P-1})). \end{aligned} \quad (16)$$

Анализ (16) показывает, что при  $i$  четном ( $i = 2k$ ) характер индексов не изменяется. Действительно, в этом случае

$$W_i = \exp(j\pi \text{ind}(1 + \Theta^{P-i-1})),$$

т. е. символы  $W_i$  и  $W_{P-i-1}$  совпадают по знаку.

При  $i$  нечетном ( $i = 2k + 1$ )

$$W_i = -\exp(\text{ind}(1 + \Theta^{P-i-1}) \pmod{P-1}). \quad (17)$$

В этом случае символы  $W_i$  и  $W_{P-i-1}$  противоположны. Приведенное выше подтверждает справедливость (12).

Теорема доказана.

Нетрудно убедиться в том, что теоремы 1 и 2 справедливы и для расширенного поля Галуа, т. е. для случая  $n > 1$ .

Проиллюстрируем справедливость теоремы 2 на примере.

Пусть характеристика поля  $GF(P)$   $P = 13$  — первообразный элемент поля  $\theta = 2$ . Изоморфизм НС в данном поле  $W = \{-11 - 111 - 1111 - 1 - 1 - 1\}$ .

Установим зависимость характеров (символов НС) в поле  $GF(17)$ . При  $i = 1$   $W_2 = -W_2$ ,  $i = 2$   $W_{11} = W_3$ ,  $i = 3$   $W_{10} = -W_4$ ,  $i = 4$   $W_9 = W_5$ ,  $i = 5$   $W_8 = -W_6$ . Результат будет таким же, если для установления зависимости символов НС применить (12).

Использование теоремы 2 позволяет определить  $(P-1)/2 + 1 + i$  символы НС ( $i = 1, (P-1)/2$ ) по известным первым  $(P-1)/2 - 1$  символам. Не определены первый и  $((P-1)/2 + 1)$ -й символы НС;  $((P-1)/2 + 1)$ -й символ НС определяется правилом кодирования (1). Действительно, известно, что элемент поля  $\Theta^{(P-1)/2} = L$  [1], тогда  $\Theta^{(P-1)/2} + 1 = L + 1 \pmod{P} \equiv 0 \pmod{P}$ . Но в соответствии с правилом кодирования (1), если  $\Theta^i + 1 \equiv 0 \pmod{P}$ , то символ сигнала равен 1.

Для НС характеристического типа число символов, принимающих значение «1», равно  $K = L/2$ . Это означает, что первый символ НС может быть доопределен, если известны  $P - 2$  символов сигнала.

Выявленные и описанные в теоремах 1 и 2 связи элементов и характеров элементов поля позволяют в два раза повысить быстродействие устройств формирования НС. Достигается указанное формирование согласно правилу (2) лишь половины элементов поля. Оставшиеся элементы могут быть получены путем реализации правила (3).

Полученное аналитическое выражение (12) дает возможность в два раза уменьшить число операций вида (11) при построении символов НС.

Список литературы: 1. Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 200 с. 2. Горбенко И. Д., Замула А. А., Бессарабенко К. В. Ускоренные алгоритмы построения систем характеристических дискретных сигналов // Радиотехника. 1988. Вып. 84. С. 69—72.

Поступила в редколлегию 07.07.88

УДК 621.391.832

О. В. ОВЧАРЕНКО

### АСИМПТОТИКА СИГНАЛОВ С ФИНИТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ

Пусть  $u(t)$  — вещественный сигнал, а  $S(\omega)$  — его спектр

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Комплексная функция  $S(\omega)$  обладает свойством  $S(-\omega) = \overline{S(\omega)}$ , где черта обозначает комплексное сопряжение, поэтому носитель  $\text{supp } S(\omega)$  спектра  $S(\omega)$  вещественного сигнала  $u(t)$  всегда симметричен, т. е. если  $\omega \in \text{supp } S(\omega)$ , то  $-\omega \in \text{supp } S(\omega)$ .

В случае, когда  $\text{supp } S(\omega)$  содержится в множестве

$$(-\Delta - \omega_0, -\omega_0 + \Delta) \cup (-\Delta + \omega_0, \omega_0 + \Delta), \quad \omega_0, \Delta > 0, \quad \omega_0 - \Delta > 0, \quad (1)$$

состоящем из двух симметричных конечных интервалов, говорят, что сигнал  $u(t)$  имеет финитный спектр [1]. Структура финитных спектров может быть весьма разнообразной. Естественными являются два крайних случая — сплошной спектр: функция  $S(\omega)$  непрерывна на носителе (1); дискретный спектр: множество частот  $\{\omega_i : S(\omega_i) \neq 0\}$  конечно или счетно и содержится во множестве (1). В работе рассматривается только первый случай.

Для сигналов  $u(t)$  с финитным сплошным спектром имеет место естественное представление  $u(t)$  в виде [2]

$$u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_0-\Delta}^{-\omega_0+\Delta} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} [\overline{S(\omega)} e^{-i\omega t} + S(\omega) e^{i\omega t}] d\omega = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} [\overline{S(\omega_0 + \omega)} e^{-i(\omega_0 + \omega)t} + S(\omega_0 + \omega) e^{i(\omega_0 + \omega)t}] d\omega = \\
 &= e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} \overline{S(\omega_0 + \omega)} e^{-i\omega t} d\omega + \\
 &+ e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{-i\omega_0 t} \overline{I(t)} + e^{i\omega_0 t} I(t) = \\
 &= |I(t)| [e^{i(\omega_0 t + \Phi(t))} + e^{-i(\omega_0 t + \Phi(t))}] = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)),
 \end{aligned}$$

где

$$A(t) = 2|I(t)|; \quad \Phi(t) = \arg I(t);$$

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Цель статьи — изучение поведения интеграла  $I(t)$ , а следовательно, амплитудной  $A(t)$  и фазовой  $\Phi(t)$  функций при  $|t| \rightarrow \infty$  для сигналов  $u(t)$ , имеющих финитный аналитический спектр. Кроме того, в работе найдено представление асимптотики квадрата амплитудной функции в виде произведения двух целых функций экспоненциального типа, нули которых лежат по разные стороны от вещественной оси. Это представление используется при решении задачи о связи фазовой функции с амплитудной для сигналов с финитным спектром на носителе.

**Асимптотика.** Путем непосредственных вычислений нетрудно проверить, что имеют место следующие асимптотические формулы при  $|t| \rightarrow \infty$  для интегралов:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \omega^n \cos \omega t d\omega \cong \Delta^n \frac{2}{t} \sin \Delta t, \quad n - \text{четное}; \quad (3)$$

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \omega^n \sin \omega t d\omega \cong -\Delta^n \frac{2}{t} \cos \Delta t, \quad n - \text{нечетное}. \quad (4)$$

Если  $f(\omega)$  — аналитическая функция на интервале  $(-\Delta, \Delta)$ , т. е. ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \omega^n$  сходится к  $f(\omega)$  при  $\forall \omega \in (-\Delta, \Delta)$ , то, используя (3), (4), получаем асимптотические формулы для интегралов:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \cos \omega t d\omega \cong \frac{2}{t} \sin \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) \Delta^{2k}; \quad (5)$$

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \sin \omega t d\omega \cong -\frac{2}{t} \cos \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) \Delta^{2k+1}. \quad (6)$$

Теперь можно получить асимптотическое выражение для  $I(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} I(t) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} S_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\Delta}^{\Delta} |S_0(\omega)| e^{i(\omega t + \psi(\omega))} d\omega = \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} |S_0(\omega)| \cos(\omega t + \psi(\omega)) d\omega + i \int_{-\Delta}^{\Delta} |S_0(\omega)| \sin(\omega t + \psi(\omega)) d\omega = \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_{-\Delta}^{\Delta} g(\omega) \sin \omega t d\omega + \\ &+ i \int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \sin \omega t d\omega + i \int_{-\Delta}^{\Delta} g(\omega) \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(\omega) &= |S_0(\omega)| \cos \psi(\omega); \quad g(\omega) = |S_0(\omega)| \sin \psi(\omega); \\ S_0(\omega) &= S(\omega_0 + \omega), \quad \psi(\omega) = \arg S_0(\omega). \end{aligned}$$

Используя (5), (6), из (7) получаем

$$\begin{aligned} I(t) \cong \frac{2}{t} \{ [F_2(\Delta) \sin \Delta t + G_1(\Delta) \cos \Delta t] + \\ + i [-F_1(\Delta) \cos \Delta t + G_2(\Delta) \sin \Delta t] \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$F_1(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) \Delta^{2k+1};$$

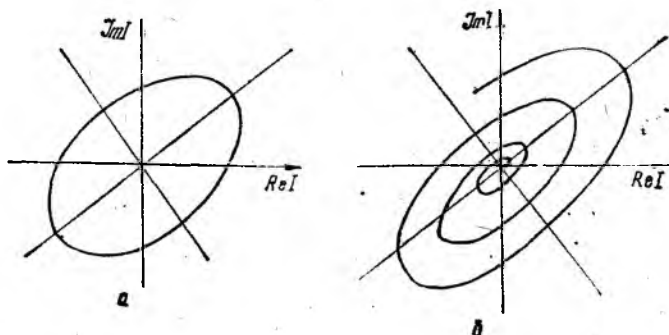
$$F_2(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) \Delta^{2k}.$$

Аналогично определяются  $G_1(\Delta)$ ;  $G_2(\Delta)$ .

Из формулы (8) видно, что при  $|t| \rightarrow \infty$  интеграл  $I(t)$  убывает как  $1/|t|$ . Эта скорость убывания соответствует случаю «общего положения». В случае «вырождения» скорость убывания может иметь более высокий порядок, но тогда асимптотические формулы будут иметь другой вид. Теперь рассмотрим выражение, стоящее в фигурных

скобках формулы (8). Оно представляет собой комплексную функцию вещественной переменной, действительная и мнимая составляющие которой являются периодическими функциями с одним и тем же периодом  $2\pi/\Delta$ . Вследствие этого конец вектора на комплексной плоскости  $S$ , соответствующего фигурной скобке, описывает эллипс (рисунок, позиция *a*), а конец вектора, отвечающего функции  $I(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ , описывает соответствующую эллиптическую спираль (рисунок, позиция *b*).

Приведенная геометрическая интерпретация показывает, что в общем случае амплитудная функция  $A(t)$ , описывающая поведение модуля упомянутого вектора на комплексной плоскости, при убывании колеблется. В то же время фазовая функция, описывающая аргумент этого вектора, будет монотонно возрастать или убывать с колебаниями скорости изменения фазы. Итак, доказано следующее.



**Предложение 1.** Комплексная функция  $I(t)$ , модуль которой равен половине амплитуды  $A(t)$ , а аргумент — фазе  $\Phi(t)$ , при  $|t| \rightarrow \infty$  описывается асимптотической формулой

$$I(t) \cong \frac{2}{t} [(a \cos \Delta t + b \sin \Delta t) + i(c \cos \Delta t + d \sin \Delta t)], \quad (9)$$

где  $a, b, c, d$  — вещественные константы.

**Следствие 1.** При  $|t| \rightarrow \infty$  амплитуда  $A(t) = 2|I(t)|$  убывает до нуля. Из этого вытекает, что сигналы вида  $u(t) = A_0 \cos \times (\omega_0 t + \Phi(t))$ ,  $A_0 = \text{const}$ , для которых  $I(t) = (1/2) A_0 \exp(i\Phi(t))$ , не могут иметь финитный аналитический спектр.

**Следствие 2.** При  $|t| \rightarrow \infty$  фаза  $\Phi(t) = \arg I(t)$  монотонно возрастает или убывает.

Это вытекает из того, что выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (9), описывает движение изображающей точки по центрально-симметричному эллипсу. В случае вырождения эллипса в центрально-симметричный отрезок  $\Phi(t)$  вырождается в ступенчатую возрастающую или убывающую функцию при высоте ступеньки  $\pi$ .

Следствие 2 показывает, что сигналы вида  $u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi_0)$ , где  $\Phi_0 = \text{const}$ , не могут иметь финитный аналитический невырожденный спектр.

Асимптотика функции  $A^2(t)$ . Обозначим через  $\bar{E}(t)$  квадрат модуля выражения, стоящего в фигурных скобках формулы (8). Тогда асимптотику функции  $A^2(t)$  согласно формулам (2), (8) можно записать в виде  $A^2(t) = (4/t^2) \bar{E}(t)$ , где

$$\begin{aligned} \bar{E}(t) &= (a \cos \Delta t + b \sin \Delta t)^2 + (c \cos \Delta t + d \sin \Delta t)^2 = \\ &= c_0 + c_2 \cos(2\Delta t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$a = G_1; \quad b = F_2; \quad c = -F_1; \quad d = G_2; \quad c_0 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 + b^2 + d^2);$$

$$c_2^2 = \frac{1}{4} [(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)]^2 + (ab + cd)^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{2(ab + cd)}{a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)},$$

если  $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$  и  $c_0 = a^2 + c^2$ ;  $c_2 = ab + cd$ ;  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ , если  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ .

Так как равная сумме квадратов функция  $\bar{E}(t) \geq 0$ , то  $c_0 \geq c_2$ . Если функция  $A(t) > 0$ , то  $\bar{E}(t) > 0$  и  $c_0$  строго больше  $c_2$ .

Из формулы (10) видно, что функция  $\bar{E}(t)$  может быть продолжена в комплексную плоскость  $S$  до целой функции экспоненциального типа:

$$\bar{E}(z) = c_0 + c_2 \cos(2\Delta z + \varphi_2).$$

Она имеет бесконечное количество нулей [3], ни один из которых не лежит на вещественной оси, если  $c_0 > c_2$ . В дальнейшем рассматриваем только такой случай.

Чтобы найти нули целой функции  $\bar{E}(z)$ , рассмотрим уравнение:

$$c_0 + c_2 \frac{1}{2} [e^{i(2\Delta z + \varphi_2)} + e^{-i(2\Delta z + \varphi_2)}] = 0. \quad (11)$$

Обозначив  $\lambda = e^{i(2\Delta z + \varphi_2)}$ , приведем его к виду  $2\bar{c} + \lambda + \frac{1}{\lambda} = 0$ , где  $\bar{c} = \frac{c_0}{c_2} > 1$ . Решая это уравнение и учитывая (11), приходим к выводу, что все корни уравнения (11) образуют два множества:  $\{x_n + ih\} \cup \{x_n - ih\}$ , где

$$x_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2\Delta} - \frac{\varphi_2}{2\Delta}; \quad h = \frac{1}{2\Delta} \ln(\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - 1}).$$

Легко проверить, что функции  $E^\pm(z) = \cos(\Delta z + \frac{1}{2} \varphi_2 \pm i\Delta h)$  имеют нули:  $\{x_n \mp ih\}$  соответственно. Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} E^+(z) E^-(z) &= \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2} \varphi_2 + i\Delta h\right) \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2} \varphi_2 - i\Delta h\right) = \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch} 2\Delta h + \cos(2\Delta z + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Так как

$$\operatorname{ch} 2\Delta h = \frac{1}{2} (2^{2\Delta h} + e^{-2\Delta h}) = \frac{1}{2} \left( \bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - 1} + \frac{1}{\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - 1}} \right) = \bar{c} = \frac{c_0}{c_2},$$

то

$$E^+(z)E^-(z) = (1/2c_2) [c_0 + c_2 \cos(2\Delta z + \varphi_2)].$$

Следовательно,  $\tilde{E}(z) = 2c_2 E^+(z)E^-(z)$ . Здесь функция  $E^+(z)$  имеет нули в нижней полуплоскости, а  $E^-(z)$  — в верхней.

Итак, доказано следующее.

**Предложение 2.** Асимптотика при  $|t| \rightarrow \infty$  квадрата амплитудной функции  $A^2(t) > 0$  сигнала  $u(t)$  с финитным аналитическим спектром имеет вид

$$A^2(t) |_{|t| \rightarrow \infty} = \frac{4}{t^2} \tilde{E}(t),$$

где

$$\tilde{E}(t) = c_0 + c_2 \cos(2\Delta t + \varphi_2), \quad c_0 > c_2 > 0$$

является целой функцией экспоненциального типа и представляется произведением

$$\tilde{E}(z) = 2c_2 E^+(z)E^-(z),$$

где

$$E^\pm(z) = \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2}\varphi_2 + i\Delta h\right)$$

—целые функции экспоненциального типа, нули которых лежат соответственно выше и ниже вещественной оси, а  $h$  удовлетворяет уравнению  $\operatorname{ch} 2\Delta h = c_0/c_2$ .

Список литературы: 1. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., 1971. 408 с. 2. Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А. Амплитуда, фаза, частота — основные понятия теории колебаний // Успехи физ. наук. 1977. Т. 123. Вып. 4. С. 657—682. 3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М. Наука. 1983. 175 с.

Поступила в редколлегию 13.07.88

УДК 621.37:621.391

О. В. СЫТНИК, канд. техн. наук

### ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СВОЙСТВ ФАЗОВОГО ШУМА АППАРАТУРЫ НА РАЗРЕШЕНИЕ РАДИОЛОКАТОРА С СИНТЕЗИРОВАНИЕМ АПЕРТУРЫ

Одна из основных проблем при разработке радиолокатора с синтезированием апертуры (РСА) — учет фазовых ошибок, возникающих в различных блоках аппаратуры. В реальной аппаратуре фазовые ошибки обусловлены рядом факторов. Генераторы и другие электронные элементы РЛС имеют нестабильность параметров, что приводит к появлению фазового шума, вызывающего ухудшение качества радиолокационных изображений РСА.

Для решения этой проблемы необходимо установить аналитическую взаимосвязь статистических характеристик фазового шума аппа-

ратуры и потенциальных характеристик РСА, что позволит на этапе ее проектирования, во-первых, дать статистически достоверные оценки качества радиолокационных изображений разрабатываемой системы, во-вторых, сформулировать требования к стабильности отдельных узлов и блоков аппаратуры.

Влияние фазового шума на характеристики РСА наиболее удобно рассматривать с использованием обобщенной функции неопределенности [1]:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t + \tau) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Представим фазовый шум аппаратуры в виде действительного стационарного процесса  $\alpha(t)$  с известными статистическими характеристиками. Функцию неопределенности (1) РСА с учетом этих шумов можно записать в виде

$$\bar{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t + \tau) e^{i\alpha(t)} e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

Функцию  $f(t)$ , входящую в соотношения (1), (2) и зависящую от вида применяемого в локаторе сигнала, для общности изложения не конкретизируем.

Ошибка положения цели вдоль направления полета на результирующем изображении РСА, определяемая алгоритмом фокусирования, характеристиками системы стабилизации носителя, фазовым шумом  $\alpha(t)$  аппаратуры и другими факторами, может быть найдена как

$$m_{X'}(\alpha) = \frac{\int X' \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'}{\int \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'}, \quad (3)$$

где  $X'$  — координата вдоль направления полета носителя РСА.

Протяженность области ошибок, соответствующая основанию прямоугольника, высота которого совпадает с максимумом функции  $\bar{\psi}$ , а площадь равна площади под кривой  $\bar{\psi}$  при фиксированном  $\tau$ , запишется в виде

$$\sigma_{X'}(\alpha) = \left[ \frac{\int (X')^2 \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'}{\int \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'} - \frac{\int X' \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'}{\int \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Для отыскания аналитической взаимосвязи статистических характеристик процесса  $\alpha(t)$  и потенциальных характеристик РСА найдем усредненные по  $\alpha$  оценки  $m_{X'}^2$  и  $\sigma_{X'}^2$ , т. е.

$$m_{X'}^2 = E \{m_{X'}^2(\alpha)\}; \quad (5)$$

$$\sigma_{X'}^2 = E \left\{ \frac{\int (X')^2 \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'}{\int \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'} \right\} - m_{X'}^2. \quad (6)$$

Прежде чем перейти к вычислению  $m_{X'}^2$ , по формуле (5), покажем, что знаменатель выражения (3) не зависит от  $\alpha$ . Согласно (2), функция  $\bar{\psi}$  есть преобразование Фурье от функции  $f(t) f^*(t + \tau) e^{i\alpha t}$ . В соответствии с теоремой Парсеваля [2]

$$\int \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX' = \int \text{mod}^2 \{f(t) f^*(t + \tau) e^{i\alpha t}\} dt = \\ = \int f(t) f^*(t) f^*(t + \tau) f(t + \tau) e^{-i\alpha t} e^{i\alpha t} dt = \int \text{mod}^2 \{\psi\} dX' = D. \quad (7)$$

С учетом (7) выражение (3) переписывается в виде

$$m_{X'}(\alpha) = D^{-1} \int X' \text{mod}^2 \{\bar{\psi}\} dX'. \quad (8)$$

Среднее по  $\alpha$   $m_{X'}^2$ , найдем, подставив (8) в (5):

$$m_{X'}^2 = E \{m_{X'}^2(\alpha)\} = D^{-2} \iint \xi \beta E \{\text{mod}^2 \{\bar{\psi}(\xi, \tau)\} \text{mod}^2 \{\bar{\psi}(\beta, \tau)\}\} d\xi d\beta. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$B(\xi, \beta) = E \{\text{mod}^2 \{\bar{\psi}(\xi, \tau)\} \text{mod}^2 \{\bar{\psi}(\beta, \tau)\}\}.$$

тогда

$$m_{X'}^2 = D^{-2} \iint \xi \beta B(\xi, \beta) d\xi d\beta = \frac{\iint \xi \beta B(\xi, \beta) d\xi d\beta}{\iint B(\xi, \beta) d\xi d\beta}. \quad (10)$$

Расписывая функцию  $B$ , входящую в (10), имеем

$$B(\xi, \beta) = \iiint \iiint f(X) f^*(X + \tau) e^{i\alpha(X)} e^{-i\xi u} f^*(X - u) \times \\ \times f(X - u + \tau) e^{-i\alpha(X - u)} f(y) f^*(y + \tau) e^{i\alpha(y)} f^*(y - u) \times \\ \times f(y - v + \tau) e^{-i\alpha(y - v)} e^{-i\beta v} du dv dx dy = \iiint \iiint g(X) g^*(X - u) \times \\ \times g(y) g^*(y - v) E \{e^{i[\alpha(X) - \alpha(X - u) + \alpha(y) - \alpha(y - v)]}\} e^{-i\xi u} e^{-i\beta v} du dv dx dy. \quad (11)$$

Здесь

$$g(t) = f(t) f^*(t + \tau).$$

Обозначим подынтегральную функцию в (11) как

$$G(u, v) = \iiint g(X) g^*(X - u) g(y) g^*(y - v) \times \\ \times E \{e^{i[\alpha(X) - \alpha(X - u) + \alpha(y) - \alpha(y - v)]}\} dX dy. \quad (12)$$

Тогда в соответствии с (11) запишем

$$B(\xi, \beta) = \iint G(u, v) e^{-i\xi u} e^{-i\beta v} du dv. \quad (13)$$

По форме записи функция  $B(\xi, \beta)$  в (13) является двумерным преобразованием Фурье от  $G(u, v)$ , т. е., записав обратное преобразование Фурье, получим

$$G(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint B(\xi, \beta) e^{i\xi u} e^{i\beta v} d\xi d\beta. \quad (14)$$

В точке с координатами  $u = 0; v = 0$  функция  $G(0, 0)$  в (14) превращается в

$$G(0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint B(\xi, \beta) d\xi d\beta.$$

Отсюда находим знаменатель формулы (10)

$$D^2 = 4\pi^2 G(0, 0) = \iint B(\xi, \beta) d\xi d\beta. \quad (15)$$

Воспользовавшись свойством преобразования Фурье, найдем числитель формулы (10) как производную функции  $G(u, v)$  по ее аргументам:

$$\frac{4\pi^2 \partial^2 G(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = - \iint \xi \beta B(\xi, \beta) d\xi d\beta, \quad (16)$$

тогда

$$m_{X'}^2 = E\{m_{X'}^2(\alpha)\} = \frac{\iint \xi \beta B(\xi, \beta) d\xi d\beta}{\iint B(\xi, \beta) d\xi d\beta} = \frac{\frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}}}{G(0, 0)}. \quad (17)$$

Подставляя (12) в числитель формулы (17), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \iint g(X) g(y) E\{e^{i[\alpha(X) - \alpha(X-u) + \alpha(y) - \alpha(y-v)]}\} dX dy = \\ &= \iint \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} g^*(X-u) g^*(y-v) dX dy + \\ &+ \iint g(X) g(y) g^*(X-u) g^*(y-v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} E\{e^{i[\alpha(X) - \alpha(X-u) + \alpha(y) - \alpha(y-v)]}\} \times \\ &\quad \times dX dy + \iint g(X) g(y) \frac{\partial}{\partial u} g^*(X-u) g^*(y-v) \frac{\partial}{\partial v} \times \\ &\quad \times E\{e^{i[\alpha(X) - \alpha(X-u) + \alpha(y) - \alpha(y-v)]}\} dX dy + \\ &\quad + \iint g(X) g(y) \frac{\partial}{\partial v} g^*(X-u) g^*(y-v) \frac{\partial}{\partial u} \times \\ &\quad \times E\{e^{i[\alpha(X) - \alpha(X-u) + \alpha(y) - \alpha(y-v)]}\} dX dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычисляя производные в (18) в точках  $u = 0; v = 0$ , раскрывая функцию  $g(t)$  и подставляя результат в (17), имеем

$$m_{X'}^2 = \frac{\iint \text{mod}^2 \{f(X) f^*(X+\tau)\} \text{mod}^2 \{f(y) f^*(y+\tau)\} R_{\alpha'}(X-y) dX dy}{\left[ \iint \text{mod}^2 \{f(t)\} \text{mod}^2 \{f(t+\tau)\} d\tau \right]^2}, \quad (19)$$

где  $R_{\alpha'}(X-y)$  — корреляционная функция производной процесса  $\alpha(t)$ .

