УДК 681.3+681.5:007

Е.В. БУЛАХ

ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ С ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Описываются примеры построения дискретного автомата с псевдослучайными переходами из одного состояния в другое на основе алгоритмов помехоустойчивого поиска точки экстремума унимодальной функции при воздействии на нее несимметричной регулярной последовательности.

В работе [1] описаны помехоустойчивые к несимметричным регулярным воздействиям алгоритмы поиска точки экстремума унимодальной функции. На основе этих алгоритмов возможно синтезировать дискретные автоматы (ДА).

Рассмотрим алгоритмы функционирования дискретных автоматов поиска точки экстремума унимодальной функции при воздействии регулярной несимметричной виртуальной последовательности.

Первоначально построим алгоритм функционирования ДА поиска точки для случая, когда $H = l = \Delta t$ (Δt – такт работы ДА). Конкретизируем это для случая, когда $k = 3, a = 4h$ (h – дискретность преобразования). Для синтеза алгоритма применяем метод индукции.

Тогда, как это уже было показано [1] для $i = 1,2$, будем иметь