Соотношение (19) устанавливает искомую связь между корреляционной функцией производной процесса  $\alpha(t)$  и математическим ожиданием квадрата ошибок положения  $m_{X'}^2$ .

Для количественной оценки влияния процесса  $\alpha(t)$  на характеристики РСА представим модуль идеальной (неискаженной) функции неопределенности РСА как [1]

$$\text{mod}^2 \{f\} = \frac{\sin^2 \gamma \tau (2R/C - 2R'/C) \sin^2 [(N+1)(2\pi X'vT)/\lambda R_0]}{[\gamma (2R/C - 2R'/C)]^2 \sin^2 (2\pi X'vT/\lambda R_0)},$$

где  $\gamma$  — удвоенная скорость изменения частоты при частотной модуляции излучаемого импульса;  $\lambda$  — длина волны колебаний;  $C$  — скорость распространения электромагнитных колебаний;  $v$  — путевая скорость носителя РЛС;  $T$  — период повторения зондирующих сигналов;  $R$  — наклонная дальность до точки с координатами  $(0, y_0, 0)$ ;  $R'$  — наклонная дальность до точки с координатами  $(X', y_0, 0)$ .

Анализ соотношения (19) с учетом последнего выражения для различных законов распределений вероятностей процесса  $\alpha(t)$  позволяет сделать вывод об инвариантности величины  $m_{X'}^2$ , относительно всех симметричных распределений, т. е. для распределений, у которых коэффициент асимметрии  $K_a = m_3^0/\sigma_\alpha^3 \equiv 0$  ( $m_3^0$  — центральный момент третьего порядка). В таблице приведены значения  $m_{X'}^2$  и  $K_a$  для некоторых распределений.

Одним из наиболее сильных источников фазовой нестабильности среди электронных блоков РСА являются гетеродины преобразователей частоты приемника, охваченные кольцами фазовой подстройки частоты (ФАПЧ). Как показано в работе [3], распределение мгновенных значений отклонений частоты генератора в петле ФАПЧ имеет симметричное распределение.

С целью вывода аналогичной соотношению (19) зависимости для  $\sigma_{X'}^2$ , в соотношении (4) перепишем формулу (6) с учетом обозначения (7):

$m_{X'}^2, \text{ м}^2$	$K_a$	Закон распределения
0	0	Равномерный
0	0	Нормальный
$\infty 0,4 \cdot 10^{-3} R'^2$	$(\pi-3)\sqrt{\pi/2}$	Релея
$3,8 \cdot 10^{-3} R'^2$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	Лапласа
$\infty 10^{-3} R'^2$   при $\alpha = 3$ $\infty 4 \cdot 10^{-3} R'^2$   при $\alpha = 0,1$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}$	Гамма распределения

$$\sigma_{X'}^2 = \frac{E \left\{ \int (X')^2 \text{mod}^2 \{\tilde{\psi}\} dX' \right\}}{D} - m_{X'}^2; \quad (20)$$

$$E \{ \text{mod}^2 \{\tilde{\psi}\} \} = E \left\{ \iint g(X) g^*(y) e^{-iX'(X-y)} e^{i(\alpha(X)-\alpha(y))} dX dy \right\}; \quad (21)$$

Обозначим  $E \{ e^{i(\alpha(X)-\alpha(y))} \} = \varphi(X-y)$ .

Тогда, делая замену переменных в (21), записываем

$$E \{ \text{mod}^2 \{\tilde{\psi}\} \} = \iint g(X) g^*(X-Z) \varphi(Z) e^{-iX'Z} dX dZ. \quad (22)$$

Обозначив  $B(X') = E \{ \text{mod}^2 \{\tilde{\psi}\} \}$  и  $G(Z) = \int \varphi(Z) g(X) g^*(X-Z) dX$ , видим, что функции  $G(Z)$  и  $B(X')$  связаны друг с другом преобразованием Фурье

$$G(Z) = \frac{1}{2\pi} \int B(X') e^{iX'Z} dX'.$$

Легко показать, что интеграл  $\int (X')^2 B(X') dX'$  эквивалентен производной  $2\pi \partial^2 G / \partial Z^2|_{Z=0}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(Z)}{\partial Z} &= \int \frac{\partial \varphi(Z)}{\partial Z} g(X) g^*(X-Z) dX - \int \varphi(Z) g(X) \frac{\partial}{\partial Z} g^*(X-Z) dX, \\ \frac{\partial^2 G(Z)}{\partial Z^2} &= \int \frac{\partial^2 \varphi(Z)}{\partial Z^2} g(X) g^*(X-Z) dX - 2 \int \frac{\partial \varphi(Z)}{\partial Z} g(X) \frac{\partial}{\partial Z} \times \\ &\quad \times g^*(X-Z) dX + \int \varphi(Z) g(X) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} g^*(X-Z) dX. \end{aligned}$$

Очевидно, что если  $E\{\alpha'\} = 0$ , то и функция  $\frac{\partial \varphi(0)}{\partial Z} = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(0)}{\partial Z^2} &= \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial Z^2} \int \text{mod}^2 \{g(X)\} dX + \int g(X) \frac{\partial^2}{\partial Z^2} g^*(X-Z) dX, \\ - \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial Z^2} &= E \left\{ \text{mod}^2 \left\{ \frac{d^2}{dZ^2} e^{j\alpha(Z)} \right\} \right\} = E \left\{ \left[ \frac{\partial \alpha(Z)}{\partial Z} \right]^2 \right\}, \\ &\quad \text{так как } \text{mod}^2 \{e^{j\alpha(Z)}\} = 1. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^2 G(0)}{\partial Z^2} &= \frac{1}{2\pi} E \left\{ \left[ \frac{\partial \alpha(Z)}{\partial Z} \right]^2 \right\} \int \text{mod}^2 \{f(Z) f^*(Z+\tau)\} dZ + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int (X')^2 \text{mod}^2 \{\psi(X', \tau)\} dX'. \end{aligned} \quad (23)$$

Разделив левую и правую части (23) на  $\int \text{mod}^2 \{f(t) f^*(t+\tau)\} dt$  и вычтя из правой части  $m_{X'}^2$ , получаем развернутое выражение для квадрата протяженности области ошибок (20)

$$\sigma_{X'}^2 = E \left\{ \left[ \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \right]^2 \right\} + \frac{\int (X')^2 \text{mod}^2 \{\psi(X', \tau)\} dX'}{\int \text{mod}^2 \{f(t) f^*(t+\tau)\} dt} - m_{X'}^2. \quad (24)$$

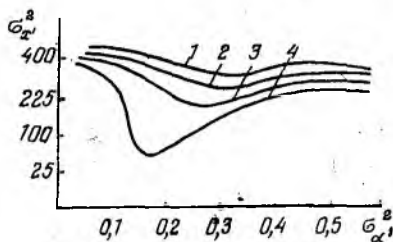
Второй член в правой части соотношения (24) не зависит от фазового шума  $\alpha(t)$  и определяет идеальное разрешение РСА. Первое слагаемое формулы (24) полностью определяется фазовыми нестабильностями гетеродинов, ошибками округления на разрядной сетке ограниченной длины цифровых блоков обработки и нестабильностями других блоков РСА.

Подставив в соотношение (24) значение модуля неискаженной функции неопределенности и считая шум гауссовским, можно найти зависимости  $\sigma_{X'}^2$  от дисперсии шума  $\sigma_{\alpha}^2$  при различных параметрах РСА. Зависимости, приведенные на рисунке, получены при следующих параметрах:  $v = 7500$  м/с;  $T = 10^{-3}$  с;  $\lambda = 0,23$  м;  $R_0 = 734300$  м; кривая 1 получена при  $N = 289$ ; 2 — 352; 3 — 423; 4 — 512.

Характер кривых свидетельствует о наличии явно выраженного экстремума. С уменьшением требований к потенциальному разрешению вдоль линии полета носителя РЛС (что эквивалентно снижению размера эффективной синтезированной апертуры  $L_{\text{эфф}} = (N+1)vT$ ) значение минимума функции  $\sigma_{X'}^2 = f(\sigma_{\alpha}^2)$  смещается в область боль-

ших значений  $\sigma_x^2$ , и наблюдается размытие экстремума. Последний эффект объясняется расширением главного лепестка идеальной функций неопределенности.

Таким образом, анализируя соотношения (19) и (24), которые устанавливают взаимосвязь между статистическими характеристиками шума аппаратуры и интегральными тактико-техническими характеристиками РСА, сформулируем задачу оптимизации структуры РСА. В частности, фиксируя параметры шума  $\alpha(t)$ , что, в свою очередь, эквивалентно заданию технических требований электронным блокам РСА, можно путем выбора параметров функции  $f(t)$  минимизировать  $\sigma_x^2$ . При этом оптимизационную процедуру можно организовать итеративно. Например, выбрав параметры функции  $f(t)$ , обеспечивающие  $\min \sigma_x^2$  при фиксированных параметрах процесса  $\alpha(t)$ , оценивают затраты на техническую реализацию РСА в целом. Затем изменяют технические требования к отдельным блокам РСА (что эквивалентно выбору новых параметров процесса  $\alpha(t)$ ) и вновь осуществляют минимизацию  $\sigma_x^2$ , и так до тех пор, пока не будет достигнут разумный компромисс между стоимостью и технической сложностью отдельных узлов аппаратуры и стоимостью устройств обработки сигналов при реализации заданных тактико-технических параметров РСА.



**Список литературы:** 1. *Справочник по радиолокации* / Под ред. М. Скольника / Пер. с англ., под ред. К. Н. Трофимова Т. 2. М., 1977. 408 с. 2. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров* М., 1984. 831 с. 3. *Манассевич В. Синтезаторы частот (Теория и проектирование):* Пер. с англ. / Под ред. А. С. Галина. М., 1979. 384 с.

Поступила в редколлегию 05.07.88

УДК 621.391

*И. Н. ПРЕСНЯКОВ*, канд. техн. наук, *Ю. В. АФАНАСЬЕВ*

### ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Один из возможных способов адаптивной фильтрации состояния динамических систем в условиях параметрической априорной неопределенности относительно их моделей реализуется в методе максимального правдоподобия (ММП) [1]. Применение этого метода в общем случае приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно оценок векторов состояния и неизвестных параметров модели. Решение такой системы может быть получено с помощью различных рекуррентных процедур [1; 2], некоторые из которых позволяют

раздельно формировать эти оценки [1; 3]. Вычисление оценок происходит раздельно, если для фильтрации состояния используется текущее измерение и оценка параметров модели с предыдущего шага. Возможен также альтернативный вариант, когда оценивание параметров выполняется на основе текущего измерения и предыдущей оценки вектора состояния.

В работе [3] предложен рекуррентный адаптивный алгоритм фильтрации при линейных моделях состояния и наблюдения в условиях отсутствия шума системы. Неизвестной предполагается только матрица ковариаций шума измерения. В статье рассмотрим случай, когда нелинейная динамическая система с  $K$ -мерным вектором состояния  $\mathbf{x}_n$  и  $M$ -мерным вектором наблюдения  $\mathbf{y}_n$  находится под воздействием случайных возмущений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= F(\mathbf{x}_{n-1}, \alpha) + \xi_n; \\ \mathbf{y}_n &= H(\mathbf{x}_n, \beta) + \eta_n, \end{aligned} \quad (1)$$

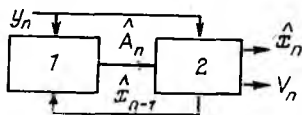


Рис. 1

а неизвестными могут быть матрицы ковариаций шумов  $E[\xi_i \xi_j^T] = V_1 \delta(i-j)$ ;  $E[\eta_i \eta_j^T] = V_2 \delta(i-j)$  и параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  матриц  $F(\cdot, \alpha)$  и  $H(\cdot, \beta)$

Для совокупности неизвестных параметров введем обозначение

$$A = \{\alpha^T; \beta^T; v_1(i, j; i, j = \overline{1, K}); v_2(i, j; i, j = \overline{1, M})\}.$$

Здесь  $v_1, v_2$  — элементы матриц  $V_1, V_2$ . Найдем алгоритм функционирования адаптивного фильтра в предположении, что каждое новое измерение  $y_n$  последовательно используется сначала для уточнения вектора параметров  $A$  (формирования оценки  $\hat{A}_n$  в блоке 1), затем, совместно с  $\hat{A}_n$ , для фильтрации состояния системы  $\mathbf{x}_n$  в блоке 2 (рис. 1).

Оценка вектора параметров  $\hat{A}_n$  в ММП находится в результате решения уравнения максимального правдоподобия. Функцию правдоподобия, соответствующую (1), представим в виде произведения

$$p(\mathbf{y}^n | A) = p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}^{n-1}, A) p(\mathbf{y}^{n-1} | A), \quad (2)$$

где  $\mathbf{y}^n = \{\mathbf{y}_i, i = \overline{1, n}\}$ . Для установившегося режима фильтрации можно записать

$$p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}^{n-1}, A) = p(\mathbf{y}_n | \hat{\mathbf{x}}_{n-1}, A), \quad (3)$$

где учтено, что оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{n-1}$  является достаточной статистикой вы-

борки  $y^{n-1}$  [2]. Одношаговую условную функцию правдоподобия (3) определим как

$$p(y_n | \hat{x}_{n-1}, A) = \int p(y_n | x_n, A) p(x_n | \hat{x}_{n-1}, A) \prod_{i=1}^K dx_{n,i}. \quad (4)$$

Здесь

$$p(x_n | \hat{x}_{n-1}, A) = \int p(x_n | x_{n-1}, A) p(x_{n-1} | \hat{x}_{n-1}, A) \prod_{i=1}^K dx_{n-1,i}; \quad (5)$$

$x_{n,i}, x_{n-1,i}$  — элементы векторов  $x_n, x_{n-1}$ . Интегрирование в выражениях (4), (5) и далее выполняется по всей области существования соответствующих переменных.

На основании (1) запишем

$$p(y_n | x_n, A) = N[H(x_n, \beta); V_2]; \quad (6)$$

$$p(x_n | x_{n-1}, A) = N[F(x_{n-1}, \alpha); V_1]. \quad (7)$$

Плотность вероятности  $p(x_{n-1} | \hat{x}_{n-1}, A)$ , входящая в (5), зависит от способа вычисления оценки  $\hat{x}_{n-1}$ . Если фильтрация выполняется в линейном приближении (расширенный фильтр Калмана и др.), то

$$p(x_{n-1} | \hat{x}_{n-1}, A) = N[\hat{x}_{n-1}(A); V_{n-1}(A)], \quad (8)$$

где  $V_{n-1}(\cdot)$  — матрица апостериорных дисперсий оценки  $\hat{x}_{n-1}$ .

Для точного вычисления выражений (4), (5) с учетом (6)...(8) необходимо знать конкретный вид функций  $F(x_{n-1}, \cdot)$  и  $H(x_n, \cdot)$ . Так, в случае линейных моделей состояния и наблюдения

$$x_n = F(\alpha) x_{n-1} + \xi_n; \quad y_n = H(\beta) x_n + \eta_n \quad (9)$$

интегрирование приводит к следующей одношаговой условной функции правдоподобия:

$$p(y_n | \hat{x}_n, A) = N\{H(\beta)F(\alpha)\hat{x}_{n-1}; V_2 + H(\beta)[V_1 + F(\alpha)V_{n-1}F^T(\alpha)]H^T(\beta)\}. \quad (10)$$

При нелинейных функциях  $F(x_{n-1}, \cdot)$  и  $H(x_n, \cdot)$  интегралы (4), (5), как правило, не удается привести к табличным. Поэтому целесообразно выполнить приближенное интегрирование в общем виде путем разложения этих функций в ряд Тейлора. Если при этом ограничиться линейными и квадратичными членами ряда, получим интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x)} dx. \quad (11)$$

В приложении показано, что при  $\alpha_4 > 0$

$$I \approx \frac{\sqrt{n_2}}{2} e^{\alpha_4(n_2^3/8 - n_0)} \left\{ \left(1 - \frac{n_2 n_1^2 \alpha_4^2}{32}\right) K_{\frac{1}{4}}(z) + \frac{n_2 n_1^2 \alpha_4^2}{32} K_{\frac{3}{4}}(z) \right\}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} z &= \alpha_4 \frac{n_2^2}{8}; \quad n_0 = \frac{-3\alpha_3^4}{256\alpha_4^4} + \frac{1}{16} \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\alpha_4^3} - \frac{1}{4} \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_4^2}; \\ n_1 &= \frac{\alpha_3^3}{\alpha_4^3} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_4^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}; \quad n_2 = -\frac{3}{8} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_4^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}; \end{aligned} \quad (13)$$

$K_\mu(z)$  — модифицированная функция Бесселя 2-го рода порядка  $\mu$  (функция Макдональда).

На основе (11) — (13) можно получить функцию правдоподобия (3) для широкого класса нелинейных моделей. В частности при подстановке в (13)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -[(y_n - y_n^0)(H' - H''x_n^0)\sigma^2 + x_n^0\sigma_1^2]/(\sigma^2\sigma_2^2); \\ \alpha_2 &= \{[(H' - H''x_n^0)^2 - (y_n - y_n^0)H'']\sigma^2 + \sigma_2^2\}/(2\sigma^2\sigma_2^2); \\ \alpha_3 &= (H' - H''x_n^0)H''/(2\sigma_2^2); \quad \alpha_4 = (H'')^2/(8\sigma_2^2) \end{aligned} \quad (14)$$

плотность вероятности  $p(y_n | \hat{x}_{n-1}, A) = I \cdot e^{-\alpha_0}/(2\pi\sigma_2)$  является искомой функцией правдоподобия для распространенной на практике модели в виде нормальной марковской последовательности  $x_n = F(\alpha) \times x_{n-1} + \xi_n$  при нелинейном уравнении наблюдения  $y_n = H(x_n, \beta) + \eta_n$ . В (14) обозначено

$$\begin{aligned} y_n^0 &= H - H'x_n^0 + \frac{1}{2}H''(x_n^0)^2; \quad \alpha_0 = [(y_n - y_n^0)^2\sigma^2 + (x_n^0)^2\sigma_1^2]/(2\sigma^2\sigma_2^2); \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + F^2\sigma_{n-1}^2; \quad x_n^0 = F\hat{x}_{n-1}; \end{aligned} \quad (15)$$

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{n-1}^2$  — дисперсии соответственно шумов состояния, наблюдения и оценивания на шаге  $(n-1)$ , причем аргумент  $x_n^0$  функции  $H(\cdot)$  и ее производных в (14), (15) для краткости опущен.

Противоположный случай (уравнение наблюдения линейно, уравнение состояния — нет) характерен для косвенного подхода к нелинейной фильтрации [4]. Несложно проверить, что соответствующая одношаговая условная функция правдоподобия также сводится к (11) — (13).

Плотность вероятности  $p(y^{n-1} | A)$  (второй сомножитель в (2)) представим в виде

$$p(y^{n-1} | A) = p(y_1 | A) \prod_{i=1}^{n-2} p(y_{i+1} | y^i, A) = p(\hat{x}_1 | A) \prod_{i=1}^{n-2} p(y_{i+1} | \hat{x}_i, A), \quad (16)$$

где  $p(\hat{x}_1 | A)$  — начальное условие;  $p(y_{i+1} | \hat{x}_i, A)$  — определяется в соответствии с (10) или из (11) — (13).

Ограничимся рассмотрением регулярных [2] оценок вектора  $A$ . Тогда уравнение максимального правдоподобия может быть переписано в виде  $\nabla_A \ln p(y^n | A) = 0$ , где  $\nabla_A \triangleq \left\{ \frac{\partial}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_N} \right\}$  — вектор-

ный оператор частных производных. Следуя работе [2], обозначим

$$L_n(A) = L_{n-1}(A) + l_n(A); \quad (17)$$

$$l_n(A) = \ln p(y_n | \hat{x}_{n-1}, A); \quad (18)$$

$$L_{n-1}(A) = \ln p(y^{n-1} | A). \quad (19)$$

Разлагая  $l_n(A)$  и  $L_{n-1}(A)$  в ряд Тейлора в точке  $\hat{A}_{n-1}$  с сохранением линейных членов, имеем [2]

$$\hat{A}_n = \hat{A}_{n-1} + D_n^{-1} \nabla_A l_n(\hat{A}_{n-1}), \quad (20)$$

$$D_n = -\{\nabla_A \nabla_A^T [L_{n-1}(\hat{A}_{n-1}) + l_n(\hat{A}_{n-1})]\}. \quad (21)$$

В соответствии с (16), (21) весовая матрица  $D_n$  зависит от всей выборки  $y^{n-1}$ . От этого недостатка свободна приближенная формула [2]

$$D_n \approx D_{n-1} - \nabla_A \nabla_A^T l_n(\hat{A}_{n-1}). \quad (22)$$

Для натуральных  $m < n$  на основе разложения

$$L_{n-1}(A) = L_{n-m}(A) + \sum_{i=n-m+1}^{n-1} l_i(A) \quad (23)$$

можно предложить более общее соотношение:

$$D_n = D_{n-m} - \nabla_A \nabla_A^T \sum_{i=n-m+1}^{n-1} l_i(\hat{A}_{n-1}). \quad (24)$$

При выводе этого уравнения, начиная с  $m+2$ -го шага, использовалась приближенная подстановка  $\hat{A}_{n-1} \approx \hat{A}_{n-m-2}$ .

Если применять априорную оценку  $D_1 = -\nabla_A \nabla_A^T \ln p(x_1 | A)$ , то первые  $m+1$  матриц  $D_i$ , вычисленных по формуле (24),

$$D_2 = D_1 - \nabla_A \nabla_A^T \ln p(y_2 | y_1, \hat{A}_1);$$

. . . . . (25)

$$D_{m+1} = D_1 - \nabla_A \nabla_A^T \ln p(y_2 | y_1, \hat{A}_m) - \dots - \nabla_A \nabla_A^T \ln p(y_{m+2} | y^m, \hat{A}_m)$$

будут соответствовать точному выражению (21). Начиная с шага  $m+2$ , весовые матрицы  $D_i$  определяются приближенно. В связи с этим отметим, что именно первые шаги в значительной степени определяют качество работы алгоритма. При  $m=1$  (24) переходит в (22). При  $m=n-1$  в (21).

Оценка неизвестных параметров  $\hat{A}_n$ , формируемая в соответствии с (20), (24), совместно с текущим измерением  $y_n$  служит входной информацией блока фильтрации состояния (рис. 1). Фильтрация выполняется в соответствии с одним из алгоритмов Калмана [5] либо косвенным методом [4]. В качестве неизвестных параметров используются компоненты оценки  $\hat{A}_n$ . На начальном этапе, пока отличие  $\hat{A}_n$  от  $A$  велико, элементы матрицы апостериорных дисперсий  $V_n$  (а значит, и матрицы усиления  $K_n = V_n H^T (\beta) V_2^{-1}$ ) также остаются большими.

Поэтому основную роль в формировании новой оценки играет текущее измерение. С увеличением  $n$  по мере приближения  $\hat{A}_n$  к  $A$  относительный вес экстраполированной оценки  $\hat{x}_n^2$  вырастает, приближаясь к установившемуся значению. Переходный процесс заканчивается.

Качество фильтрации и скорость сходимости можно повысить за счет применения на каждом шаге дополнительной процедуры, состоящей в корректировке предыдущей оценки  $\hat{x}_{n-1}$  по результатам текущего измерения  $y_n$ . Известно [5], что уточненная оценка

$$\hat{x}_{n-1|n} \approx \hat{x}_{n-1} + V_{n-1} \frac{\partial F^T(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n)}{\partial x_{n-1}} V_{n|n-1}^{-1} [\hat{x}_n - \hat{x}_{n|n-1}], \quad (26)$$

где в первом приближении

$$V_{n|n-1} = V_1 + \frac{\partial F(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n)}{\partial x_{n-1}} V_{n-1} \frac{\partial F^T(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n)}{\partial x_{n-1}}; \quad (27)$$

$$\hat{x}_{n|n-1} = F(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n). \quad (28)$$

Подставляя  $\hat{x}_{n-1|n}$  в одношаговую условную функцию правдоподобия  $l_n(\cdot)$  вместо  $\hat{x}_{n-1}$ , уточняем оценку векторов  $A$  и  $x_n$ . После этого можно переходить к следующему шагу, либо повторить итерацию еще раз. Оценки  $\hat{A}_n$  и  $\hat{x}_n$ , как правило, перестают изменяться уже после второй-третьей итерации.

Эффективность рассмотренного алгоритма исследуем на примере нормальной марковской последовательности  $\{x_n\}$ , заданной разностными уравнениями

$$x_n = fx_{n-1} + \xi_n; \quad y_n = hx_n + \eta_n, \quad (29)$$

где неизвестными параметрами будем считать дисперсию шума состояния  $\sigma_1^2$  или шума наблюдения  $\sigma_2^2$ . В блоке фильтрации используем дискретный одномерный алгоритм Калмана — Бьюси [5]

$$x_n = fx_{n-1} + K_n [y_n - hf\hat{x}_{n-1}]; \quad (30)$$

$$\sigma_n^2 = K_n \sigma_2^2 h^{-1}. \quad (31)$$

Здесь

$$K_n = h\bar{\sigma}_n^2 [h^2\bar{\sigma}_n^2 + \sigma_2^2]^{-1}; \quad \bar{\sigma}_n^2 = \sigma_1^2 + f^2\sigma_{n-1}^2.$$

Обозначим неизвестный параметр через  $\sigma^2$ . В соответствии с (10), (18) запишем

$$l_n(\sigma^2) = -\frac{1}{2} \ln \sigma_n^2(\sigma^2) - \frac{1}{2} \frac{(y_n - hf\hat{x}_{n-1})^2}{\sigma_n^2(\sigma^2)}; \\ \sigma_n^2(\sigma^2) = \sigma_2^2 + h^2(\sigma_1^2 + f^2\sigma_{n-1}^2). \quad (32)$$

Текущая оценка состояния  $x_n$  и ее дисперсия  $\sigma_n^2$  определяются уравнениями (30), (31), в которых в качестве неизвестных параметров  $\sigma_1^2$  или

$\sigma_2^2$  используется их оценка, вычисленная в соответствии с (20), (24) при подстановке (32). Результаты моделирования для  $m = 1$  представлены на рис. 2.

По оси абсцисс отложено безразмерное время  $n = t_n / (t_n - t_{n-1})$ . По оси ординат — оценка параметров  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ . При адаптации по  $\sigma_1^2$  графики (сплошные линии) рассчитывались для следующих параметров модели (29):  $\sigma_{1,(\text{ист})}^2 = 1; \sigma_2^2 = 0,3$ . При адаптации по  $\sigma_2^2$  (пунктирные линии)  $\sigma_{2,(\text{ист})}^2 = 1,5; \sigma_1^2 = 0,1$ . В обоих случаях  $f = 0,95; h = 1$ . Значения априорных оценок  $\hat{\sigma}_1^2(0); \hat{\sigma}_2^2(0)$  и  $D_1$  приведены на рис. 2.

Несмотря на увеличение общей неопределенности системы из-за введения шума состояния  $\xi_n$  и большее число параметров, по которым возможна адаптация, рассмотренный алгоритм по скорости сходимости не уступает предложенному в работе [3].

В сравнении с неадаптивным фильтром Калмана (30) при отклонении априорных значений дисперсий  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  от истинных в 10—15 раз применение предложенного алгоритма адаптации дает уменьшение апостериорной дисперсии оценивания состояния в 2,5—5 раз.

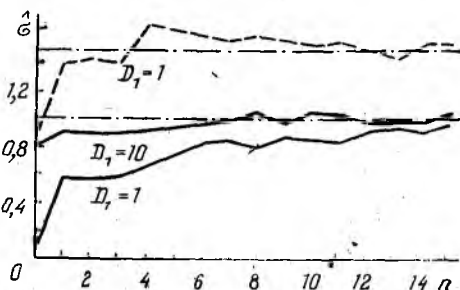


Рис. 2

Адаптация происходит эффективнее, если выбрать априорные оценки такими, что  $\sigma_1(0) > \sigma_{1,(\text{ист})}$ , а  $\sigma_2(0) < \sigma_{2,(\text{ист})}$ . В обратном случае начальный коэффициент усиления фильтра Калмана снижается, что уменьшает чувствительность алгоритма к поступающим измерениям  $y_n$  и, как следствие, приводит к замедлению сходимости. Этот эффект заметно ослабляется при увеличении числа  $m$  в уравнении (24).

**Приложение.** Покажем, что интеграл (11) может быть сведен к табличному [6]:

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma-1} e^{-\rho x^2 - qx} dx = \Gamma(\gamma) (2\rho)^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{q^2}{8\rho}} D_{-\gamma} \left( \frac{q}{\sqrt{2\rho}} \right), \quad (33)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма функция;  $D_{-\gamma}(\cdot)$  — функция параболического цилиндра (ФПЦ).

Замена переменных  $x = y - \alpha_3 / (4\alpha_4)$  в (11) приводит к выражению

$$I = e^{-\alpha_4 n_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_4 (y^4 + n_1 y^2 + n_2 y)} dy, \quad (34)$$

где  $n_0, n_1, n_2$  определяются из (13). Разлагая  $e^{-\alpha_4 n_2 y}$  в ряд Маклорена и учитывая (33), после преобразования получим

$$I = (2\alpha_4)^{-\frac{1}{4}} e^{\alpha_4 \left( \frac{n_2^2}{8} - n_0 \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2^{k/2} (2k)!} \alpha_4^{\frac{3}{2}} n_1^{2k} D_{-k-\frac{1}{2}} \left( n_2 \sqrt{\frac{\alpha_4}{2}} \right). \quad (35)$$

Обозначим аргумент ФПЦ через  $\varphi$ . Используя связь  $D_{-\mu-\frac{1}{2}}(\varphi)$  с модифицированными функциями Бесселя 2-го рода (функциями Макдональда) через функции Уиттекера [6], получаем

$$D_{-\frac{1}{2}}(\varphi) = \frac{\sqrt{\varphi}}{2\pi} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varphi^2}{4}\right); D_{-1\frac{1}{2}}(\varphi) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi^{\frac{3}{2}} \left[ K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varphi^2}{4}\right) - K_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\varphi^2}{4}\right) \right]. \quad (36)$$

Три ФПЦ одного аргумента с последовательными индексами связаны рекуррентными соотношением [6]  $D_{\mu+1}(\varphi) - \varphi D_{\mu}(\varphi) - \mu D_{\mu-1}(\varphi) = 0$ . Это соотношение совместно с (36) позволяет найти любое требуемое количество членов ряда (35), вычислив значения только двух специальных функций  $K_{\frac{1}{4}}(\alpha_4 n_2^2/8)$  и  $K_{\frac{3}{4}}(\alpha_4 n_2^2/8)$ . Если ограничиться двумя членами ряда, получим результат (12).

Список литературы: 1. Гриценко Н. С., Логинов В. П., Севостьянов К. К. Адаптивное оценивание // Зарубеж. радиоэлектроника. М., 1985. № 3. С. 3—26. 2. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М., 1977. 432 с. 3. Tarpley B. D., Born G. H. Sequential estimation of the state and the observation error covariance matrix // AIAA J. 1971. № 2. P. 212—217. 4. Шлома А. М. Косвенный метод нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника и электрон. М., 1986. Т. 31, № 7. С. 1304—1310. 5. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М., 1976. 495 с. 6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971. 1108 с.

Поступила в редколлегию 04.07.88

УДК 621.391

Ю. П. ВИРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, И. Н. ДОМНИНА,  
А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук

### ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХИ

В оптических системах связи полезные сообщения при передаче преобразуются в последовательность двойных (бинарных) символов. Передача сигнального (когерентного) излучения соответствует символу «1», а символу «0» отвечает его отсутствие, априорная вероятность каждого из этих символов может быть принята за 0,5. Однако на когерентное излучение накладывается помеха, что обуславливает возможность ошибочного приема. В квантовом режиме работы системы связи, когда регистрируются одиночные отсчеты, вероятность ошибки  $P_{\text{ош}}$  отлична от нуля даже в отсутствие помехи:

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \exp(-m_c), \quad (1)$$

где  $m_c$  — среднее число отсчетов когерентного излучения, а при наличии аддитивного шума она возрастает.

В работе изучена помехоустойчивость длинных линий оптической связи, при этом в качестве помехи рассмотрено излучение, обладающее свойством гармонического случайного процесса [1]. Такой процесс описывается дифференциальным уравнением второго порядка  $\ddot{\alpha} + 2\gamma\dot{\alpha} + \omega^2\alpha = f(t)$  (2) с белым шумом  $f(t)$  в качестве порождающего процесса,  $\langle f(t)f^*(t') \rangle = \sigma\delta(t-t')$  и интенсивностью  $\sigma_\alpha = \langle |\alpha|^2 \rangle = \sigma/4\beta\omega^3$  (3). Для рассмотрения системы, характеризующейся высокой помехоустойчивостью, в дальнейшем примем, что отношение сигнал к шуму велико:

$$m_c \gg m_m; \quad (4)$$

$$m_c = \int_0^T dt |\beta(t)|^2; \quad m_m = T\sigma_\alpha, \quad (5)$$

где  $\beta(t)$  — комплексная амплитуда когерентного излучения,  $T$  — длительность приема символа.

Вероятность  $P(m)$  регистрации  $m$  фотоотсчетов при детектировании суперпозиции когерентного излучения и шума можно охарактеризовать в терминах производящей функции отсчетов  $Q(\lambda) = \langle \exp(-\lambda m) \rangle$ . Таким образом, окончательное решение задачи можно найти, если удастся произвести указанное усреднение по всем реализациям случайного процесса  $\alpha(t)$  и затем определить функцию распределения поглощенной энергии

$$I = \int_0^T dt |\beta(t) + \alpha(t)|^2. \quad (6)$$

Случайный процесс (2) является двухкомпонентным нормальным марковским процессом. С учетом этого перейдем при вычислении производящей функции  $Q(\lambda) = \langle \exp(-\lambda I) \rangle$  (7), к векторным переменным

$$a(t) = \left( \alpha(t), \frac{\dot{\alpha}(t)}{\omega} \right); \quad b(t) = (\beta(t), 0), \quad (8)$$

тогда

$$I = \int_0^T dt [(a(t) + b(t)); V(a(t) + b(t))^*]; \quad (9)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

— матрица наблюдения. Параметр  $\varepsilon$  в ней введен формально для обеспечения условия  $\det V \neq 0$ . Как это будет видно из результирующих выражений, они зависят от  $V$  в положительных степенях, поэтому в них будет осуществлен предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В терминах уравнения (2) процессу  $a(t)$  отвечают диссипативная матрица системы  $A$  и ковариантная матрица  $S$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 2\gamma \end{pmatrix} \quad (11); \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma\omega^{-2} \end{pmatrix} \quad (12),$$

а также корреляционный оператор с ядром

$$K(t, t') \equiv \langle a(t) \otimes a^+(t') \rangle = \Theta(t - t') \exp(-At + At')L + \Theta(t' - t)L \exp(A^*t - A^*t'), \quad (13)$$

где, в свою очередь, матрица  $L$  — решение стационарного уравнения Ляпунова  $AL + LA^* = S$  (14). Перейдем в новое линейное пространство с помощью преобразований

$$a_V(t) = V^{1/2}a(t); \quad b_V(t) = V^{1/2}b(t); \\ A_V = V^{1/2}AV^{-1/2}, \quad S_V = V^{1/2}SV^{1/2}, \quad L_V = V^{1/2}LV^{1/2}, \quad (15)$$

зафиксировав при этом некоторый квадратный корень из матрицы  $V$ , при этом матрица  $K(t, t')$  также перейдет в матрицу  $K_V(t, t')$ , а

$$Q(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |a_V(t) + b_V(t)|^2 \right\} \right\rangle. \quad (16)$$

Воспользуемся теперь разложением случайного процесса  $a_V(t)$  в ортонормированном базисе функций  $\{e_n(t)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , отвечающим корреляционному оператору  $K_V(t, t')$ :

$$e_n(t) = \lambda_n \int_0^T dt' K_V(t, t') e_n(t'), \quad (17)$$

где  $\{\lambda_n\}$  набор собственных чисел.

Стандартным путем [1] найдем

$$Q(\lambda) = Q_a(\lambda) \exp \left\{ -\lambda \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{\lambda_n + 2\lambda} \right\}, \quad (18)$$

$$\text{где } b_n = \int_0^T dt e_n(t) \beta_V^+(t); \quad Q_a(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt |\alpha(t)|^2 \right\} \right\rangle \quad (19)$$

— производящая функция отсчетов шумового излучения. Пусть  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  произвольные двухкомпонентные функции. Под скалярным произведением  $(f_1, f_2)$  понимаем

$$(f_1, f_2) = \int_0^T dt f_1(t) f_2^*(t), \quad (20)$$

в терминах этого обозначения

$$Q(\lambda) = \langle \exp \{ -\lambda (a_V + b_V, a_V + b_V) \} \rangle = \\ = Q_a(\lambda) \exp \{ -\lambda (b_V, (I + \lambda K_V)^{-1} b_V) \}. \quad (21)$$

Рассмотрим оператор  $(I + \lambda K_V)^{-1}$ . Пусть некоторая двухкомпонентная функция  $\varphi(t)$  такова, что  $\varphi = (I + \lambda K_V)^{-1} b_V$ . Это означает,

что  $(I + \lambda K_V) \varphi = b_V$ . В развернутой форме это уравнение для  $\varphi(t)$  имеет вид

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^T dt' K_V(t, t') \varphi(t') = b_V(t). \quad (22)$$

Используем векторные функции

$$k_n(t) = \int_0^t \exp(A_V t - A_V t') L_V g_n(t') dt'; \quad (23)$$

$$g_n(t) = \int_t^T \exp(A_V^+ t' - A_V^+ t) e_n(t') dt',$$

тогда интегральное уравнение (22) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{k}_n &= (A_V - \lambda L_V) k_n - \lambda L_V^2 g_n + L_V b_V; \\ \dot{g}_n &= \lambda k_n + (-A_V^+ + \lambda L_V) g_n - b_V \end{aligned} \quad (24)$$

с граничными условиями

$$k_n(0) = 0, \quad (\dot{k}_n + L_V \dot{g}_n - A_V k_n)|_{t=T} = 0. \quad (25)$$

Решение линейного векторного уравнения (24) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} k_n(t) \\ g_n(t) \end{pmatrix} = \exp(H_V t) \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} + \int_0^t dt' \exp(H_V t - H_V t') \begin{pmatrix} L_V b_V(t') \\ -b_V(t') \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где  $(4 \times 4)$  — матрица

$$H = \left( \begin{array}{c|c} A_V - \lambda L_V & -\lambda L_V^2 \\ \hline \lambda & -A_V^+ + \lambda L_V \end{array} \right). \quad (27)$$

Обозначим фундаментальное решение системы (24) следующим образом:

$$\exp(H_V t) = \left( \begin{array}{c|c} E_1(\lambda, t) & E_2(\lambda, t) \\ \hline E_3(\lambda, t) & E_4(\lambda, t) \end{array} \right), \quad (28)$$

введя при этом четыре  $(2 \times 2)$ -матрицы  $E_1, E_2, E_3, E_4$ . Тогда

$$k_n(t) = E_2(\lambda, t) g_0 + \int_0^t dt' [E_1(\lambda, t-t') L_V - E_2(\lambda, t-t')] b_V(t');$$

$$g_n(t) = E_4(\lambda, t) g_0 + \int_0^t dt' [E_3(\lambda, t-t') L_V - E_4(\lambda, t-t')] b_V(t'); \quad (29)$$

Определяя аналогично производные от этих функций, находим векторную постоянную

$$g_0 = E_4^{-1}(\lambda, T) \int_0^T dt' [E_4(\lambda, T-t') L_V - E_3(\lambda, T-t')] b_V(t'). \quad (30)$$

Итак, искомым решением интегрального уравнения (22) является векторная функция

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & b_V(t) + \lambda [E_2(\lambda, t) + L_V E_4(\lambda, t)] E_4^{-1}(\lambda, T) \times \\ & \times \int_0^T dt' [E_3(\lambda, T-t') L_V - E_4(\lambda, T-t')] b_V(t') - \\ & - \lambda \int_0^t dt' [E_1(\lambda, t-t') L_V - E_2(\lambda, t-t') - \\ & - L_V E_3(\lambda, t-t') L_V + L_V E_4(\lambda, t-t')] b_V(t'), \end{aligned} \quad (31)$$

что позволяет записать аналитическое выражение для искомой производящей функции фотоотсчетов

$$Q(\lambda) = Q_a(\lambda) \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dt \varphi(t) b_V^+(t) \right\}. \quad (32)$$

Условие относительной малости интенсивности шумового излучения означает, что в выражении для полного среднего числа отсчетов  $\langle m \rangle = m_c + m_w$  (33) второе слагаемое значительно меньше первого. Это позволяет, считая отношение  $m_w/m_c$  малым параметром, найти асимптотическое представление для функций  $Q(\lambda)$  и  $P(m)$ . С этой целью воспользуемся матричным аналогом формулы Коши для функции от матриц, а также формулами обращения матрицы, образованной матрицами-блоками [2]. Из (27), (28) находим

$$\begin{aligned} E_1(\lambda, t) &= \oint \frac{dz}{2\pi i} (zI + A_V^+ - \lambda L_V) R(z) e^{zt}; \\ E_2(\lambda, t) &= -\oint \frac{dz}{2\pi i} (zI + A_V^+ - \lambda L_V) R(z) \lambda L_V^2 (zI + A_V^+ - \lambda L_V) e^{zt}; \\ E_3(\lambda, t) &= \lambda \oint \frac{dz}{2\pi i} R(z) e^{zt}; \quad E_4(\lambda, t) = \oint \frac{dz}{2\pi i} R(z) e^{zt}, \end{aligned} \quad (34)$$

где резольвентный множитель равен

$$R(z) = [(zI - A_V + \lambda L_V)(zI + A_V^+ - \lambda L_V) + \lambda^2 L_V^2]^{-1}, \quad (35)$$

а контур интегрирования в (34) должен охватывать спектр резольвенты на  $z$ -плоскости. В отсутствие шума  $R(z) = [(zI - A_V)(zI + A_V^+)]^{-1}$ , т. е. спектр сосредоточен в точках, определяемых собственными числами матриц  $R_1 = -A_V^+$  и  $R_2 = A_V$ . Считая, что интен-

сивность гармонического шума мала и ограничиваясь поэтому линейным приближением в резольвенте, получаем

$$R(z) = [(zI + A_V^+ - \lambda L_V)(zI - A_V + \lambda L_V)]^{-1}, \quad (36)$$

что дает

$$\int_0^T dt \varphi(t) b_V^+(t) = \int_0^T dt |b_V(t)|^2 - 2\lambda \int_0^T dt \int_0^t dt' b_V(t) L_V \operatorname{sh}(A_V^+ t - A_V^+ t') b_V^+(t') + \int_0^T dt \int_0^T dt' b_V(t) L_V \exp(A_V^+ t - A_V^+ t') b_V^+(t'), \quad (37)$$

а также  $Q_a(\lambda) = \det \exp(-\lambda L_V)$  (38). Из (32) и (37) вытекает, что производящая функция суперпозиции когерентного и шумового полей может быть записана в виде

$$Q(\lambda) = Q_a(\lambda) \exp(-\lambda \langle m \rangle + \lambda^2 I), \quad (39)$$

где, с учетом преобразования (15)

$$I = 2 \int_0^T dt \int_0^t dt' b(t) VL \operatorname{sh}(A^+ t - A^+ t') V b^+(t') + \int_0^T dt \int_0^T dt' b(t) VL \exp(A^+ t - A^+ t') V b^+(t'). \quad (40)$$

Поэтому для распределения  $P_{c+\text{ш}}(m)$  числа отсчетов суперпозиционного излучения имеет место гауссова аппроксимация

$$P_{c+\text{ш}}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi I}} \exp\left\{-\frac{(m - \langle m \rangle)^2}{2I}\right\}. \quad (41)$$

В случае передачи символа «0» когерентное излучение отсутствует. Учитывая, что  $\omega \gg \gamma$  из (39) находим

$$P_{\text{ш}}(m) = \left(\frac{\gamma T}{2\pi m_{\text{ш}}}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\gamma T}{2} \left(\sqrt{\frac{m}{m_{\text{ш}}}} - \sqrt{\frac{m_{\text{ш}}}{m}}\right)^2\right\}. \quad (42)$$

Эта вероятность имеет экспоненциальную асимптотику при  $m \gg m_{\text{ш}}$ .

Вероятность принятия ошибочного решения  $P_{\text{ош}}$  найдем для случая, когда регистрация символов осуществляется с помощью идеального приемника Зигерта — Котельникова [3; 4]. Здесь она определяется областью перекрытия функций  $P_{c+\text{ш}}(m)$  и  $P_{\text{ш}}(m)$ . Поскольку обе функции нормированы на единицу и имеют острый максимум, то

$$P_{\text{ош}} \approx \sum_{m=0}^{\infty} P_{c+\text{ш}}(m) P_{\text{ш}}(m). \quad (43)$$

Переходя от дискретной переменной к непрерывной и интегрируя, с учетом  $m_c \gg m_{\text{ш}}$  получаем

$$P_{\text{ош}} = \sqrt{\frac{\gamma T}{2\pi m_{\text{ш}}}} \exp\left\{-\frac{\gamma T}{2} \left(\frac{m_c}{m_{\text{ш}}} - R\right)\right\}, \quad R = \frac{\gamma T}{2m_{\text{ш}}^2} I. \quad (44)$$

образом, с увеличением параметра  $\gamma$ , имеющего физический смысл ширины спектрального контура излучения шума, вероятность ошибки  $P_{\text{ош}}$  уменьшается. Осуществляя вычисление функций от  $(2 \times 2)$ -матриц, имеем

$$I = -\frac{\sigma z^*}{i\Omega} \int_0^T dt \int_0^t dt' \beta(t) \beta^*(t') \operatorname{sh} z(t-t') - \\ - \frac{\sigma z^*}{2i\Omega} \int_0^T dt \int_0^T dt' \beta(t) \beta^*(t') e^{z(t-t')} - \text{к. с.}, \quad (45)$$

где  $\Omega = (\omega^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ;  $z = \gamma + i\Omega$ .

Имея в виду предельные характеристики помехоустойчивости, принимаем далее, что частота когерентного сигнала совпадает с  $\omega$ . Временную динамику импульса сигнального излучения выберем в виде

$$\beta(t) = \frac{m_c}{\pi} \left( \frac{2\mu}{1 - e^{-2\mu T}} \right)^{1/2} e^{-\mu t - i\omega t}, \quad (46)$$

сохраняющем полное число сигнальных отсчетов  $m_c$ . Тогда

$$I = \frac{2\mu m_c m_{\text{ш}}}{1 - e^{-2\mu T}} \left[ \frac{1 - e^{-2\mu T}}{2\mu T (\gamma - \mu)} - \frac{1 - e^{-(\mu + \gamma)T}}{T (\gamma^2 - \mu^2)} \right]. \quad (47)$$

Из (44) — (47) следует искомое выражение для вероятности ошибочного приема  $P_{\text{ош}}$ . Поскольку  $dI/d\mu < 0$ , то с укорочением сигнального импульса вероятность  $P_{\text{ош}}$  уменьшается. Для импульсов с постоянной во времени амплитудой ( $\mu = 0$ ) запишем

$$P_{\text{ош}} = \left( \frac{\gamma T}{2\pi m_{\text{ш}}} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m_c}{2m_{\text{ш}}} (\gamma T - 1 + e^{-\gamma T}) \right\}. \quad (48)$$

Полученные выражения указывают, что определяющими факторами, влияющими на величину  $P_{\text{ош}}$ , являются, помимо  $m_c$  и  $m_{\text{ш}}$ , длительность регистрации  $T$  и ширина спектральной линии шума. Если частота когерентного сигнала и центральная частота помехи отличаются более, чем на  $\gamma$ , то значение интеграла (45) быстро уменьшается до нуля, что в этом случае дает

$$P_{\text{ош}} = \left( \frac{\gamma T}{2\pi m_{\text{ш}}} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\gamma T}{2} \frac{m_c}{m_{\text{ш}}} \right). \quad (49)$$

Список литературы: 1. *Мазманишвили А. С.* Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. К., 1987. 224 с. 2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969. 367 с. 3. *Гальярди Р. М., Карп Ш.* Оптическая связь. М., 1978. 424 с. 4. *Шереметьев А. Г.* Статистическая теория лазерной связи. М., 1974. 264 с.

Поступила в редколлегию 28.06.88

Н. Г. ЗУЕВ, канд. физ.-мат. наук, А. М. ТИТАРЕНКО,

П. И. ЧЕРЕДНИКОВ, канд. техн. наук

### К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ЗОН ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

При исследовании и проектировании нелинейных параметрических систем большое значение имеет наличие информации о зонах параметрической неустойчивости, внутри которых работа внешних сил, расходуемая на периодическое изменение параметра, создает увеличение запаса колебательной энергии системы [1]. Границам зон соответствуют периодические решения дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему.

Рассмотрим параметрическую систему, описываемую нелинейным диссипативным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dy}{d\tau} + (Q^2 - \varepsilon \cos \tau) y = k\epsilon y^3, \quad (1)$$

где  $\tau = \omega_n t$  — безразмерное время;  $\omega_n$  — частота накачки;  $2\delta$  — затухание системы;  $\varepsilon$  — малый параметр;  $k$  — коэффициент, характеризующий степень нелинейности системы;  $Q = \frac{\omega}{2\omega_n}$  — регулируемая

величина, пропорциональная собственной частоте  $\omega$ . Частота изменения параметра (например, нелинейной индуктивности или емкости) предполагается постоянной. Переменная  $y$  может обозначать, в частности, напряжение на обмотках резонансного контура нелинейной системы.

Зоны неустойчивости нелинейной параметрической системы без затухания в координатах  $(Q, \varepsilon)$  исследованы в работе [2]. Выясним, как влияет совместное введение нелинейности и затухания в линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение Матье) на положение зон параметрической неустойчивости.

Будем искать решение уравнения (1) в виде [3]

$$y = a \cos(Q\tau - \varphi) + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \dots + \varepsilon^n U_n, \quad (2)$$

где  $a = a(\tau)$ ,  $\varphi = \varphi(\tau)$  — по предположению, медленно меняющиеся функции  $\tau$ .

Подставив (2) в (1), получим

$$\begin{aligned} & \left[ 2Qa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + 2\delta \frac{da}{d\tau} \right] \cos(Q\tau - \varphi) + \\ & + \left[ -2Q \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - 2Q\delta a + 2\delta a \frac{d\varphi}{d\tau} \right] \sin(Q\tau - \varphi) + \\ & + \varepsilon \left( \frac{d^2U_1}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_1}{d\tau} + Q^2U_1 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{d^2U_2}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_2}{d\tau} + Q^2U_2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \varepsilon^n \left( \frac{d^2 U_n}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_n}{d\tau} + Q^2 U_n \right) = \frac{ea}{2} \cos [(Q+1)\tau - \varphi] + \\
& + \frac{ea}{2} \cos [(Q-1)\tau - \varphi] + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 \cos (Q\tau - \varphi) + \\
& + \varepsilon \frac{1}{4} ka^3 \cos [3(Q\tau - \varphi)] + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 \cos [2(Q\tau - \varphi)] + \\
& + \varepsilon^2 U_1 \cos \tau + \varepsilon^3 U_1 \cos \tau + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 + \varepsilon^3 3ka U_1^2 \cos (Q\tau - \varphi) + \\
& + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 \cos [2(Q\tau - \tau)] + \varepsilon^3 U_2 \cos \tau + \dots + \varepsilon^{n+1} U_n \cos \tau. \quad (3)
\end{aligned}$$

Рассмотрим зоны параметрической неустойчивости уравнения (1) вблизи резонанса  $Q = 1/2$ . Чтобы избавиться от секулярного члена  $\frac{ea}{2} \cos [(Q-1)\tau - \varphi]$ , приводящего к неограниченно возрастающим решениям, преобразуем  $\cos [(Q-1)\tau - \varphi]$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
\cos [(Q-1)\tau - \varphi] &= \cos [(1-2Q)\tau + 2\varphi] \cos (Q\tau - \varphi) - \\
&- \sin [(1-2Q)\tau + 2\varphi] \sin (Q\tau - \varphi).
\end{aligned}$$

Из (3) получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$2Qa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + 2\delta \frac{da}{d\tau} = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \frac{ea}{2} \cos [(1-2Q)\tau + 2\varphi]; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
-2Q \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - 2Q\delta a + 2\delta \frac{da}{d\tau} &= \\
&= -\frac{ea}{2} \sin [(1-2Q)\tau + 2\varphi]; \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_1}{d\tau} + Q^2 U_1 &= \frac{a}{2} \cos [(Q+1)\tau - \varphi] + \\
&+ \frac{1}{4} ka^3 \cos [3(Q\tau - \varphi)]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Из уравнения (6) находим

$$U_1 = a\gamma \{ 2Q+1 \} \cos [(Q+1)\tau - \varphi] - 2\delta(Q+1) \sin [(Q+1)\tau - \varphi] + ka^3 \gamma_1 \{ 4Q \cos [3(Q\tau - \varphi)] - 3\delta \sin [3(Q\tau - \tau)] \}. \quad (7)$$

Здесь

$$\gamma = -[2(2Q+1)^2 + 8\delta^2(Q+1)^2]^{-1}; \quad \gamma_1 = -[8Q(16Q^2 + 9\delta^2)]^{-1}.$$

Обозначив  $\Psi_1 = (1-2Q)\tau + 2\varphi$ , из (4), (5) определяем  $d\varphi/d\tau$ ,  $da/d\tau$  в первом приближении, где удерживаются выражения  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon\delta$ ,  $\delta^2$  и отбрасываются члены, содержащие  $\varepsilon\delta^2$ ,  $\varepsilon\delta^3$ ,  $\delta^3$ ,  $\delta^4$  и т. д. Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{d\Psi_1}{d\tau} = 1 - 2Q + \frac{\varepsilon}{2Q} \cos \Psi_1 + \varepsilon \frac{3ka^2}{4Q} + \frac{\delta^2}{Q}; \quad (8)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4Q} \sin \Psi_1 - \delta a - \varepsilon \delta \frac{3ka^3}{8Q^2}. \quad (9)$$

Приравнивая к нулю правые части уравнений (8) и (9), получаем условия стационарности колебаний. Из (9) следует, что для стационарности необходимо выполнение условий  $a = 0$  (состояние покоя системы) или

$$\sin \Psi_1 = \frac{4Q\delta}{\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{8Q^2} \right),$$

где  $a_0$  — амплитуда стационарных колебаний на границе. Положив в уравнении (8)

$$\cos \Psi_1 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \Psi_1} = \pm \sqrt{1 - \left[ \frac{4Q\delta}{\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{8Q^2} \right) \right]^2}$$

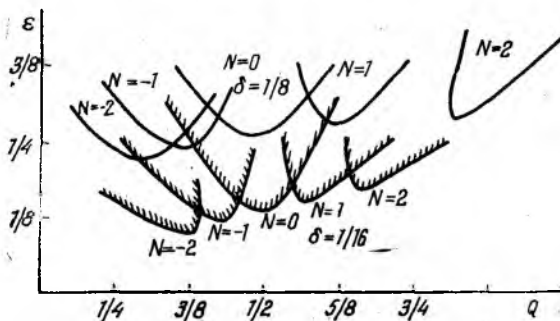


Рис. 1

(в предположении, что  $a_0 \neq 0$ ) получаем условие, определяющее границы зон параметрической неустойчивости в первом приближении вблизи резонансной частоты  $Q = 1/2$  для стационарных колебаний

$$\begin{aligned} & \left| 1 - 2Q + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{4Q} + \frac{\delta^2}{Q} \right| = \\ & = \frac{1}{2Q} \sqrt{\varepsilon^2 - \left[ 4Q\delta \left( 1 + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{8Q^2} \right) \right]^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем будем считать малый параметр  $\varepsilon$  неотрицательным. Поскольку рассматривается зона неустойчивости вблизи резонансной частоты  $Q = 1/2$ , то можем написать в выражениях при  $\varepsilon$  и  $\delta$  вместо  $Q$

числовое значение, равное  $1/2$ . После обозначения  $N = \frac{3ka_0^2}{2}$  формула для границ зон параметрической неустойчивости переписывается в виде

$$|1 - 2Q + N\varepsilon + 2\delta^2| = \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta^2(1 + N\varepsilon)^2}. \quad (11)$$

Эти границы для различных значений  $\delta$  и  $N$  показаны на рис. 1.

Из анализа уравнения (11) следует, что совместное введение нелинейности и затухания в линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение Матье) приводит к смещению зон параметрической неустойчивости по обеим координатам

в плоскости  $(Q, \varepsilon)$  и к их повороту относительно нижних точек. При этом смещение и поворот тем больше, чем больше по модулю степень нелинейности и амплитуда периодических колебаний, соответствующих границам зон неустойчивости. Для жесткой нелинейной системы ( $k < 0$ ) смещение нижних точек границ зон неустойчивости происходит в сторону меньших частот и вниз по сравнению со случаем  $k = 0$ , а для мягкой ( $k > 0$ ) — в сторону больших частот и вверх. Таким образом, жесткую нелинейную диссипативную параметрическую систему при прочих равных условиях возбудить легче, чем линейную диссипативную параметрическую, а мягкую нелинейную — труднее, чем линейную. Это означает, что для возбуждения колебаний нелинейной диссипативной параметрической системы не обязательно требуется большая глубина модуляции параметра, чем для линейной параметрической.

Рассмотрим второе приближение. Уравнения (4), (5) во втором приближении имеют вид

$$2Qa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + 2\delta \frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{2} \cos \Psi_1 + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \\ + \varepsilon^2 3Qk^2 a^5 \gamma_1 + \varepsilon^2 \frac{1}{2} a \gamma (2Q + 1) + \varepsilon^2 ka^3 \left[ \frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \cos \Psi_1, \quad (12)$$

$$-2Q \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - 2Q\delta a + 2\delta a \frac{d\varphi}{d\tau} = \\ = -\frac{\varepsilon a}{2} \sin \Psi_1 + \varepsilon^2 ka^3 \left[ -\frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \sin \Psi_1. \quad (13)$$

Для нахождения  $\frac{da}{d\tau}$ ,  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  положим

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4Q} \sin \Psi_1 - \delta a + \lambda_1 \varepsilon^2; \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon \frac{3ka^2}{8Q} + \frac{\varepsilon}{4Q} \cos \Psi_1 + \lambda_2 \varepsilon^2, \quad (15)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — медленно меняющиеся функции  $\tau$ , производные от которых  $\frac{d\lambda_1}{d\tau}, \frac{d\lambda_2}{d\tau}$  порядка малости  $\varepsilon$ . Подставив (14), (15) в (12) и (13), после громоздких преобразований находим  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а затем с учетом (14), (15) получаем выражения

$$\frac{d\Psi_1}{d\tau} = 1 - 2Q + \varepsilon \frac{3ka^2}{4Q} + \frac{\varepsilon}{2Q} \cos \Psi_1 - \frac{\varepsilon^2}{16Q^3} - \frac{\varepsilon(1-2Q)}{4Q^3} \cos \Psi_1 + \\ + \varepsilon^2 \frac{9k^2 a^4}{64Q^3} + \frac{\delta^2}{Q} + \varepsilon^2 3k^2 a^4 \gamma_1 + \varepsilon^2 \frac{\gamma(2Q+1)}{2Q} + \\ + \frac{\varepsilon^2 ka^2}{Q} \left[ \frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \cos \Psi_1; \quad (16)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4Q} \sin \Psi_1 - \delta a + \varepsilon^2 \frac{3ka^3}{32Q^3} \sin \Psi_1 - \varepsilon \delta \frac{3ka^3}{8Q^2} - \frac{\varepsilon a(1-2Q)}{16Q^3} \sin \Psi_1 - \\ - \frac{\varepsilon^2 ka^3}{2Q} \left[ -\frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \sin \Psi_1. \quad (17)$$

После преобразований из (16), (17) получаем формулу для границ зон параметрической неустойчивости вблизи  $Q = \frac{1}{2}$  во втором приближении:

$$\begin{aligned} & \left| 1 - 2Q + \varepsilon^2 \left( -\frac{3}{4} + \frac{5N^2}{12} \right) + 2\delta^2 + \varepsilon N \right| = \\ & = \left| \varepsilon - \frac{\varepsilon^2 N}{3} \right| \sqrt{1 - \frac{4\delta^2 (1 + \varepsilon N)^2}{\left( \varepsilon + \frac{5\varepsilon^2 N}{6} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из анализа уравнения (18) следует, что во втором приближении зоны параметрической неустойчивости деформируются по сравнению

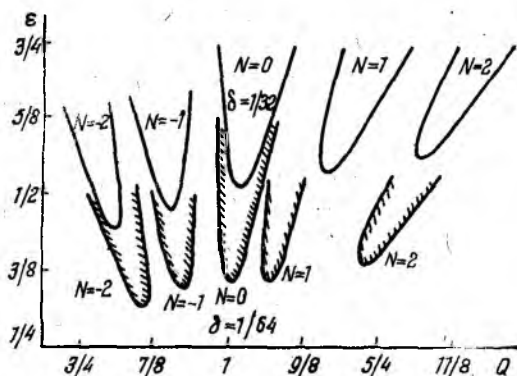


Рис. 2

с зонами в первом приближении, но при этом сохраняются ее прежние характерные особенности, что и следовало ожидать, поскольку первое приближение, как правило, приводит к тем же качественным результатам, что и высшие [4].

Перейдем ко второй зоне параметрической неустойчивости вблизи резонансной частоты  $Q = 1$ . Сделав громоздкие преобразования, получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_2}{d\tau} = & 2(1 - Q) + \varepsilon \frac{3ka^2}{4Q} + \frac{\delta^2}{Q} + \varepsilon^2 k^2 a^4 \left( \frac{9}{64Q^3} + 3\gamma_1 \right) + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\gamma_1(2Q + 1) + \gamma_2(2Q - 1)}{2Q} + \varepsilon^2 \frac{\gamma_2(2Q - 1)}{2Q} \cos \Psi_2; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{da}{d\tau} = -\delta a - \varepsilon \delta \frac{3ka^3}{8Q^2} + \varepsilon^2 \frac{a\gamma_2}{4Q} (2Q - 1) \sin \Psi_2, \quad (20)$$

где

$$\Psi_2 = 2(1 - Q)\tau + 2\varphi; \quad \gamma_2 = [2(2Q - 1)^2 + 8\delta^2(Q - 1)^2]^{-1}.$$

Из (19), (20) находим условие, определяющее границы зон параметрической неустойчивости вблизи  $Q = 1$  во втором приближении:

$$\left| 2(1 - Q) + \frac{N}{2} \varepsilon + \delta^2 + \left( \frac{1}{6} + \frac{5N^2}{96} \right) \varepsilon^2 \right| = \frac{1}{4} \sqrt{\varepsilon^4 - \left[ 4\delta \left( 2 + \frac{N\varepsilon}{2} \right) \right]^2}. \quad (21)$$

Из анализа уравнения (21) следует, что для второй зоны неустойчивости сохраняются характерные особенности, полученные для первой. Аналогичные выводы справедливы и для высших зон параметрической неустойчивости. На рис. 2 приведены границы вблизи  $Q = 1$ .

Отметим, что наличие одной только нелинейности не приводит к смещению зон параметрической неустойчивости уравнения (1) по частоте. Наличие же одного только затухания без нелинейности приводит к смещению зон по частоте тем большему, чем больше затухание. Это смещение происходит следующим образом: для первой зоны в сторону меньших частот от точки  $(1/2; 0)$  в плоскости  $(Q; \epsilon)$ , а для второй и высших — в сторону больших частот от точек  $(1; 0)$ ,  $(3/2; 0)$  и т. д.

**Список литературы:** 1. *Основы теории колебаний* / В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин. М., 1988. 392 с. 2. *Титаренко А. М., Зуев Н. Г., Чередников П. И.* О зонах возбуждения одного нелинейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. Х., 1985. 21 с. Деп. в УкрНИИТИ 23.07.85, № 1502. 3. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М., 1969. 400 с. 4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963. 412 с.

*Поступила в редколлегию 18.11.88*

УДК 621.373

**А. Б. БЕЛОГОРЦЕВ**, канд. физ.-мат. наук, **Д. М. ВАВРИВ**,  
д-р физ.-мат. наук, **Г. А. ГРОМОВ**

### **О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ**

Изучение вероятностных свойств стохастических колебаний, возникающих в нелинейных радиофизических системах, представляет собой важную научную и практическую задачу. Ее решение способствует дальнейшему прогрессу в понимании общих физических закономерностей возникновения сложных хаотических режимов, характерных для широкого класса динамических систем, а также позволяет вырабатывать рекомендации по созданию источников случайных колебаний с управляемыми вероятностными характеристиками. Наиболее подробно с этой точки зрения изучены статистические свойства процессов, порождаемых одномерными и двумерными дискретными отображениями [1; 2]. В ряде случаев статистический анализ проведен также для хаотических колебаний в нелинейных осцилляторах, описываемых дифференциальными уравнениями [3].

Исследованы вероятностные свойства хаотических колебаний, возникающих в осцилляторе Ван дер Поля при его двухчастотном возбуждении. Математическая модель динамики колебаний, возникающих в такой системе, представляет собой совокупность неавтоном-

ных укороченных уравнений для амплитуды  $a$  и фазы  $\varphi$  колебаний осциллятора:

$$\frac{da}{d\tau} = (1 - a^2)a + 2b \cos \Omega\tau \sin \varphi;$$

$$a \frac{d\varphi}{d\tau} = (-\Delta + \beta a^2)a + 2b \cos \Omega\tau \cos \varphi.$$

Здесь  $\tau$  — безразмерное медленное время;  $\beta$  — параметр неизохронности колебаний осциллятора; при записи уравнений (1) произведена нормировка всех величин такая, что амплитуда автономных колебаний и инкремент нарастания при  $a = 0$  равны 1. Амплитуды обеих частотных составляющих внешнего сигнала считаются одинаковыми и равными  $b$ , нормированные расстройки их частот относительно частоты автоколебаний соответствующего изохронного осциллятора при ( $\beta = 0$ ) равны  $\Delta_L = \Delta + \Omega$  и  $\Delta_R = \Delta - \Omega$ . Системы типа (1) широко используются при описании процессов синхронизации автогенераторов томпсонского типа в различных диапазонах частот, начиная с обычных ламповых устройств и кончая квантовыми генераторами [4].

Для анализа динамики осциллятора при его двухчастотном возбуждении важное значение имеет информация о характере возбуждаемых колебаний в случае одночастотного воздействия. Если границы диапазона изменения частотной расстройки, в котором осуществляется синхронизация колебаний осциллятора одночастотным источником, обозначить через  $\delta_L$ ,  $\delta_R$ , ( $\delta_L < \delta_R$ ), то, как показано в работе [5], стохастизация колебаний осциллятора при его двухчастотном возбуждении имеет место, когда  $\Delta_L \simeq \delta_L$ ,  $\Delta_R \simeq \delta_R$ . Ниже приводятся результаты расчетов для фиксированных значений параметра неизохронности  $\beta = 3$  и амплитуд внешних частот  $b = 0,3$  (относительно слабое воздействие), в этом случае  $\delta_L \simeq 1,80$ ;  $\delta_R = 3,85$ .

При исследовании вероятностных свойств, возбуждаемых в осцилляторе хаотических колебаний, основной операцией является процедура статистического усреднения, т. е. усреднения величин, характерных для каждой конкретной фазовой траектории, по ансамблю реализаций. Для проведения соответствующих вычислений на ЭВМ важное значение имеет правильный выбор размера ансамбля, его начального распределения, времени устранения переходных явлений и т. д. Проведение таких предварительных расчетов — необходимый и ответственный этап исследования, на характерных результатах которого мы остановимся прежде всего.

Расчеты показали, что начальное распределение ансамбля (распределение начальных значений  $a$ ,  $\varphi$ ) не оказывает существенного влияния на значения статистических средних в режиме хаотических колебаний, если только размер ансамбля выбран достаточно большим (рис. 1, а). На рисунке приведены рассчитанные статистические средние значения амплитуды  $\bar{a}$  (сплошные кривые) и фазы  $\bar{\varphi}$  (штриховые линии) в фиксированный момент времени в зависимости от размера ансамбля  $N$  для двух различных распределений  $a$  и  $\varphi$  при  $\tau = 0$ . Кривые 1 отвечают равномерному распределению начальных фаз в интервале  $[0, 2\pi]$  и единичным начальным амплитудам каждой реализации,

Рис. 2 — выборку всех начальных амплитуд равных 0,1 и такому же распределению фаз. Эти случаи моделируют две физические ситуации, различающиеся порядком «включения» генератора и подачи на него сигнала от внешнего источника: в первом случае предполагается что в момент  $\tau = 0$  внешние колебания начинают воздействовать на генератор, уже работавший до этого в автономном стационарном режиме, во втором — моделируется ситуация, когда самовозбуждение колебаний в осцилляторе, начиная с небольших их начальных значений, происходит под воздействием поданного ранее сигнала от внешнего источника. Из приведенных на рис. 1, а зависимостей следует, что с увеличением размера ансамбля  $N$  выборочные средние  $\bar{a}$  и  $\bar{\varphi}$  приближаются к своим предельным значениям, независящим от начального

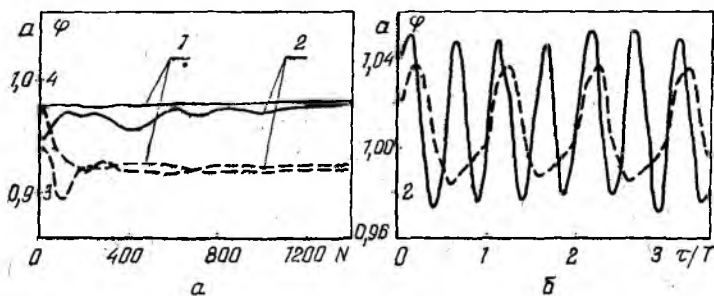


Рис. 1

распределения ансамбля. Для устранения переходных нестационарных явлений, связанных с процессами установления колебаний, оказалось достаточным анализировать статистические характеристики, начиная с момента времени, на порядок большего времени релаксации автономного генератора, которое в нашем случае равно 2.

Методика определения статистических характеристик хаотических колебаний существенно зависит от того, к какому классу случайных процессов принадлежит исследуемый процесс. Оказалось, что возникающие в системе (1) хаотические колебания являются периодически нестационарными. Для иллюстрации этого на рис. 1, б приведены зависимости средних по ансамблю значений  $\bar{a}$ ,  $\bar{\varphi}$  от времени, рассчитанные путем усреднения по 1200 реализациям. По оси абсцисс на этом рисунке отложены значения величины  $\tau/T$  — времени, нормированного на интервал  $T = 2\pi/\Omega$ , равный периоду явной зависимости от времени правых частей уравнений (1). Особенностью изображенных зависимостей является наличие явно выраженной периодичности в изменении  $\bar{a}$  и  $\bar{\varphi}$  во времени. Отклонение этих зависимостей от строго периодических обусловлено эффектом конечности ансамбля реализаций, неизбежным в численных расчетах, и уменьшается при увеличении  $N$ . Период изменения  $\bar{a}$  для рассматриваемого случая в два раза меньше периода изменения  $\bar{\varphi}$ , который совпадает с периодом явной зависимости от времени уравнений (1). При других значениях параметров си-

стемы в режиме хаотических колебаний наблюдались также процессы, период нестационарности которых в целом число раз превосходил  $T$ .

Аналогичным образом ведут себя другие величины, характеризующие вероятностные свойства хаотических колебаний, такие как дисперсия, моменты высших порядков и др. Периодически зависят от времени также функции распределения вероятностей. Представление об их форме дает рис. 2, где показаны функции плотности вероятности амплитуды (сплошная линия) и фазы (штриховая линия) в фиксированный момент времени для  $\Delta_L = 1,9$  и  $\Delta_R = 3,725; 4,350$  (регулярные колебания) и  $\Delta_R = 3,825; 4,025$  (хаотические колебания). Видно, что значения амплитуд сосредоточены вблизи  $a = 1$  — амплитуды автоко-

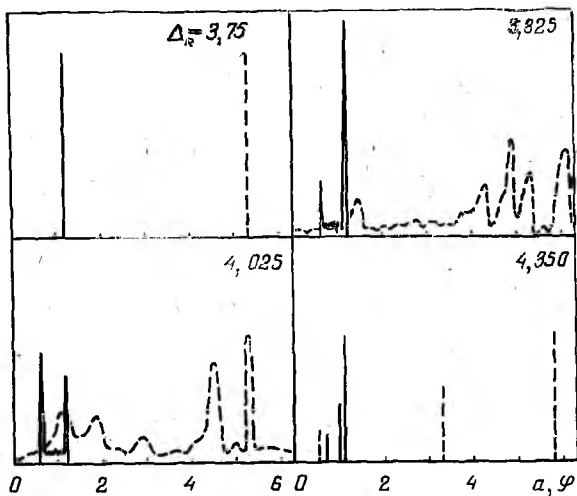


Рис. 1

лебаний, а их распределения в случае хаоса близки к  $\beta$  — распределениям с резкими выбросами на краях, в то время как фаза распределена в интервале  $[0, 2\pi]$  более равномерно.

Таким образом, проведенные исследования показали, что хаотические колебания, порождаемые системой уравнений (1), являются периодически нестационарными. Учитывая, что величины  $a$  и  $\varphi$  — медленно меняющиеся амплитуда и фаза высокочастотных колебаний осциллятора, можно утверждать, что последние есть квазипериодически нестационарные процессы (по аналогии с соответствующими регулярными колебаниями). Можно ожидать, что дальнейшие детальные исследования статистических характеристик хаотических процессов позволят с новой точки зрения подойти к описанию бифуркаций странных аттракторов и классификации соответствующих хаотических колебаний.

Список литературы: 1. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984. 781 с. 2. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М., 1987. С. 217—226. 3. Ланда П. С., Стратоно-

бич Р. Л. Расчет стационарного распределения вероятностей для одного из простейших странных аттракторов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 832—836. 4. Ораевский А. Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130—142. 5. Белогорцев А. Б.; Вавриш Д. М., Третьяков О. А. Стохастические колебания в квазилинейных колебательных системах // Журн. техн. физики. 1988. Т. 58, № 2. С. 284—293.

Поступила в редколлегию 30.05.88

УДК 621.321.152

Ю. Н. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук, Э. Н. КОРОЛЬ,  
Ю. Ю. МИЛОНОВ, А. В. ТОВАРНИЦКИЙ, канд. техн. наук

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОГО МЕТОДА СЖАТИЯ МАССИВОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ДАННЫХ

В связи с использованием ЭВМ в процессе обработки информации широкое внедрение получают методы кодирования и декодирования таких совокупностей, как объективно-характеристические матрицы, различные монотонные последовательности, деструктуризованные функции с ограниченным приращением, последовательности с ограниченной суммой компонент и т. д. [1].

В статье оценивается возможность использования метода полиадических чисел (МПЧ) в процессе сжатия информации, как одного из возможных методов решения подобного рода задач для сжатия массивов целочисленных данных.

Известно, что всякий целочисленный массив, представленный в виде матрицы  $A = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ , с помощью преобразования  $N_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} P_i$  (1), где

$$P_i = \prod_{k=i+1}^m \lambda_k; \quad (2)$$

$$\lambda_i = 1 + \max_j (a_{ij}), \quad (3)$$

можно заменить двумя векторами  $N = (N_j)$  и  $\Lambda = (\lambda_i)$ . При этом существует обратное преобразование:

$$A = (a_{ij}) = [N_j / P_i] - [N_j / \lambda_i P_i] \lambda_i, \quad (4)$$

позволяющее однозначно по компонентам векторов  $N$ ,  $\Lambda$  восстановить любой элемент с погрешностью  $\epsilon = 0$  [2].

Оценку эффективности данного метода сжатия целочисленных массивов производим, используя соотношение [3], которое указывает, что объем двоичной памяти, занимаемый одним элементом при произвольном кодировании,  $S_2 = \lceil \log_2 P \rceil$  (5), где  $P$  — алфавит, применяемый для кодирования исходного информационного элемента. Объем памяти, необходимый для массива  $A$  размерности  $m \times n$ , равен

$$S_1 = mn S_2 = mn \lceil \log_2 P \rceil. \quad (6)$$

При использовании же для представления информации на уровне элементов массивов обобщенного кода Бодо, построенного на основе метода упаковки по максимальному элементу, объем памяти, занимаемый одним информационным элементом, определяется соотношением [2]

$$S_{ЭБ} = \lceil \log_2 \max_{i,j} a_{ij} \rceil. \quad (7)$$

В этом случае объем памяти, требующийся для размещения массива размерности  $m \times n$ ,

$$S_B = mn \lceil \log_2 \max_{i,j} (a_{ij}) \rceil. \quad (8)$$

С учетом соотношений (3), (5), (6) можно получить выражение для значения объема, занимаемого векторами  $\Lambda$ ,  $N$  для первого варианта кодирования:

$$S_\Lambda = m \lceil \log_2 (1 + \max_i (a_{ij})) \rceil; \quad (9)$$

$$S_N = n \lceil \log_2 \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{k=i+1}^m (1 + \max_j (a_{kj})) \right) \rceil. \quad (10)$$

и объем памяти, необходимый в этом случае для представления векторов  $N$ ,  $\Lambda$ , которые характеризуют сжатый массив данных по методу полиадических чисел,

$$S_{МПЧ}^I = S_N + S_\Lambda = mS_{Э\Lambda} + nS_{ЭN}. \quad (11)$$

С помощью соотношений (1), (2), (7), (8) можно определить объем памяти для представления векторов  $N$  и  $\Lambda$  в случае использования метода упаковки по максимальному элементу

$$S_\Lambda = \lceil \log_2 \max_i (1 + \max_j (a_{ij})) \rceil m; \quad (12)$$

$$S_N = nS_{ЭN} = n \lceil \log_2 \max_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{n=i+1}^m (1 + \max_i (a_{ij})) \right) \rceil, \quad (13)$$

а суммарный объем памяти, необходимый в таком случае для представления массива  $A$ , определяется как

$$\begin{aligned} S_{МПЧ}^2 &= S_N + S_\Lambda = mS_{Э\Lambda} + nS_{ЭN} = \\ &= n \lceil \log_2 \max_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{k=i+1}^m (1 + \max_i (a_{ij})) \right) \rceil + \\ &+ m \lceil \log_2 \max_i (1 + \max_j (a_{ij})) \rceil. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценку эффективности предложенного метода сжатия информации осуществим, используя традиционные для этого коэффициенты [4]:

$$\eta_i = S/S_{МПЧ}^i, \quad \beta_i = S_B/S_{МПЧ}^i \quad (i = 1, 2),$$

которые с учетом выражений (5), (6), (8), (11) и (14) можно представить соотношениями

$$\eta_1 = \frac{mn \log_2 a_{ij}}{m \log_2 (1 + \max_i (a_{ij})) + n \log_2 \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{k=i+1}^m (1 + \max_i (a_{ij})) \right)}; \quad (15)$$

$$\eta_2 = \frac{mn \log_2 a_{ij}}{n \log_2 (1 + \max_i (a_{ij})) + n \log_2 \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{k=i+1}^m (1 + \max_i (a_{ij})) \right)}; \quad (16)$$

$$\beta_1 = \frac{mn \log_2 \max_{ij} (a_{ij})}{m \log_2 (1 + \max_i (a_{ij})) + n \log_2 \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{k=i+1}^m (1 + \max_i (a_{ij})) \right)}; \quad (17)$$

$$\beta_2 = \frac{mn \log_2 \max_{ij} (a_{ij})}{m \log_2 \max_i (1 + \max_i (a_{ij})) + n \log_2 \max_i \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \prod_{k=i+1}^m (1 + \max_i (a_{ij})) \right)}; \quad (18)$$

где  $\eta_1, \eta_2$  — коэффициенты, характеризующие выигрыш в количестве разрядов представления, получаемый за счет сжатия информации (МПЧ), которая в исходном виде была представлена равномерным кодом, по отношению к количеству разрядов записи сжатых массивов соответственно равномерным кодом и кодом Бодо;  $\beta_1, \beta_2$  — коэффициенты, характеризующие выигрыш в количестве разрядов представления, получаемый в результате применения при сжатии информации МПЧ, которая в исходном виде была представлена кодом Бодо, по отношению к количеству разрядов записи сжатых массивов равномерным кодом и кодом Бодо.

Как показывает анализ соотношений (15) — (18), для конкретных целочисленных массивов  $A = (a_{ij})$  размерности  $m \times n$  ( $m \geq 5; n \geq 5$ ) выигрыш от использования МПЧ при сжатии информации составляет величину более 1,7 раза, что говорит о целесообразности технической разработки данного метода сжатия информации. С этих позиций более предпочтительным, но менее конструктивным является представление сжатых массивов с помощью кода Бодо. Предметом дальнейших исследований для увеличения коэффициентов  $\eta_i, \beta_i$  следует считать определение кратности применения МПЧ к множеству векторов  $\Lambda$  и  $N$ , на основе которых можно сформировать очередной (новый) массив.

Список литературы: 1. Кожурин Ф. Д., Ярмош Н. А. Структурная обработка больших информационных массивов. Минск, 1973. 256 с. 2. Амелькин В. А. О нумерических функциях для кодирования числовых данных // Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. Новосибирск, 1986. С. 89—93. 3. Акушский И. Я., Заблоцкий Б. Н. О комбинаторном подходе к идее сжатия информации // Цифровая вычислительная техника и программирование. М., 1971. Вып. 6. С. 5—17. 4. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерений. М., 1977. 173 с.

Поступила в редколлегию 26.08.88

**В. О. АЛЕКСАНДРОВ, С. В. КУЗНЕЦОВ**, канд. техн. наук,  
**А. Г. СНИСАРЕНКО, Л. С. СОРОКА**, канд. техн. наук

**КОМБИНИРОВАННАЯ СИСТЕМА АДРЕСНОГО ПЕРЕСПРОСА  
 С ВАРЬИРУЕМЫМ ЧИСЛОМ ПОВТОРОВ И ИСПРАВЛЕНИЕМ  
 ОШИБОК ТЕСТИРОВАНИЕМ**

Системы передачи данных адресного переспроса являются наиболее эффективными с точки зрения скоростных характеристик, однако классический алгоритм работы указанной системы требует наличия буфера бесконечного объема [1].

Есть алгоритм, позволяющий ограничить объем буфера путем применения специальной процедуры нумерации блоков и подсчета «расстояний» между самым старым из запрашиваемых блоков и текущим [2]. Однако это несколько ухудшает пропускную способность системы. По сути дела, такой алгоритм может рассматриваться как алгоритм, занимающий промежуточное положение между системой с безадресным повторением и блокировкой и системой адресного переспроса.

Гораздо эффективнее сокращать объем буфера за счет уменьшения числа переспросов линейных блоков путем выдачи в канал связи (КС) запрашиваемого блока, причем число выдаваемых в КС копий принятого с ошибками блока увеличивается по мере приближения буфера к переполнению [3]. С этой же целью предоставляется необходимым на приемной стороне применение процедуры исправления ошибок, т. е. создание комбинированной системы с переспросом и исправлением.

Очевидно, что пропускная способность системы, использующей такой алгоритм, будет выше, чем у системы, применяющей специальный алгоритм нумерации блоков (системы адресного переспроса с конечным объемом буфера) и не ниже, а как будет показано далее, в некоторых случаях выше, чем у классической системы адресного переспроса.

Рассмотрим многоуровневый алгоритм работы такой системы при условии, что буферы приемника и передатчика имеют объем  $qN$ , где  $N$  — длина петли обратной связи в блоках, т. е. число блоков, которое можно передать в канал до получения сигнала обратной связи.

*Уровень 0.* Если передатчиком по каналу обратной связи (КОС) получен сигнал «Подтверждение» (П), то передатчик осуществляет посылку на приемную сторону следующего блока из входной очереди.

*Уровень 1.* Если после выдачи в КС блока из входной очереди по КОС получен сигнал «Запрос» (З), запрашиваемый блок передается  $n_1$  раз, далее осуществляется выдача блоков из входной очереди.

*Уровень 2.* Если все  $n_1$  копий получены с неисправимыми декодером приемника ошибками (соответственно по КОС передатчик принял  $n_1$  сигналов «З»), блок повторяется  $n_2$  раз

. . . . .  
 . . . . .  
 . . . . .

**Уровень  $q$ .** Если все  $n_{q-1}$  копий линейного блока получены с неисправимыми декодером ошибками, имеет место полное заполнение буфера приемника. Блок повторяется  $n_q$  раз.

**Уровень  $q + 1$ .** Если все  $n_q$  копий получены с неисправимыми ошибками, буфер приемника полностью заполнен, переданные на этом уровне блоки в буферный накопитель не вмещаются, следовательно, на последние по КОС посылаются сигналы «З». Система остается на этом уровне, пока не будет декодирования без ошибок.

Рассмотрим детально работу системы с четырьмя уровнями: на нулевом и первом уровнях передается одна копия блока  $n_0 = n_1 = 1$ , а на втором уровне передаются две копии  $n_2 = n_q = 2$ . Объем буфера приемника и передатчика равен  $2N$ .

**Алгоритм работы передатчика.** Передатчик осуществляет нумерацию блоков и выдачу их в КС с одновременной записью в буферный накопитель. Если по «текущему» блоку (т. е. по которому ожидается сигнал обратной связи) получен сигнал «П», то производится исключение копии блока из буферного накопителя, производится выдача следующего блока из входной очереди (если очереди нет, то передатчик ничего не передает в КС до тех пор, пока не поступит очередной линейный блок). Когда по текущему блоку по КОС получен сигнал «З», то осуществляется выдача одной копии из буферного накопителя (если система находилась на нулевом или первом уровнях) и производится переход на следующий уровень, или две копии, если система находилась на втором уровне. Далее на втором уровне выдается две копии до момента прихода сигнала «П» на запрашиваемый блок, после получения указанного сигнала линейный блок вычеркивается из буферного накопителя. Аналогично производится выдача в случае потери сигнала обратной связи. В случае, если приходит сигнал «З» сразу на несколько блоков, то два раза повторяется блок, имеющий самый старший номер.

**Алгоритм работы приемника.** Положим, что приемник находится в нормальном состоянии, когда на его входе отсутствуют линейные блоки и буферный накопитель приемника (БНП) пуст. В этом состоянии при приеме блока с номером  $i$  для последнего вычисляется синдром. Если синдром равен 0,  $S = 0$ , то блок выдается получателю, по КОС посылается сигнал «П», а приемник приступает к обработке очередного поступившего на его вход блока. В случае, если  $S \neq 0$ , приемник переходит в состояние блокировки, система уходит на уровень 1, приемник запоминает блок с номером  $i$  и  $N - 1$  последующих блоков в БНП. Через интервал времени, необходимый для приема  $N - 1$  блоков, приемник получает первую копию блока  $i$ . Если синдром  $S = 0$ , то получателю выдаются блоки с номером  $i$  и  $N - 1$  последующих блоков, если последние приняты без ошибок. Система возвращается на уровень 0. Если синдром  $S \neq 0$ , то на основании записанного в БНП блока  $i$  и полученной копии блока производится процедура декодирования тестированием [4], заключающаяся в следующем. Из БНП извлекается блок  $X_i$  и складывается по модулю два с полученной копией:  $X_i \oplus X'_i = E$ . Сформированный таким образом вектор ошибок содержит на позициях ошибок блоков  $X_i$  и  $X'_i$  единицы. Далее производится перебор всех возможных сочетаний единичных позиций

вектора надежности. Если ошибки исправлены (ошибки исправлены в том случае, когда отсутствуют ошибки в одинаковых позициях копий блоков и общее число ошибок не больше принятой исправляющей способности декодера ( $\eta$ ), определяемой из быстродействия аппаратуры декодера и канальной скорости), то аналогично процедуре описанной выше, получателю выдаются блоки с номерами  $i$  до  $N + i - 1$ , БНП опорожняется, система переходит на уровень 0. Если ошибки декодером не исправлены (имеют место неисправимые ошибки), система переходит на уровень 2, по КОС передается сигнал «З», из БНП удаляется копия блока  $i$  и осуществляется запись последующих  $N - 1$  блоков. После получения на уровне 2 двух копий блока  $X_i$ , каждая из них проверяется на наличие ошибок (на равенство синдрома нулю) и если хотя бы в одной копии ошибки отсутствуют ( $S = 0$ ), то указанная копия выдается получателю, по КОС посылается сигнал «П», система переходит на уровень 0. Если имеют место ошибки в обоих копиях, то производится описанная выше процедура декодирования. К этому моменту времени БНП объемом  $2N$  заполнен и если ошибки неисправимы, то последующие  $N - 3$  блоков не будут приняты из-за переполнения БНП, поэтому на указанные блоки формируется сигнал «З». Если же ошибки декодером исправлены, то блок  $X_i$  и последующие  $2N - 1$  блоков выдаются получателю (в случае отсутствия в них ошибок), БНП опорожняется, приемник возвращается в нормальное состояние, система переходит на уровень 0.

Проведем оценку пропускной способности системы, использующей описанный алгоритм работы в предположении, что прямой канал является двоичным симметричным каналом без памяти, а в обратном канале помехи отсутствуют.

Введем следующие обозначения: пусть  $H_0^A, H_0^B, H_0^C$  — события, состоящие в том, что при первой передаче линейного блока  $X_i$  в нем отсутствуют ошибки, имеют место обнаруживаемые и необнаруживаемые ошибки соответственно;  $Q_j^A, Q_j^B, Q_j^C$  — события, состоящие в том, что при  $j$ -той повторной передаче,  $j \geq 1$ , сообщение принято без ошибок, с обнаружением и с необнаружением ошибок соответственно;  $P_j^A$  и  $P_j^B$  — события, состоящие в том, что в результате тестирования ошибки в блоке исправлены и имеют место неисправимые ошибки соответственно;  $K_j^A, K_j^B$  — события состоящие в том, что при приеме  $j$ -го блока приемник восстанавливает или не восстанавливает блок соответственно.

Выведем вероятности приема блока по уровням.

Уровень 0:

$$P(0) = P(H_0^A) = P_A = (1 - \varepsilon)^n,$$

где  $\varepsilon$  — вероятность ошибки на символ в канале связи;  $n$  — длина блока в битах.

Уровень 1:

$$\begin{aligned} P(1) &= P(H_0^B K_1^A) = P(K_0^B K_1^A) = P(K_0^B) P(K_1^A | K_0^B) = \\ &= P(H_0^B) [P(Q_1^A) + P(Q_1^B P_1^A | H_0^B)] = \\ &= P(H_0^B) [P(Q_1^A) + P(Q_1^B) P(P_1^A | H_0^B Q_1^B)]. \end{aligned}$$

так как

$$P(H_0^B K_1^A) = (1 - P_A) [P_A + (1 - P_A) P(P_1^A | H_0^B Q_1^B)],$$

где

$$P(H_0^A) = P(Q_j^A) = (1 - \varepsilon)^n = P_A; \quad P(H_0^C) = P(Q_j^C) = P_C;$$

и  $P_C \ll P_A$ , то  $P(H_0^B) = P(Q_j^B) = 1 - P_A - P_C \approx 1 - P_A$ . Пусть

$$q_1 = P(P_1^A | H_0^B Q_1^B) = \frac{P(P_1^A H_0^B Q_1^B)}{P(H_0^B) P(Q_1^B)};$$

$$q = \frac{q_1}{(1 - P_A)^2}, \quad \text{где } q_1 = P(P_1^A H_0^B Q_1^B);$$

$$q_1 = \sum_{l_1=1}^{2\eta-1} \sum_{l_2=1}^{2\eta-1} \frac{n!}{l_1! l_2! (n - l_1 - l_2)!} \varepsilon^{(l_1+l_2)} (1 - \varepsilon)^{2n-l_1-l_2}.$$

$\eta$  — число ошибок, исправляемых декодером).

Тогда

$$P(1) \leq (1 - P_A) [P_A + (1 - P_A) q],$$

или, обозначив через

$$P_1 = [P_A + (1 - P_A) q], \quad P(1) \leq (1 - P_A) P_1.$$

Уровень 2:

$$P(2) = P(H_0^B K_1^B K_2^A) = P(H_0^B K_1^B) P(K_2^A);$$

$$P(H_0^B K_1^B) = P(H_0^B) P(K_1^B | H_0^B) = P(H_0^B) \times \\ \times [1 - P(K_1^A | H_0^B)] = (1 - P_A)(1 - P_1);$$

$$P(K_2^A) = P[Q_2^A \cup Q_2^B Q_3^A \cup Q_3^B Q_2^B P_2^A | Q_2^B Q_3^B] = P(Q_2^A) + \\ + P(Q_2^B) P(Q_3^A) + P(Q_2^B) P(Q_3^B) P(P_2^A | Q_2^B Q_3^B) = \\ = P_A + (1 - P_A) P_A + (1 - P_A)^2 P(P_2^A | Q_2^B Q_3^B).$$

Нетрудно показать, что вероятность

$$P(P_2^A | Q_2^B Q_3^B) = q; \quad P(K_2^A) = P_A + (1 - P_A) P_A + (1 - P_A)^2 q.$$

Обозначим  $P_2 = P(K_2^A)$ . Используя выведенные вероятности, найдем среднее число передач, необходимых для приема одного блока:

$$E[V] \leq P_A + 2(1 - P_A) P_1 + [(N + 1) + 2](1 - P_A)(1 - P_1) P_2 + \\ + [2(N + 1) + 2](1 - P_A)(1 - P_1)(1 - P_2) P_2 + [3(N + 1) + 2] \times \\ \times (1 - P_A)(1 - P_1)(1 - P_2)^2 P_2 + \dots + [k(N + 1) + 2] \times \\ \times (1 - P_A)(1 - P_1)(1 - P_2)^{k-1} P_2.$$

Найдя сумму ряда, получаем

$$E[V] \leq P_A + 2(1 - P_A) P_1 + \frac{(1 - P_A)(1 - P_1)[(N + 1) + 2 P_2]}{P_2}.$$

Пропускная способность описываемой системы

$$\eta \leq \frac{1}{E[V]} \frac{k}{n}.$$

Обычно  $k/n \approx 1$ , тогда  $\eta < 1/E [V]$ . На рисунке приведены графики пропускной способности рассматриваемой системы, применяющей декодер, исправляющий две и четыре ошибки и использующей буфера на 14 блоков (кривые 2 и 1 соответственно).

Для сравнения приведены графики пропускной способности системы с адресным переспросом и бесконечным объемом буфера (кривая 3), пропускная способность которой  $\eta = (1 - \epsilon)^n$ , и системы адресного переспроса с конечным объемом буфера (кривая 4), для которой

$$\eta > \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 N},$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\beta}{1-\gamma} (1 - \beta\gamma^{N-1});$$

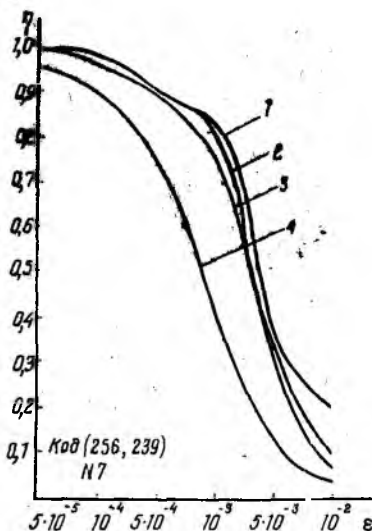
$$\lambda_1 = P_n^2 \{ \alpha^{N-2} + (1 - P_n) \times \\ \times P_n^{N-2} + (1 - P_n)^2 \gamma^{N-2} \};$$

$$\lambda_2 = 3 - P_n^2 \alpha^{N-2} - \alpha^2 \beta^{N-2} - \beta\gamma^{N-2};$$

$$P_n = (1 - \epsilon)^n; \alpha = 1 - (1 - P_n)^2;$$

$$\beta = 1 - (1 - P_n)^3; \gamma = 1 - (1 - P_n)^4$$

Список литературы: 1. Шварцман В. О., Емельянов Г. А. Теория передачи дискретной информации. М. 1979. 424 с. 2. Philips Yu., Sku Lin. An efficient selective-repeat ARQ scheme for satellite channels and its throughput analysis // IEEE Trans. Commun. 1981. № 3. P. 353—363. 3. Weldom E. J. An Improved Selective-Repeat ARQ strategy // IEEE Trans. Commun. 1982. № 3. P. 480—486. 4. Оценка пропускной способности систем с адресным переспросом и исправлением / Александров В. О., Кузнецов С. В., Приходько С. И., Сорока Л. С. // Изв. вузов. Радиотехника. № 9. 1986. С. 42—47.



Поступила в редколлегию 29.01.88

УДК 621.373.826

А. И. СТАРИКОВ, А. А. МИШНЕВ, канд. физ.-мат. наук,

А. В. ДЯДЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, В. Т. ПЛАКСИЙ, канд. физ.-мат. наук

#### ФОРМИРОВАТЕЛЬ ТОКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ ПИТАНИЯ СВЧ-ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДИОДОВ

Одно из современных направлений в электронике СВЧ — генерация и усиление электромагнитных колебаний при помощи полупроводниковых диодов, которые в настоящее время выделены в отдельный класс твердотельных электронных приборов. Это полупроводниковые генераторные СВЧ-диоды (диоды с отрицательным дифференциальным сопротивлением), к которым относятся лавинно-пролетные (ЛПД) или

TRAPATT-диоды, диоды с междолинным переносом электронов или диоды Ганна, лавинно-ключевые или TRAPATT-диоды, а также инжекционно-пролетные диоды [1]. Полупроводниковый СВЧ-диод является элементом генераторной схемы и рассматривается как двухполюсник, который преобразует энергию постоянного или импульсного тока в энергию СВЧ-колебаний. Развитие техники диодных СВЧ-генераторов происходит как в направлении совершенствования отдельных элементов — увеличение их предельных рабочих частот и уровней генерируемой мощности, а также методов суммирования мощностей в многодиодных генераторах, так и по пути разработки и совершенствования оптимальных схем, конструкций, методов их расчета и исследования в СВЧ-диапазоне.

В качестве основных параметров диодных СВЧ-генераторов рассматриваются: выходная мощность  $P_{\text{вых}}$ , коэффициент полезного действия  $\eta$ , рабочий диапазон частот ( $f_{\text{min}} \div f_{\text{max}}$ ), стабильность частоты  $\delta f$ , температурный коэффициент частоты  $\delta f / \Delta T$ , шумовые характеристики (амплитудные и частотные флюктуации). Параметры и технические характеристики диодных генераторов зависят от режимов работы диода, которые, в свою очередь, определяются параметрами колебательной системы и цепей питания.



Рис. 1

В импульсном режиме работа генератора существенно зависит от формы и длительности питающего импульса, т. е.  $P_{\text{вых}}$  генератора пропорциональна амплитуде  $U_n$  и длительности импульса  $\tau_n$ , а температурный коэффициент частоты  $\delta f / \Delta T$ , коэффициент полезного действия  $\eta$  и шумовые характеристики зависят от формы импульса (длительность фронта  $\tau_f$  и среза  $\tau_c$  импульса должны быть значительно меньше длительности импульса  $\tau_n$ ).

Основные принципы построения схем формирователей токовых импульсов на биполярных транзисторах, полевых транзисторах, модуляторных тиристорах и лавинных транзисторах для питания полупроводниковых инжекционных импульсных излучателей описаны в [2]. На практике формирователи токовых импульсов для питания диодных СВЧ генераторов должны обеспечивать на выходе прямоугольные импульсы тока амплитудой до 100 А при  $\tau_f, \tau_c$  не более 0,2 мкс.

Приводятся результаты разработки и исследования импульсного источника питания СВЧ-генераторов на диодах Ганна. Источник питания позволяет получать прямоугольные импульсы тока  $\tau_n = (0,5 \div 2)$  мкс;  $\tau_f \leq 0,1$  мкс;  $\tau_c \leq 0,15$  мкс с регулируемой до 100 А амплитудой на нагрузке  $(0,3 \div 2)$  Ом.

Конструктивно формирователь токовых импульсов (рис. 1) состоит из задающего генератора импульсов (1), низковольтного источника питания задающего генератора (2) и окончного каскада — усилителя-формирователя импульсов (3).

Задающий генератор, собранный на двух микросхемах типа К574УД1А и двух транзисторах типа КТ943Д и КТ903Б, обеспечивает

получение прямоугольных импульсов длительностью  $\tau_n = (0,5 \div 5)$  мкс, амплитудой 6 В и частотой следования  $f_0 = (3 \div 7)$  кГц.

Стабилизированный источник питания задающего генератора собран по обычной мостовой схеме и обеспечивает на выходе двухполярное напряжение  $\pm 15$  В. Выходное сопротивление его не более 0,2 Ом, коэффициент стабилизации не менее 700, уровень пульсаций не более 1 мВ.

Оконечный каскад (усилитель-формирователь импульсов) (рис. 2) собран на транзисторах типа КТ926Б (VT9) и ТК235—63—1,5—1 (VT10) с максимально допустимым импульсным напряжением коллектор-база не менее 135 В. Питание окончного каскада осуществляется от стандартного стабилизированного источника постоянного тока с регулируемым напряжением (0  $\div$  + 150) В. Дроссель L1 обеспечивает формирование необходимой длительности и среза выходного импульса.

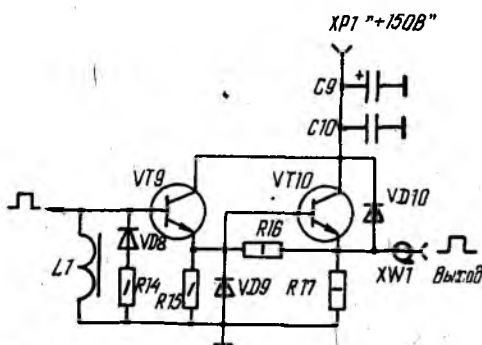


Рис. 2

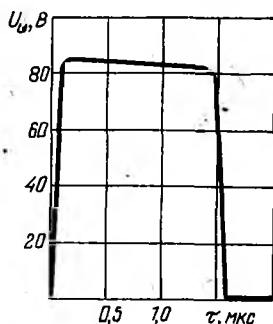


Рис. 3

В исходном состоянии сердечник дросселя не насыщен, при этом индуктивность дросселя велика и он не влияет на прохождение фронта и вершины импульса. Параметры дросселя L1 выбраны такими, что в момент окончания вершины импульса его сердечник переходит в состояние насыщения и индуктивность дросселя резко уменьшается. При этом дроссель шунтирует нагрузку, способствуя формированию более короткого среза импульса. Диоды VD8  $\div$  VD10 служат для ограничения отрицательных выбросов формируемого импульса. Включение транзисторов VT9  $\div$  VT10 в виде составного эмиттерного повторителя позволяет получить на низкоомной нагрузке прямоугольные импульсы с заданными параметрами. Следует отметить экономичность окончного каскада формирователя токовых импульсов, т. к. в исходном состоянии транзисторы VT9 и VT10 закрыты и ток через нагрузку не протекает. Получены следующие параметры выходных импульсов формирователя: амплитуда импульсов до 100 В на эквивалентной активной нагрузке  $R_n = 1$  Ом при длительности импульса  $\tau_n = (1 \div 2)$  мкс, длительности фронта  $\tau_{\phi} = 0,05$  мкс, длительности среза  $\tau_c = 0,06$  мкс и частоте следования  $f_0 = 5$  кГц.

На рис. 3 представ. на типичная осциллограмма выходного импульса формирователя на диоде Ганна в режиме генерации.

**Использование параллельного включения нескольких оконечных каскадов (усилителей-формирователей импульсов) для питания СВЧ-генераторов на диодах Ганна позволяет производить суммирование мощностей от каждого диодного генератора на общей нагрузке.**

**Список литературы:** 1. *Давыдова Н. С., Данюшевский Ю. З.* Диодные генераторы и усилители СВЧ. М., 1986. 186 с. 2. *Обзоры по электронной технике: Импульсные источники питания инжекционных лазеров / М. Н. Грудень, В. П. Дьяконов, З. И. Зиенко, В. Ю. Смердов.* М., 1984. Вып. 4 (1058). Сер. 11. Лазерная техника и сиэлектроника. 52 с.

*Поступила в редколлегию 15.11.88*

УДК 621.391:621.396

*В. В. ВАНЬКЕВИЧ*, канд. техн. наук, *Ю. М. ГАЛАЕВ*, *В. Т. ДУРАСОВ*,  
канд. техн. наук, *Б. В. ЖУКОВ*, канд. техн. наук, *М. А. ИВАНОВ*,  
канд. техн. наук, *Ф. В. КИВВА*, канд. техн. наук, *С. В. КОЗЕЛКОВ*,  
*Б. И. МАКАРЕНКО*, д-р техн. наук

### **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИФИКИ ТРОПОСФЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЧ- И КВЧ-РАДИОСИГНАЛОВ**

Известно, что потребности промышленно развитых стран в объемах передачи информации растут пропорционально квадрату увеличения их национального дохода. Этим обусловлена необходимость соответствующего повышения пропускной способности существующих и особенно проектируемых каналов связи, основанных на высокоэффективном использовании радиолиний. Согласно актуальности создания сверхскоростных систем связи с гигабитовыми скоростями передачи сообщений важную роль приобретают вопросы практического освоения миллиметрового (КВЧ) диапазона длин волн. Поскольку тропосферный участок — неотъемлемая часть большинства реальных сверхскоростных КВЧ радиоканалов, а особенности тропосферного распространения широкополосных миллиметровых сигналов изучены недостаточно полно, целесообразно провести анализ специфики эффектов указанного выше распространения радиоволн и оценить их влияние на качество сверхскоростной передачи цифровой информации.

Для решения поставленной задачи систематизируем основные радиофизические явления при прохождении широкополосных КВЧ радиосигналов через тропосферу с указанием характера их влияния на эффективность функционирования сверхскоростных систем связи. Результаты данной классификации представлены в таблице.

Отметим, что конкретная (количественная) степень влияния описанных в таблице радиофизических эффектов на качество сверхскоростной передачи информации зависит от протяженности тропосферного участка связной радиолинии [1]. В связи с этим теоретический и практический интерес представляет получение общих аналитических соотношений для точного определения длины тропосферного участка наиболее важных в прикладном отношении спутниковых радиолиний

№ п/п	Наименование физического эффекта	Причины возникновения физического эффекта	Характер влияния на качество сверхскоростной связи
1.1	Затухание сигналов	а) молекулярное затухание в «спокойной» тропосфере; б) затухание в гидрометеорах	Снижение энергетического потенциала То же
1.2	Рассеяние сигналов	а) рассеяние в гидрометеорах;	»
1.3	Рефракция радиоволн	б) турбулентное рассеяние; а) регулярная рефракция; б) флуктуация коэффициента преломления	»
1.4	Мерцания (сцилляции амплитуды и фазы) сигналов	а) мерцание вследствие рефракции радиоволн; б) мерцание в турбулентностях; в) мерцание в водных или льдосодержащих облаках	»
1.5	Допплеровские искажения (смещение и деформации спектра) сигналов	вариации коэффициента преломления волн в среде распространения	»
1.6	Снижение пространственной и поляризационной избирательности антенн	возрастание ошибок и потерь наведения антенн;	»
1.7	Уменьшение эффективного коэффициента усиления антенн	а) флюктуации угла прихода волны; б) нарушение когерентности (фазовой декорреляции) сигналов по апертуре из-за фазовой дисперсии траекторий лучей	» »
1.8	Излучение (шум) тропосферы	а) излучение «спокойной» тропосферы; б) излучение гидрометеоров; в) излучение турбулентностей	Появление дополнительной помехи и искажений
1.9	Дифракция радиоволн	дифракция на рельефе местности	То же
1.10	Образование тропосферных волноводных каналов	а) приземные «волноводы»; б) приподнятые «волноводы»	
1.11	Деполаризация радиоволн	а) деполаризация в гидрометеорах; б) деполаризация в турбулентных образованиях; в) деполаризация вследствие фарадеевских вращений; г) деполаризация в водных или льдосодержащих облаках д) деполаризация вследствие многолучевого распространения	

№ п/п	Наименование физического эффекта	Причины возникновения физического эффекта	Характер влияния на качество сверхскоростной связи
1.12	Возрастание уровня внутри и межканальных помех	а) Снижение пространственной и поляризационной избирательности антенн; б) образование пространственных волноводных каналов; в) дифракция на рельефе местности	Появление дополнительной помехи и искажений
1.13	Многолучевое распространение радиоволн	а) дискретная многолучевость (счетное множество лучей); б) «размытая» многолучевость (континуальное множество лучей); в) смешанная многолучевость	Ограничение максимальной скорости
1.14	Дисперсионные свойства тропосферы	а) амплитудная дисперсия вследствие неравномерного затухания в полосе частот сигнала; б) амплитудно-фазовая дисперсия в турбулентных образованиях	То же
1.15	Возрастание уровня искажений сигналов	увеличение потерь при оптимальной обработке сигналов вследствие ограничения полосы и радиуса когерентного тропосферного канала	

и нахождение зависимости данной длины от величины рабочих углов места. Используем с этой целью описываемую геоидом геодезическую модель Земли [1] и учтем также известные различия по высоте тропосферного слоя в экваториальной и приполюсных областях. Тогда можно показать, что искомая длина в диапазоне значений угла места  $\varphi \in [-85, +85^\circ]$  определяется из следующей формулы:

$$d = |x - x_1| \sqrt{1 + K_1^2}, \quad (1)$$

где  $K_1$  — коэффициент эллиптичности, причем

$$K_1 = \frac{\sin \varphi + K \cos \varphi}{\cos \varphi - K \sin \varphi}; \quad (2)$$

$$K \doteq \operatorname{tg} \varphi; \quad (3)$$

$$|x - x_1| = \frac{(b + \beta)^2 x_1 + K_1 y_1 (a + \alpha) \pm}{(b - \beta)^2 + K_1^2 (a + \alpha)^2}$$

$$\sqrt{\frac{[(b + \beta)^2 x_1 + K_1 y_1 (a + \alpha)]^2 - [(b + \beta)^2 + K_1^2 (a + \alpha)^2] \times [(a + \alpha)^2 (b + \beta)^2 - (b + \beta)^2 x_1^2 - (a + \alpha)^2 y_1^2]}{(b + \beta)^2 + K_1^2 (a + \alpha)^2}}; \quad (4)$$

$a, b$  — большая и малая полуоси земного геоида (в километрах) ( $a + \alpha$ ), ( $b + \beta$ ) — апогей и перигей тропосферного эллипсоида (в километрах), описываемого уравнением вида

$$\frac{x^2}{(a + \alpha)^2} + \frac{y^2}{(b + \beta)^2} = 1; \quad (5)$$

$\{x_1, y_1\}$  — географические координаты наземного терминала радиолинии. При этом

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + K^2 a^2}} \quad (6); \quad y_1 = \frac{Kab}{b^2 + K^2 a^2} \quad (7)$$

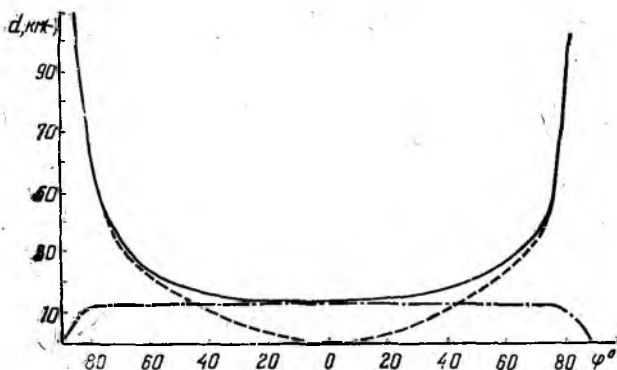


Рис. 1

Считая, что наземный терминал радиолинии расположен на географической широте  $45^\circ$ , и используя формулы (1) — (7), находим количественную зависимость  $d$  от значения  $\varphi$ . Результаты расчетов графически представлены на рис. 1 (сплошная линия), приведены также соответствующие зависимости для вертикальной (штрихпунктирная линия) и горизонтальной (штриховая линия) составляющих общей длины  $d$  тропосферного участка спутниковой радиолинии. Анализ кривых показывает, что увеличение диапазона рабочих углов места сопряжено с возрастанием протяженности тропосферного участка используемых радиолиний, особенно при углах места порядка  $|10 \div 20^\circ|$  (см. рис. 1), и, следовательно, с соответствующим усилением влияния указанных в таблице радиофизических эффектов. При этом очевидно, что повышение рабочей частоты и (или) расширения спектральной полосы передачи радиолиний неизбежно сопровождается увеличением степени влияния данных эффектов, что, в свою очередь, обуславливает необходимость ограничения рабочего сектора надежной радиосвязи все большими значениями углов места. Таким образом, выбор частотных параметров линий связи оказывает значительное влияние на целый ряд оперативно-тактических и тактико-технических характеристик разрабатываемых радиолиний и, в частности, в большой мере определяет среднее количество и длительность сеансов связи с орбитальными

**объектами:** применяют для практического использования сектор гео-стационарной дуги и т. п. Это свидетельствует о необходимости комплексного подхода к разработке, проектированию и эксплуатации радиосистем и, в первую очередь, о целесообразности совместного целенаправленного учета радиофизических, радиотехнических (в частности, системо- и схмотехнических) и других факторов.

Несмотря на удовлетворительный уровень изученности «традиционных» радиофизических эффектов тропосферного распространения КВЧ радиоволн [2; 5] (см. п. 1—12 таблицы), еще недостаточно полно исследованы специфические явления при прохождении широкополосных сигналов миллиметрового диапазона длин волн [2; 5] (см. п. 13—15 таблицы). Это существенно сдерживает дальнейший прогресс в области разработки, практической организации и высокоэффективной эксплуатации сверхскоростных КВЧ радиолиний цифровой связи



Рис 2

[1; 4]. Поэтому основной целью теоретических и особенно экспериментальных радиофизических исследований эффектов распространения миллиметровых волн должно быть прежде всего выявление и всестороннее изучение специфических для КВЧ диапазона явлений, и в данном случае применительно к проблеме создания высокоскоростных когерентных каналов синхронной передачи цифровой информации. Наиболее важной задачей представляется проведение комплексных измерений фазовых характеристик широкополосных тропосферных радиолиний миллиметрового диапазона длин волн в различных типовых метеоусловиях. Для ее практического решения была создана опытная широкополосная радиолиния с полосой частот 1 ГГц и центральной частотой  $f_0 = 37$  ГГц. Вертикальный профиль трассы распространения 8-миллиметровых радиоволн представлен на рис. 2. На приемном и передающем терминалах радиолинии использовались идентичные антенны Кассегрена с диаметром главного зеркала 1,1 м; спектр зондирующего сигнала содержал три дискретные составляющие, полученные путем амплитудной модуляции несущего колебания передатчика монохроматическим сигналом с частотой 500 МГц (данная модуляция осуществляется путем изменения напряжения питания генератора на диоде Ганна, на котором реализован передатчик со средней мощностью 70 мВт) приемник собран по супергетеродинной схеме с неохлаждаемым смесителем на диоде с барьером Шотти на входе. Коэффициент шума приемника составляет 9 дБ, фильтрация спектральных составляющих входного сигнала осуществляется с помощью схемы АПЧ.

Таким образом, энергетический потенциал исследуемой радиолинии позволяет обеспечить соотношение сигнал-шум около 50 дБ. Это гарантировало высокоточное измерение фазовых искажений  $\Delta\varphi$  зондирующих сигналов в экспериментальном КВЧ-радиоканале, причем

значение  $\Delta\varphi$  количественно оценивалось путем отдельного перемножения центральной частоты передатчика с каждым из боковых колебаний и вычислением затем величины  $\Delta\varphi$  по следующей формуле:  $\Delta\varphi = 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3$  (8), где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — приращение фазы, полученные соответственно нижней боковой, центральной и верхней боковой спектральными составляющими зондирующего сигнала при их распространении в опытной радиолинии.

Отметим также, что для повышения достоверности результатов измерений периодически (с интервалом в 1 ч) осуществлялась калибровка приемной аппаратуры по тестовому сигналу имитатора с априорно известными параметрами и идентичным (зондирующему сигналу) спектральным составом, территориально расположенному на приемном терминале радиолинии. Таким образом обеспечивалась суммарная аппаратурная погрешность изменения фазы порядка  $0,6^\circ$  и методическая ошибка около  $0,4^\circ$ .

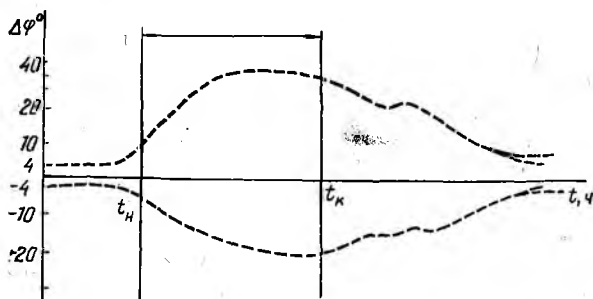


Рис. 3

Эксперименты проводились в 1984—1986 гг. При этом измерения обеспечивались метеоданными о нижнем пограничном слое атмосферы. Типовая реализация суточного изменения значения  $\Delta\varphi$  представлена на рис. 3. Анализ данного графика и экспериментальных результатов позволяет сделать вывод о том, что в отсутствие гидrometeopов значение величины медленно флуктуирует в окрестности нулевого значения с отклонениями обычно не более  $\pm 4^\circ$ . Выпадение гидrometeopов приводит к росту  $\Delta\varphi$  от  $-15 \div -20^\circ$  до  $+35 \div +40^\circ$ , причем начало возрастания совпадает, как правило, с началом дождя, но после его окончания дисперсия фазы может остаться значительной достаточно долго (особенно в случае теплой подстилающей поверхности и достаточно высокой температуры воздуха). Для обеспечения возможности объективного сравнения и статистической обработки опытных данных сопоставление последних проводилось на основе использования интегральной интенсивности дождя, которая соответствует дождю с одинаковым (с реальным дождем) общим ослаблением и равномерной вдоль всей трассы распространения радиоволн интенсивностью [5]:

$$A = RaI^b |_{\lambda=8\text{мм}} \cong 0,25KI, \quad (9)$$

где  $A$  — ослабление (принимается равным нулю);  $R$  — длина трассы

(мм);  $T$  — интенсивность дождя (мм/ч);  $a, b$  — коэффициенты, зависящие от частоты сигнала, температуры окружающей среды и распределения капель по размерам.

Как уже отмечалось, одна из основных причин перевода средств связи в миллиметровый диапазон длин волн — возможность существенного расширения полосы частот КВЧ-радиолиний, а следовательно, и соответствующего увеличения скорости передачи информации (см. выше) [1]. Однако реальные перспективы практической реализации указанной возможности ограничены рядом принципиальных и технических факторов, в частности — конечной шириной полосы когерентности турбулентной дисперсионной тропосферы (особенно при многолучевом распространении миллиметровых радиоволн, что правда может иметь место, как правило, лишь в случае достаточно малых углов места [2]). В то же время следует учитывать, что при цифровой передаче сообщений ширина полосы частот канала связи может заметно превышать полосу когерентности используемой КВЧ радиолинии, так как для высококачественного приема дискретных сигналов существенно лишь выполнение условий селективности Найквиста (что в ряде случаев справедливо и при значительных искажениях информационных символов) [4]. Поэтому для некоторых связанных приложений более удобно дисперсионные свойства КВЧ радиолиний характеризовать временными параметрами и, в частности, эффективной длительностью  $T_{эф}$  импульсного сигнала  $S(t)$  [1; 3]

$$T_{эф}^2 \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2 S^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt} = \frac{1}{2\pi E_S} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [G'(\omega)]^2 d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} [\theta'(\omega) G(\omega)]^2 d\omega \right\}, \quad (10)$$

где  $t_0$  — среднее запаздывание сигнала  $S(t)$ , причем

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t S^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt}; \quad (11)$$

$E_S$  — энергия сигнала  $S(t)$ ,

$$E_S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt; \quad (12)$$

$G(\omega)$ ,  $\theta(\omega)$  — амплитудная и фазовая части спектра  $S(j\omega)$  сигнала  $S(t)$ , т. е.

$$S(j\omega) = G(\omega) e^{j\theta(\omega)}. \quad (13)$$

Штрих (') означает производную по частоте.

Определяя таким образом возрастание значения  $T_{эф}$  по сравнению с исходной длительностью тактового интервала, можно определить

увеличение уровня и глубины межсимвольных искажений дискретных сигналов, а затем найти степень влияния дисперсионных свойств КВЧ-радиолиний на качество передачи цифровой информации [1].

В заключение оценим влияние обнаруженной в ходе экспериментов (см. выше) аномальной дисперсии фазы на качество когерентной передачи дискретных сигналов с фазовой манипуляцией. Не учитывая при этом эффекты «размытия» энергии сигналов во времени (см. формулы (8) — (11)), отмечаем, что фазовые искажения модулированных колебаний могут приводить к смещению оценок информационных параметров вследствие ошибок  $\delta\varphi$  когерентного восстановления несущей

$$\delta\varphi = \frac{1}{\Delta f} \int_{-\frac{\Delta f}{2}}^{\frac{\Delta f}{2}} \varphi(f) df, \quad (14)$$

где  $\varphi(f)$  — фазово-частотная характеристика используемого канала связи. Предполагается, что изменение уровня сигнала на выходе приемника отслеживаются и влияние этих вариаций устраняется известными методами [4].

Расчеты показывают, что указанные значения дисперсии фазы  $|\Delta\varphi| = 40 \div 60^\circ$  тропосферных КВЧ радиоканалов при когерентном приеме информационных сигналов могут приводить к потере помехоустойчивости от 2—4 дБ для ОФМ — 2 до 3,5—5 дБ для ОФМ — 4 (в зависимости от вида ФЧХ  $\varphi(f)$  используемой радиолинии).

В связи с этим при появлении частотно-селективных фазовых искажений на трассе распространения радиоволн представляется целесообразным переходить на автокорреляционный метод приема ОФМ сигналов, т. е. в случае наличия тропосферного участка миллиметровой радиолинии наиболее предпочтителен адаптивный вариант организации КВЧ канала высокоскоростной передачи цифровой информации. Учитывая при этом известные потери автокорреляционного метода приема ОФМ сигналов по сравнению с когерентной обработкой последних [4], получим окончательно, что адаптивная высокочастотная радиолиния тропосферной КВЧ радиосвязи в турбулентной среде распространения миллиметровых волн обеспечивает выигрыш 0,9—1 дБ для ОФМ — 2 и 1,5—1,7 дБ для ОФМ — 4 (по сравнению с когерентной детерминированной системой аналогичного назначения). Интерес представляет также исследование реальных возможностей практического предсказания и высокоточного прогноза изменений знака и величины дисперсии фазы с целью введения соответствующих поправок в схему восстановления несущей когерентного приемника модулированных сигналов для повышения помехоустойчивости передачи и (или) информативности последних.

В целом, проведенный анализ показывает важность учета специфики тропосферного распространения широкополосных КВЧ радиосигналов для исследования и разработки эффективных систем высокоскоростной связи, а также свидетельствует об актуальности и практи-

ческой необходимости проведения дальнейшего целенаправленного теоретического и экспериментального изучения частотно-селективных явлений в атмосферных радиолниях миллиметрового диапазона длин волн.

Список литературы: 1. *Радиосистемы передачи информации* / И. М. Тепляков, Б. В. Рошин, А. И. Фомин, В. А. Вейцель. М., 1982. 264 с. 2. *Крейн Р. К.* Прогноз влияния осадков на спутниковые системы связи // *Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике*. 1977. Т. 65, № 3. С. 210—231. 3. *Кисель В. А.* Аналоговые и цифровые корректоры: *Справ. М.*, 1986. 184 с. 4. *Окунев Ю. Б.* Теория фазоразностной модуляции. М., 1979. 240 с. 5. *Ипполито Л. Дж.* Влияние условий атмосферного распространения радиоволн на космические системы // *Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике*. 1981. Т. 69, № 6. С. 29—58.

Поступила в редколлегию 15.05.87

УДК 621.396.43

В. В. ЕМЕЛЬЯНОВ, канд. техн. наук, Т. П. ПЕТРУЧЕК,  
канд. техн. наук, В. В. ТАЛАЛАЙ, ст. инж.

### УСТРОЙСТВО ПОВЫШЕНИЯ РАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ШУМОВ ПО КАНАЛАМ ТОНАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ

Известно, что в радиорелейных линиях передачи прямой видимости и в тропосферных радиорелейных линиях для борьбы с селективными замираниями применяют разнесенный прием [1]. При этом используются различные методы сложения сигналов на выходах приемников. Рассмотрим случай разнесенного приема со сложением сигналов после частотного детектора. Такую схему можно использовать для повышения равномерности распределения мощности тепловых шумов по каналам тональной частоты радиорелейных линий с частотной модуляцией и частотным разделением каналов, дополнив ее устройством инверсии группового сигнала [2]. Согласно [1] психометрическая мощность теплового шума (в пиковаттах) в канале тональной частоты, вносимая приемником одной радиорелейной станции, определяется выражением

$$P_{ш.т.} = 10^9 \frac{nkT\Delta F_k K_n^2}{P_{пр}} \left(\frac{F_k}{\Delta f_k}\right)^2 \beta_{пр}, \quad (1)$$

где  $n$  — коэффициент шума приемника;  $k$  — постоянная Больцмана, равная  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Вт/(Гц · К);  $T$  — абсолютная температура, принимаемая равной 290 К;  $\Delta F_k$  — ширина полосы пропускания канала тональной частоты, равная  $3,1 \cdot 10^3$  Гц;  $K_n$  — психометрический коэффициент для канала тональной частоты, равный 0,75;  $F_k$  — средняя частота канала в групповом спектре, кГц;  $\Delta f_k$  — эффективное значение девиации частоты, соответствующее измерительному уровню сигнала одного канала на частоте нулевых предискажений, кГц;  $P_{пр}$  — мощность сигнала на входе приемника, Вт;  $\beta_{пр}$  — коэффициент, учитывающий изменение девиации частоты при введении предискажений в зависимости от частоты канала.

Из приведенного выражения следует, что мощность тепловых шумов растет с увеличением  $F_k$ , т. е. с увеличением номера канала: в первом (нижнем) канале она минимальна, в последнем (верхнем) — максимальна. Если не принимать дополнительных мер, то при определении параметров радиорелейных линий следует исходить из допустимой мощности шумов в верхнем канале. При этом мощность шумов в нижних телефонных каналах заведомо меньше, что приводит к неэффективному использованию аппаратуры. Чтобы избежать этого, в радиорелейных линиях с частотным разделением каналов и частотной модуляцией применяют так называемое предискажение сигналов. Для этого на входе частотного модулятора включается предискажающий фильтр. Действие предискажающего фильтра учитывается в выражении (1) коэффициентом  $\beta_{пр}$ .

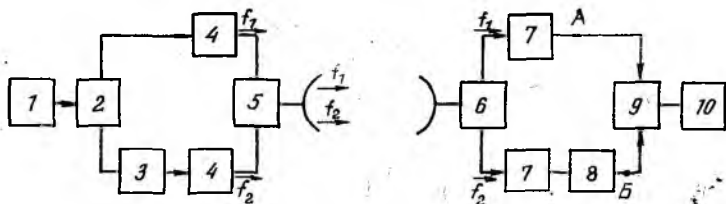


Рис. 1

Введение предискажений сигнала значительно снижает неравномерность распределения мощности тепловых шумов по каналам радиорелейной линии связи. Тем не менее неравномерность распределения тепловых шумов сохраняется.

Для увеличения равномерности распределения мощности тепловых шумов по каналам тональной частоты предлагается использовать устройство [2], структурная схема которого приведена на рис. 1. В этом устройстве групповой сигнал в полосе частот от  $F_1$  до  $F_2$  с выхода аппаратуры уплотнения 1 через разветвитель 2 поступает непосредственно на частотный модулятор одного передатчика 4 и через блок инверсии 3 на вход частотного модулятора второго передатчика 4. В блоке инверсии 3 производится преобразование частоты группового сигнала таким образом, что первый телефонный канал занимает место последнего и наоборот. Блок инверсии сигнала может представлять собой обычный смеситель, частота гетеродина которого выбирается из условия  $f_r = F_2 + F_1$ . Выделяя с помощью фильтра на выходе смесителя разностную частоту, получаем

$$\begin{aligned} f_{\text{вых.см}} &= f_r - F_2 = F_2 + F_1 - F_2 = F_1; \\ f_{\text{вых.см}} &= f_r - F_1 = F_2 + F_1 - F_1 = F_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом производится инверсия спектра группового сигнала в блоке 3. С выходов передатчиков частотно-модулированные сигналы на частотах  $f_1, f_2$ , сложившись в полосовом фильтре, излучаются антенной. Эти сигналы принимаются приемниками 7. Тепловые шумы в каналах тональной частоты на выходах приемников 7 определяются

выражением (1). В верхнем плече приемной части схемы (точка А) мощность тепловых шумов в соответствии с выражением (1) будет максимальной в верхнем телефонном канале, причем характер распределения шумов соответствует кривой 1 (рис. 2). В нижнем плече (точка Б) мощность тепловых шумов будет максимальной в нижнем телефонном канале, а характер распределения отвечает кривой 2 (рис. 2). С учетом сказанного распределение мощности тепловых шумов по каналам тональной частоты на выходе сумматора 9 будет соответствовать кривой 3 (рис. 2).

Как следует из рис. 2, распределение мощности тепловых шумов по телефонным каналам радиорелейной линии передачи стало более равномерным.

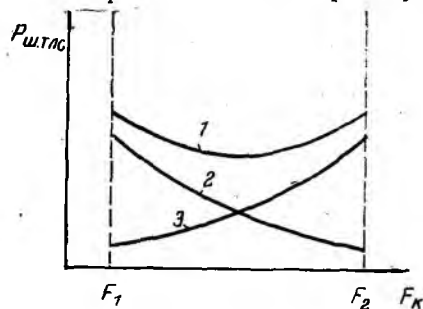


Рис. 2

Таким образом, использование инверсии спектра группового сигнала при разнесенном приеме совместно с предскажениями значительно повышает равномерность распределения мощности тепловых шумов по каналам тональной частоты, что позволит эффективнее использовать приемо-передающую аппаратуру станций радиорелейных линий передачи.

Список литературы: 1. *Справ. по радиорелейной связи*. М., 1981. 405 с. 2. А. с. № 1317672 СССР, МКИ\* НОЧВ 7/14. Устройство для борьбы с замираниями сигналов / В. В. Талалай, Т. П. Петручек, В. В. Емельянов, Л. М. Резникова // Открытия Изобретения. 1987. № 22. С. 12—13.

Поступила в редколлегию 30.12.88

УДК 621.391

В. А. КОЛОДЕЗНЫЙ, Е. А. ПИСЬМИЧЕНКО, С. С. СМОЛЬЯНИНОВ,  
канд. техн. наук, В. М. УЛЯНИЦКИЙ

### ТЕСТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОЭВМ

Постоянное усложнение радиоэлектронной аппаратуры, использование в ней больших интегральных микросхем и микропроцессоров приводит к необходимости разработки вопросов тестирования и диагностики неисправностей как на этапе проектирования, так и при изготовлении и наладке [1].

Процедура тестирования в общем случае включает в себя следующие основные этапы: выбор входных воздействий на тестируемое устройство (ТУ); описание на основе анализа функционирования ТУ ожидаемых выходных реакций на соответствующие входные воздействия; генерация входных воздействий и выдача их на ТУ; регистрация выходных реакций; сравнение выходных реакций с ожидаемыми

и анализ результатов [2]. Данная процедура тестирования может быть реализована различными способами. Наибольшее распространение получили анализаторы логических состояний (АЛС) и сигнатурные анализаторы [3].

Для производственных испытаний и эксплуатационного обслуживания в основном применяется аппаратный анализ, который позволяет, прослеживая сигнатуры в контрольных точках схемы, быстро и точно отыскивать вышедший из строя элемент. Метод не требует высокой квалификации персонала, легко автоматизируется, однако использовать его на этапе проектирования невозможно.

В основе работы современных АЛС лежит метод тестирования статическими сигналами (МТСС) [3]. Суть его заключается в том, что состояние всякой замкнутой системы остается неизменным произвольно долго, пока не возникнет воздействие (причина), вынуждающее систему изменить свое состояние. В соответствии с принципом физического детерминизма, базирующего на полном априорном знании всех входных воздействий и структуры ТУ, наблюдение системы в данный момент позволяет однозначно определить ее состояние в любой другой момент времени.

Все цифровые схемы, синтезируются из последовательностных и комбинационных элементов и имеют статическую природу. Так, различные декодеры, мультиплексоры, буферные передатчики и другие блоки, выполненные в виде комбинационных логических схем, сохраняют выходную информацию неизменной в течение всего периода времени, пока остаются неизменными входные сигналы. Статистическая природа последовательностных элементов следует из их сути.

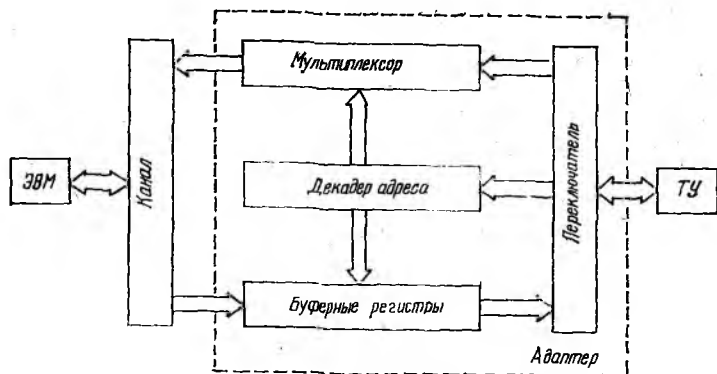
Таким образом, возможность произвольно долго сохранять выходную реакцию на выходах тестируемых элементов позволяет использовать для их тестирования МТСС.

При тестировании с помощью АЛС для каждого конкретного вида неисправностей необходимо разрабатывать собственную процедуру испытаний. При этом один из основных моментов — построение разработчиком тестовых программ. На их основе с помощью аппаратных средств формируются входные воздействия, представляющие собой комбинации импульсных сигналов с заданными временными характеристиками и стандартными уровнями. Для регистрации выходных реакций используются запоминающие устройства, помпараторы и специальные блоки распознавания событий, входящие в состав логических анализаторов. Следовательно, АЛС требуют для своей реализации значительных материальных затрат, при этом позволяют тестировать лишь определенные группы устройств, а их переналадка на другие группы зачастую малоэффективны.

Преодолеть эти трудности в значительной степени позволяет построение АЛС на базе микроЭВМ (например, «Электроника-60»), который был реализован авторами при разработке быстродействующего специализированного процессора обработки сигналов.

Рассмотрим основные особенности процесса тестирования с помощью такого рода АЛС. ТУ связывается с каналом ЭВМ через адаптер

(рисунки). Тестовые входные сигналы выдаются на ТУ из ЭВМ через буферные регистры адаптера и переключатель, а выходные сигналы поступают в ЭВМ через переключатель и мультиплексор. Переключатель позволяет произвести поразрядное подсоединение входных сигналов к выбранным алгоритмам тестирования точкам схемы ТУ. Необходимость введения переключателя связана с индивидуальными особенностями ТУ и его блоков. Аппаратурно он может быть выполнен в виде коммутационного поля или с использованием переключательных матриц. В последнем случае коммутация производится программно. Входные и выходные сигналы обычно формируются из следующих основных частей: адресной, информационной и управляющей, причем разрядность каждой части определяется структурой ТУ и алгоритма тестирования.



В связи с этим целесообразно выбирать разрядность буферных регистров и мультиплексора равной разрядности используемой ЭВМ, а количество регистров и число входов мультиплексора — как частное от деления (с округлением до наибольшего целого) числа разрядов входного или выходного сигнала на разрядность ЭВМ.

При использовании 16-разрядной микроЭВМ «Электроника-60», как показала практика, оказалось достаточным иметь четыре буферных регистра и четырехходовой мультиплексор, что позволило реализовать адаптер с незначительными материальными затратами.

Регистры и мультиплексор подключаются к ЭВМ как внешние устройства, при этом каждому регистру и каждому входу мультиплексора присваивается свой адрес. Если в ТУ имеются внутренние генераторы, управляющие последовательностью выполняемых операций, то они отключаются, а их функции возлагаются на управляющую ЭВМ. Сами генераторы проверяются другими методами, например, с помощью осциллографа.

При составлении тестовых программ желательно максимально использовать собственное матобеспечение ЭВМ, дополнив его драйверами связи с нестандартными внешними устройствами и макрокомандами для оперирования с отдельными разрядами (битами) сигналов. В процессе тестирования проводится отбор лучших программ, которые затем включаются в пакет тестовых программ ТУ.

Программы группируются по выполняемым функциям.

*Программы формирования тестовых воздействий и возможных выходных реакций.* Эти программы составляются для ТУ в целом, а также для различных его модулей (устройств, печатных плат и пр.). На основании алгоритма работы ТУ и составляющих его частей разработчик находит верные отклики, с которыми в дальнейшем производится сравнение реальных выходных сигналов. Как правило, в процессе тестирования производится модификация входных воздействий с целью повышения информативности теста в целом.

*Программы анализа выходных реакций.* Это наиболее сложная часть программного обеспечения. На начальной стадии разработчик непосредственно наблюдает выходные сигналы и определяет по ним работоспособность проверяемого модуля. По мере выявления и накопления формальных признаков неисправностей составляются программы принятия решений и выдачи, например, на дисплей сообщений об их характере.

*Пакет обслуживающих программ.* Как правило, стандартных обслуживающих программ и фрайверов ввода-вывода, входящих в операционную систему ЭВМ, недостаточно или они малопригодны для целей тестирования. Поэтому разработчик может дополнить операционную систему или сохранять свои программы в ПЗУ или на внешних магнитных носителях.

В таблице приведены разработанные авторами обслуживающие программы и объем занимаемой ими памяти.

№ п/п	Назначение обслуживающей программы	Объем памяти (байт)
1	Перевод двоичной информации в 8-ричную (или десятичную) с выводом на дисплей	52
2	Распечатка содержимого ячеек памяти в 8-ричном коде	108
3	Распечатка по битам	104
4	Копирование информации в ОЗУ	16
5	Занесение информации в ПЗУ	36
6	Запись символьной информации в ОЗУ	80
7	Вывод символьной информации на дисплей	44
8	Маскирование выходных регистров интерфейса для селективного анализа их содержимого	16
9	Вывод графиков	356

Как видно, количество разработанных обслуживающих программ относительно невелико, а объем занимаемой ими памяти незначителен, реализация дополнительного математического обеспечения не вызывает затруднений.

Приведенная методика тестирования с помощью микроЭВМ показала на практике высокую эффективность в смысле простоты реализации и требуемого объема математического обеспечения. К недостаткам можно отнести то, что тестирование проводится на скорости, ниже рабочей (если тактовая частота ТУ выше, чем ЭВМ). Когда система не работает на пониженной скорости, то она заведомо неработоспособна.

С другой стороны, если система выдержала испытания, то это позволяет утверждать, что заложенный алгоритм ее функционирования выполняется правильно, неисправных элементов нет и с большой вероятностью система будет работать и при расчетном быстродействии (при правильном конструкторском решении). В частности, проблема быстродействия не возникает при тестировании системы или ее блоков, если они уже работали, но по каким-либо причинам отказали.

Таким образом, метод тестирования статическими сигналами с использованием микроЭВМ гибко настраивается на выполнение практически любых задач цифрового тестирования, и его можно успешно применять для решения задач проектирования и наладки новых радиоэлектронных систем без значительных материальных затрат.

УДК 621.391.82

*И. И. СНЫТКИН*, канд. техн. наук

### **МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СУЩЕСТВУЮЩИХ В ПРОСТЫХ ПОЛЯХ ГАЛУА $GF(p)$**

В теории ШШС термин «нелинейные рекуррентные последовательности» (НЛРП) относится ко всем кодовым рекуррентным последовательностям (КРП), которые не генерируются посредством регистров сдвига с линейными обратными связями. Вопросы формирования и выбора НЛРП с потенциально неулучшаемыми автокорреляционными свойствами рассматривались в работах [1—5]. Так, в работе [3] изучались вопросы формирования и исследования свойств НЛРП в ряде кодов квадратичных вычетов для длительностей  $L \leq 709$ , а в работе [4] — тех же кодов для  $L \leq 1009$  и характеристических для  $L \leq 136$ . Исследования в этой области были расширены и дополнены рассмотрением вопросов построения систем (или кодовых словарей) данных НЛРП на основе их авто- и изоморфных преобразований [1]. Однако, как показывает практика, формирование и исследование свойств данных НЛРП больших ( $L > 1000$ ) и сверхбольших ( $L > 10000$ ) длительностей чрезвычайно затруднительно, так как используемые методы [1; 3; 4] и процедуры формирования НЛРП не эффективны, трудоемки и требуют больших затрат времени даже с применением самых мощных ЭВМ, уже начиная с  $L \geq 100$ . Это связано с тем, что они, с одной стороны, базируются на использовании таблиц первообразных корней  $\theta$  по простым модулям  $p$  и таблиц индексов простых чисел  $p$  [6] для небольшого их числа  $p \leq 109$ , и поэтому трудно алгоритмизируемы, а с другой — связаны с оценкой величины  $\theta^i$ , которая даже при  $\theta < 10$  и  $i > 100$  ( $i = \overline{1, L}$ ) оказывается настолько большой, что с ней нельзя оперировать даже используя самые мощные ЭВМ. Формирование же больших объемов кодовых словарей НЛРП больших, сверхбольших длительностей [2; 5], является актуальной задачей при построении помехозащищенных систем связи с ШШС, особенно специального назначения.

На основе установленных автором и приводимых без доказательств систематических комбинационно-логических соотношений в теории чисел и конечных полей рассматриваются эффективные программные методы и алгоритмы, положенные в основу программного обеспечения ЭВМ, микроЭВМ и микропроцессоров при формировании в реальном масштабе времени систем НЛРП, существующих в простых полях Гауа  $GF(p)$ , больших и сверхбольших длительностей.

Правила построения НЛРП в полях  $GF(p)$ . Построение НЛРП нечетной длительности  $L = p$  в виде кодов квадратичных вычетов и четной длительности  $L = p - 1$  в виде характеристических кодов  $V$  базируется на использовании свойств двузначного характера  $\psi(\cdot)$  мультипликативной группы  $G(p-1)$  полей  $GF(p)$  [1]. Так, для первого случая правило имеет вид

$$\begin{aligned} GF(p) &= \{a_i : i = 0, 1, \dots, p-1\}; L = p = 4 \cdot t + 1, 4-t + 3; \\ t &= 0, 1, 2, \dots; v = \{v_i : i = 0, 1, \dots, p-1\}; \\ v_0 &= \pm 1, v_i = \psi(a_i) = \psi(t), i \not\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned} \quad (1)$$

а для второго — соответственно

$$\begin{aligned} GF(p) &= \{a_i : i = 0, 1, \dots, p-1\}; L = p-1 = 4 \cdot t, 4 \cdot t + 2; \\ t &= 0, 1, 2, 3, \dots; v = \{v_i : i = 0, 1, \dots, p-2\}; \\ v_i &= \psi(\theta^i + 1), \text{ при } \theta^i + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}; \\ v_i &= \pm 1, \text{ при } \theta^i + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $a_i$  —  $i$ -й элемент поля  $GF(p)$ ;  $\theta$  — первообразный элемент поля  $GF(p)$ ;  $\psi(\cdot)$  — характер, который при выполнении условия [6]  $a = \theta^u \pmod{p}$  (3), где  $u$  — индекс числа  $a$  ( $\text{ind } a$ ) по модулю  $p$  оценивается как

$$\psi(a) = \exp(j\pi u) = \begin{cases} 1, & u \equiv 0 \pmod{2}; \\ -1, & u \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Как видно из правил (1), (2), соотношений (3), (4) и работы [1], основные трудности построения НЛРП такого типа заключаются непосредственно в вычислении первообразных элементов  $\theta$ , характеров  $\psi(a)$  и индексов  $u$  ( $\text{ind } a$ ) согласно (3), (4), в определении между  $u$  ( $\text{ind } a$ ) и номерами  $i$  элементов необходимых соответствий согласно (1) и (2).

В дальнейшем вопросы построения НЛРП на основе кодов Якоби и Холла рассматривать не будем, поскольку данные коды — это частный случай оптимальных КРП для весьма ограниченного числа некоторых из длительностей  $L$  кодов квадратичных вычетов [1; 7; 8].

Новые сложения в теории чисел и теории полей  $GF(p)$ . Строгие математические доказательства приводимых положений опущены вследствие их громоздкости, с доказательствами можно ознакомиться в работах [7; 8]. Однако справедливость и очевидность данных положений будут продемонстрированы на примере.

**Л е м м а 1.** Сумма любого простого числа  $a$  (кроме 2) с числом 2 является нечетным несоставным или составным числом, а с любым

Другим простым числом  $p > 2$  — четным составным числом, т. е. число  $(a + p)$  всегда разложимо на простые сомножители

$$x_i : a + p = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

**Лемма 2.** Индекс  $\text{ind } a$  числа  $a$ , взаимно простого с простым модулем  $p$  поля  $GF(p)$ ,  $(a, p) = 1$  и  $a < p$ , равен сумме, приведенной по модулю  $(p - 1)$  индексов чисел, разлагающих на сомножители число  $(a + p)$ , т. е.  $\text{ind } a \equiv (\text{ind } x_1^{\alpha_1} + \text{ind } x_2^{\alpha_2} + \dots + \text{ind } x_n^{\alpha_n}) \pmod{(p - 1)}$ .

**Пример:**  $GF(p = 13) = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ ,  $\theta = 2$ ,  $\text{ind } 1 = 0$ ,  $\text{ind } 2 = 1$ ,  $\text{ind } 3 = \text{ind } (3 + 13) = \text{ind } 2^4 = 4 \cdot \text{ind } 2 = 4$ ,  $\text{ind } 4 = \text{ind } 2^2 = 2 \cdot \text{ind } 2 = 2$ ,  $\text{ind } 5 = \text{ind } (5 + 13) = \text{ind } (2 \cdot 3^2) = \text{ind } 2 + 2 \cdot \text{ind } 3 = 9$ ,  $\dots$ , и т. д.

Если значения индексов рассчитывать в соответствии с (3), то можно убедиться в справедливости примера и лемм 1, 2. Методика, определяемая леммами 1, 2, исключает необходимость использования, как это делается в работе [1], таблиц индексов простых чисел, приводимых в работе [6], освобождает от трудоемких операций, определяемых выражением (3) и весьма эффективна при ручном формировании НЛРП с  $L < 100$ .

**Лемма 3.** В простых полях  $GF(p)$  элемент  $a = 1$  имеет два значения индекса: 0 и  $(p - 1)$ .

**Лемма 4.** Индексом элемента  $a_i$  мультипликативной группы поля  $GF(p)$  является число  $(i - 1)$ , т. е.  $\text{ind } a_i = i - 1$ , если  $i$  — номер элемента  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p - 1$ .

**Следствие.** Независимо от того, с применением какого именно первообразного элемента  $\theta$  вычислен элемент мультипликативной группы  $a_i$ , имеющий номер  $i$ , и какое численное значение он имеет, индекс элемента  $a_i$  равен  $i - 1$ .

**Лемма 5.** Любой фиксированный элемент  $a$  мультипликативной группы поля  $GF(p)$  имеет число  $\varphi(p - 1)$  изоморфных индексов, где  $\varphi(p - 1)$  — функция Эйлера от  $(p - 1)$ , разбивающихся на два непересекающихся класса: инверсные и неинверсные.

**Лемма 6.** Если  $c = \varphi(p - 1)$ ,  $a \theta_1 \equiv \theta_1^c \pmod{p}$ ,  $\theta_2 \equiv \theta_1^{k_2} \pmod{p}$ ,  $\theta_3 \equiv \theta_1^{k_3} \pmod{p}$ ,  $\dots$ ,  $\theta_c \equiv \theta_1^{k_c} \pmod{p}$  — изоморфные первообразные элементы поля  $GF(p)$ , то изоморфные индексы  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_c$  любого фиксированного элемента  $a$  мультипликативной группы  $G(p - 1)$  и показатели степеней при  $\theta_1$ , т. е.  $k_2, k_3, \dots, k_c$  связаны следующим соотношением:

$$\mu_1 \equiv k_2 \cdot \mu_2 \equiv k_3 \cdot \mu_3 \equiv \dots \equiv k_c \cdot \mu_c \pmod{(p - 1)}. \quad (5)$$

**Следствие.** Если известно множество  $\{c\} = \{\varphi(p - 1)\} = \{k_i\}$  и индекс  $\mu_1$  числа  $a \in G(p - 1)$  при основании  $\theta_1$ , тогда для вычисления всех изоморфных индексов  $\mu_2, \dots, \mu_c$  числа  $a$  необходимо решать сравнение (5).

**Теорема 1.** Если  $i$  является номером элемента  $a_i$  мультипликативной группы  $G(p - 1)$  поля  $GF(p)$  и принимает рекуррентно значе-

ния  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ,  $a_{\theta_k}$  есть любой  $k$ -й изоморфный первообразный элемент поля  $GF(p)$ , то с точностью до изоморфизма элементы  $a_i \in GF(p-1)$ , их индексы  $\text{ind } a_i$  и номера позиций  $i$  связаны рекуррентным соотношением

$$a_{(i-\text{ind } a_i+1)} = (a_{(i-1-\text{ind } a_{i-1}+1)}) \theta_k \pmod{p}. \quad (6)$$

На основании теоремы 1 вычисление последовательности элементов  $a_i$  и их индексов при любом первообразном  $\theta_k$  существенно упрощается и сводится к решению рекуррентного соотношения (6), каждый из сомножителей правой части которого не превышает модуля  $p$ . При этом не требуется, как и в случае леммы 2, использовать таблицы индексов чисел, решать постоянно соотношение (3). Кроме того, соотношение (6) легко алгоритмируется, что позволяет успешно применять его для программного обеспечения при формировании НЛРП.

На приведенном в табл. 1 конкретном примере построения элементов  $a_i$  поля  $GF(13)$  и вычисления индексов элементов можно проследить справедливость лемм 3—6 и теоремы 1.

При формировании НЛРП в простых полях  $GF(p)$ , как следует из (1) — (3), (6), требуется знание первообразного элемента  $\theta$ . С этой целью в работе [1] используется таблица первообразных корней (элементов), приводимая в работе [6], так как вычисление  $\theta$  для каждого конкретного поля  $GF(p)$  является трудоемкой задачей [6]. Действительно, согласно работе [6], для того чтобы число  $\theta$ , взаимно простое с  $p$ , т. е.  $(\theta, p) = 1$ , было первообразным корнем по модулю  $p$ , необходимо и достаточно, чтобы это  $\theta$  не удовлетворяло ни одному из сравнений

$$\theta^{\frac{c}{g_1}} \not\equiv 1 \pmod{p}; \theta^{\frac{c}{g_2}} \not\equiv 1 \pmod{p}, \dots; \theta^{\frac{c}{g_k}} \not\equiv 1 \pmod{p}, \quad (7)$$

где  $c = \varphi(p)$ ;  $\varphi(p)$  — функция Эйлера,  $g_1, g_2, \dots, g_k$  — различные простые делители числа  $c$ .

Методику вычисления  $\theta$  можно свести к следующему легко алгоритмируемому утверждению.

У т в е р ж д е н и е 1. Так как  $\varphi(p) = p-1$ , то, возводя последовательно числа натурального ряда  $g = 2, 3, 4, \dots$  в степени  $x = (p-1)$ ,  $(p-1)/K_1, \dots, (p-1)/K_l$  с помощью рекуррентного соотношения  $a^{x-1} \equiv l \cdot a \pmod{p}$ ,  $l \equiv a^{x-2} \pmod{p}$ , где  $K_i$  — вычисляемые простые сомножители числа  $(p-1)$ , и анализируя результаты согласно условию (7), получаем значение  $\theta$ .

Методика формирования НЛРП в соответствии с правилами (1) и (2) сводится к следующему.

У т в е р ж д е н и е 2. Для формирования НЛРП в соответствии с правилом (I) необходимо вычислить первообразный элемент  $\theta$  согласно утверждению 1, затем вычислить последовательность элементов  $a_i$  поля  $GF(p)$  согласно соотношению (6) при  $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ . Поскольку в этом случае  $i$  есть индекс  $a_i$  (согласно теореме 1), то последовательность значений характера  $\psi(a_i)$  (в соответствии с (4)) будет представлять собой чередование (меандр) символов  $(1, -1)$ . Для обеспечения равенства  $\psi(a_i) = \psi(i)$  достаточно с помощью цикла перестановочного соответствия последовательности чисел  $i = 0, 1, \dots$ ,

$$p = 13; GF(13) = \{0, 1, 2, \dots, 12\};$$

$$\varphi(p-1) = \{K_1 = 1, K_2 = 5, K_3 = 7, K_4 = 11\}$$

$$\theta_1^{K_1} = 2, a_i = \{1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7\}, i = 1, 2, 3, \dots, 12,$$

$$\gamma_1 = \text{ind}_{\theta_1} a_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$\theta_2 \equiv \theta_1^{K_2} \equiv 6 \pmod{13}, a_i = \{1, 6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11\},$$

$$\gamma_2 = \text{ind}_{\theta_2} a_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, i = 1, 2, 3, \dots, 12$$

$$\theta_3 \equiv \theta_1^{K_3} \equiv 11 \pmod{13}, a_i = \{1, 11, 4, 5, 3, 7, 12, 2, 9, 8, 10, 6\},$$

$$\gamma_3 = \text{ind}_{\theta_3} a_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, i = 1, 2, 3, \dots, 12$$

$$\theta_4 \equiv \theta_1^{K_4} \equiv 7 \pmod{13}, a_i = \{1, 7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2\},$$

$$\gamma_4 = \text{ind}_{\theta_4} a_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, i = 1, 2, 3, \dots, 12$$

$a_i$	$a_i \equiv \theta_1^{\gamma_1} \equiv \theta_2^{\gamma_2} \equiv \theta_3^{\gamma_3} \equiv \theta_4^{\gamma_4} \pmod{p=13}$
1	$1 \equiv 2^0 \equiv 6^0 \equiv 11^0 \equiv 7^0 \pmod{13}$
2	$2 \equiv 2^1 \equiv 6^5 \equiv 11^7 \equiv 7^{11} \pmod{13}$
3	$3 \equiv 2^4 \equiv 6^8 \equiv 11^4 \equiv 7^8 \pmod{13}$
4	$4 \equiv 2^3 \equiv 6^{10} \equiv 11^2 \equiv 7^{10} \pmod{13}$
5	$5 \equiv 2^9 \equiv 6^9 \equiv 11^3 \equiv 7^3 \pmod{13}$
6	$6 \equiv 2^5 \equiv 6^1 \equiv 11^{11} \equiv 7^7 \pmod{13}$
7	$7 \equiv 2^{11} \equiv 6^7 \equiv 11^5 \equiv 7^1 \pmod{13}$
8	$8 \equiv 2^8 \equiv 6^3 \equiv 11^9 \equiv 7^9 \pmod{13}$
9	$9 \equiv 2^8 \equiv 6^4 \equiv 11^8 \equiv 7^4 \pmod{13}$
10	$10 \equiv 2^{10} \equiv 6^2 \equiv 11^{10} \equiv 7^2 \pmod{13}$
11	$11 \equiv 2^7 \equiv 6^{11} \equiv 11^1 \equiv 7^5 \pmod{13}$

Пример.

$$a = 3 \equiv 2^4 \equiv (2^5)^3 \equiv (2^7)^4 \equiv (2^{11})^8 \pmod{13}.$$

$$\gamma_1 = 4 \equiv (K_2 \gamma_2 = 40) \equiv (K_3 \gamma_3 = 28) \equiv (K_4 \gamma_4 = 88) \pmod{12}.$$

$p - 1$  подставить такую последовательность  $\psi(a_i)$ , при которой  $a_i = i$ . Тем самым будет сформирована НЛРП в виде кодов квадратичных вычетов.

**Утверждение 3.** Для формирования НЛРП согласно правилу (2) необходимо вычислить первообразный элемент  $\theta$  (согласно утверждению 1), затем вычислять  $a_i \equiv \theta^i + 1 \pmod{p}$  и соответствующие характеры  $\psi(a_i)$  по следующей методике: из свойств сравнений следует, что если  $x_i \equiv \theta^i \pmod{p}$ , то  $x_i + 1 \equiv \theta^i + 1 \pmod{p}$ . Следовательно, вычисляя  $x_i$  согласно (6) и прибавляя к  $x_i$  единицу; получаем  $a_i$ . Для  $x_i$  значение  $i$  является индексом, тогда для  $a_i$  индексом будет такое число  $z$ , при котором  $x_z = a_i$ , т. е.  $a_z \equiv \theta^z \pmod{p}$ .

Таким образом, с помощью цикла перестановочного соответствия, ставя в соответствие каждому  $a_i$  из массива  $[a_i]$  такое значение  $i = z$ , при котором  $a_i = x_z$ , формируется массив индексов  $[u_i]$  для  $[a_i]$ . Однако в массиве  $[x_i]$  всегда отсутствует число  $p$ , а в массиве  $[a_i]$  — число 1. Учитывая лемму 3 и тот факт, что значение позиции НЛРП  $v_i = 1$  справедливо для  $a_i \equiv 0 \pmod{p}$  и  $u_i \equiv 0 \pmod{2}$ , можно утверждать, что замена числа  $p$  в массиве  $[a_i]$  на 1, обеспечивает соответствие массивов  $[a_i]$  и  $[x_i]$  по набору чисел и однозначное соответствие массивов  $[u_i]$  и  $[a_i]$ . Анализируя массив  $[u_i]$  согласно (4) на четность, формируют НЛРП в виде характеристических кодов.

Для формирования кодовых словарей НЛРП фиксированной длительности необходимо, согласно [1], вычислять авто- и изоморфные коэффициенты разностных множеств НЛРП  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , где  $a_k$  номер позиций НЛРП с символами 1, т. е. определять все разностные множества вида

$$A_t \equiv tA \pmod{L} = \{ta_1, ta_2, \dots, ta_k\} \pmod{L}. \quad (8)$$

Здесь  $t \in T$  содержит  $\varphi(L)$  чисел взаимно простых с  $L$ .

Методика вычисления множества  $T$  [1] неэффективна, так как связана с большим объемом вычислений и трудно алгоритмизируется. Более простая методика [7] заключается в следующем утверждении.

**Утверждение 4.** Испытывая число  $L$  (длительность НЛРП) на делимость на множество чисел  $2, 3, \dots, L/2$ , определяем множество простых сомножителей  $\{l_i\} : L = l_1^{\alpha_1} \cdot l_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot l_i^{\alpha_i}$ . Затем из множества чисел  $\{1, 2, 3, \dots, L - 1\}$  выбрасываются числа, делящиеся на  $l_1, l_2, \dots, l_i$  методом «решета Эратосфена» [6]. Тем самым формируется множество чисел  $T$ . Затем, испытывая сумму любых двух любых чисел множества  $T$  на выполнение условия  $t_i + t_k \equiv 0 \pmod{L}$ ,  $i \neq k$ , отыскивают наименьшие числа, подчиняющиеся данному условию. Тем самым формируется множество неинверсно-изоморфных коэффициентов  $T_u$ , используя которое, получают неинверсно-изоморфные множества  $A_t$  согласно (8) несущие в себе изменения тонкой внутренней структуры соответствующих им НЛРП.

Вычисление автоморфных и инверсно-изоморфных разностных множеств  $A_t$  не имеет смысла потому, что в соответствии с работой [1] автоморфным  $A_t$  отвечают циклические сдвиги символов НЛРП, а инверсно-изоморфным  $A_t$  — зеркальные отображения с циклическим сдвигом символов НЛРП.

C1	Оператор начала процедуры.
A2	Описание заглавия и формальных параметров процедуры ВЫЧЕТ ( $\theta, p, L, v$ ):
A3	Описание параметров тела процедуры.
A4	Формирование первого и второго элементов поля $GF(p)$ .
A5	Оператор формирования $A_i$ элемента поля $GF(p)$ по соотношению $A_i = a_{i-1}\theta$ .
A6	Деление $A_i$ на модуль $p$ .
A7	Нахождение остатка частного от деления.
A8	Умножение на модуль остатка частного от деления и нахождение целого от произведения и формирование массива элементов поля $GF(p)$ .
B9	Проверка условия равенства ряда натуральных чисел элементу $a_i$ .
A10	Формирование массива индексов элементов $a_i$ .
B11	Проверка условия на четность индекса элемента $a_i$ .
B12	Присвоение 1 кодовой позиции $v_i$ .
A13	Присвоение -1 кодовой позиции $v_i$ .
A14	Присвоение 1 первой кодовой позиции $v_1$ .
C15	Оператор вывода на печать.

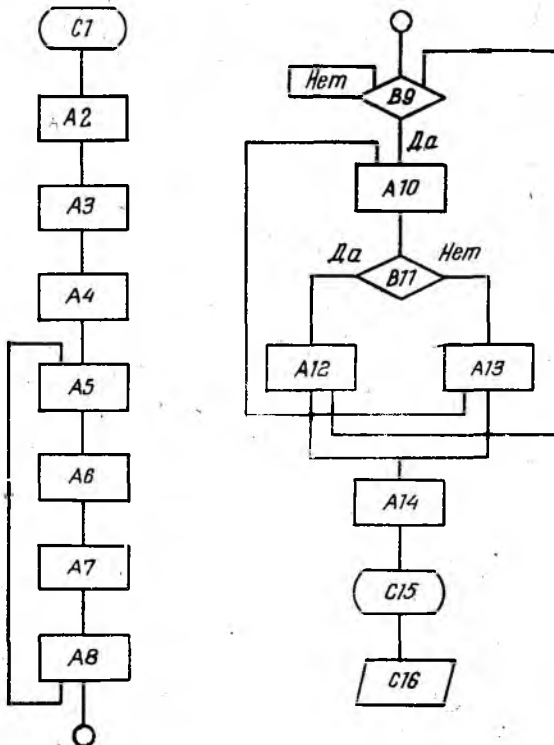


Рис. 1

Рассмотренные методики положены в основу алгоритмов формирования НЛРП.

Алгоритмы формирования НЛРП в полях  $GF(p)$ . На рис. 1 приведен, а в табл. 2 раскрыт алгоритм «ВЫЧЕТ», позволяющий при задаваемых значениях первообразного элемента  $\theta$  и длительности  $L = p - 1 = 4t + 1, 4t + 3$  формировать НЛРП нечетной длительности  $L$  в виде кодов квадратичных вычетов.

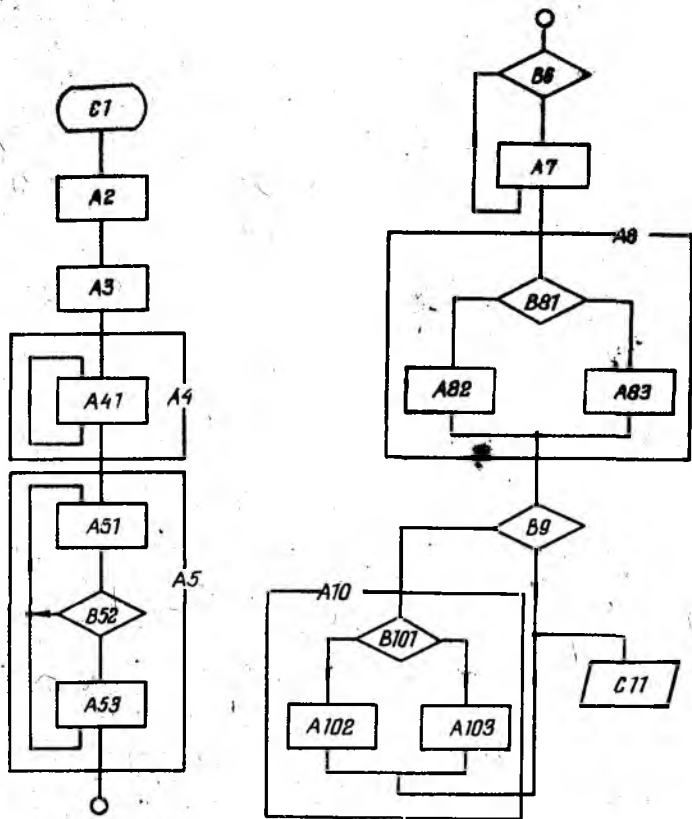


Рис. 2

На рис. 2 представлен, а в табл. 3 раскрыт алгоритм «ХАРА», позволяющий при задаваемых значениях первообразного элемента  $\theta$  и длительности  $L = p - 1 = 4t, 4t + 2$  формировать НЛРП четной длительности  $L$  в виде характеристических кодов.

Данные алгоритмы, ориентированные на языки высокого уровня, являются эффективным программным обеспечением для ЦВМ, микроЭВМ и микропроцессоров для формирования в реальном масштабе времени кодовых словарей НЛРП любых длительностей  $L = p, p - 1,$

СГ	Начало процедуры.
A2	Описание заголовка процедуры и формальных параметров «ХАРА» ( $\theta, p, L, v$ ).
A3	Описание параметров тела процедуры.
A4, A41	Формирование массива элементов $a_i$ согласно рекуррентному выражению $a_i \equiv a_{i-1}\theta \pmod{p}$ .
A5	Формирование массива элементов $a_i \equiv \theta^i + 1 \equiv a_i + 1 \pmod{p}$ .
A51	Увеличение на 1 элементов $a_i$ , т. е. $a_i^* = a_i + 1$ .
B52	Проверка условия $\psi(a_i) = p$ .
A53	Присвоение $\psi(a_i) = 1$ .
B6	Проверка условия $\psi(a_i) = \psi(a_i^*)$ .
A7	Формирование массива индексов элементов $a_i^*$ .
A8	Формирование кодовой последовательности $V$ .
B81	Проверка условия на четность массива индексов элементов $a_i^*$ .
A82	Присвоение $v_i = 1$ .
A83	Присвоение $v_i = -1$ .
B9	Проверка условия $v[L] = 1$ .
A10	Формирование кодовой последовательности.
B101	Проверка условия $v_i = 1$ .
A102	Присвоение $v_i = -1$ .
A103	Присвоение $v_i = 1$ .
С11	Оператор конца процедуры.

где  $p$  — простое число. Как показал опыт, данные алгоритмы с использованием средних по мощности ЦВМ серии «ЕС» позволяют формировать кодовые словари НЛРГ длительностями  $L > 1000$  за единицы минут.

Список литературы: 1. *Свердлик М. Б.* Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 200 с. 2. *Варакин Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М., 1985. 384 с. 3. *Пелехатый М. И.* О последовательностях квадратичных вычетов с наилучшими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электрон. 1971. Т. 16, № 5. С. 125—134. 4. *Пелехатый М. И., Голубев Е. А.* Автокорреляционные свойства некоторых типов двоичных последовательностей // Пробл. передачи информации. 1972. Т. 8, № 1. С. 92—99. 5. *Диксон Р. К.* Широкополосные системы: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Журавлева. М., 1979. 304 с. 6. *Виноградов И. М.* Теория чисел. М., 1972. 105 с. 7. *Сныткин И. И.* К вопросу теоретико-числовых методов построения рекуррентных последовательностей // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1980. Вып. 8. № 7. С. 31—34.

Поступила в редколлегию 11.04.88

## СОДЕРЖАНИЕ

Ефанов И. М., Жук Н. П., Облывач С. А. Симметричное возбуждение горизонтального вибратора в слоистой среде	3
Горобец Н. Н., Давидчевский Ю. И., Чеботарев В. И. Инвариантность передаточных характеристик векторных сигналов	11
Коростелев В. С., Кучеренко С. Н., Хлопов Г. И., Якимчук Ю. В. Применение вращающихся угольников отражателей для калибровки доплеровских РЛС миллиметрового диапазона	17
Артеменко В. А., Дзюндзюк Б. В., Коновко А. В. Вычисление коэффициентов прохождения и отражения электромагнитной волны для многослойной структуры	23
Шматько Е. И., Ковалева Н. А., Шиян А. В., Исаченков В. И., Соболева А. И. Выбор замедляющей системы для генератора электромагнитных излучений, заполненного активной средой	27
Мелешко В. И., Вьюнник В. И., Гончаров Б. И., Малашихин Т. А. Многозональный метод измерения модуля и фазы коэффициента отражения СВЧ	32
Тимófеев В. П., Хвостов С. С., Кравец Е. В., Гончаров Б. И. Особенности разработки СВЧ-измерительной части автоматизированной системы трехсантиметрового диапазона	37
Власов В. И., Контарь А. А., Терещенко А. И. Переменный волноводный attenuator на основе гибкого волновода	42
Тиховский В. Ю., Канарик Г. Г., Кухтин М. П. Частотный метод измерения добротности объемных СВЧ-резонаторов	47
Колпаков Н. Д., Седых Д. К., Фесенко Ю. А. Использование фотоэмиссионного спектрометра для регистраций линейчатого спектра	50
Быков В. Н., Быков С. Н., Кондратьев А. В., Султанов А. С. Применение широкополосных шумовых сигналов для борьбы с замираниями в радиолиниях малой протяженности	52
Лученко Ф. В., Попенко В. С. Оценка «эффективной» ширины спектра систем дискретных сигналов	56
Горбенко И. Д., Стасев Ю. В., Замула А. А. Алгебраический метод построения нелинейных сигналов характеристического типа	58
Овчаренко О. В. Асимптотика сигналов с финитным аналитическим спектром	62
Сытник О. В. Оценка влияния свойств фазового шума аппаратуры на разрешение радиолокатора с синтезированием апертуры	67
Пресняков И. Н., Афанасьев Ю. В. Применение рекуррентного алгоритма максимального правдоподобия при адаптивной фильтрации состояния	73
Вирченко Ю. П., Домнина И. Н., Мазманишвили А. С. Помехоустойчивость длинных линий оптической связи при передаче когерентных сигналов на фоне гармонической случайной помехи	80
Зуев Н. Г., Титаренко А. М., Чередников П. И. К вопросу о границах зон параметрической неустойчивости	87
Белогорцев А. Б., Ваврив Д. М., Громов Г. А. О вероятностных характеристиках хаотических колебаний в неавтономном осцилляторе Ван-дер-Поля	92
Александров Ю. Н., Король Э. Н., Милонов Ю. Ю., Товарицкий А. В. Исследование эффективности одного метода сжатия массивов	96
Александров В. О., Кузнецов С. В., Снисаренко А. Г., Сорока Л. С. Комбинированная система адаптивной обработки сигнала с варьируемым числом повторов и исправлением ошибок	99
Стариков А. И., Мишнев А. В. Формирование токовых импульсов	103
Ванькевич В. В., Галаев В. В., Козелков С. В. Экспериментальные исследования и КВЧ-радиосигналов	106
Емельянов В. В., Петрунькин В. М. Повышения равномерности распределения частоты	114
Колодезный В. А., Письмиченко Е. В. Тестирование цифровых устройств обработки сигналов с использованием микроЭВМ	116
Сныткин И. И. Методы и алгоритмы формирования систем нелинейных рекуррентных последовательностей, существующих в простых полях Галуа GF(p)	120

Радиотехника  
 621.396(06)  
 P15  
 717949  
 НЕ ХНУРЕ  
 1990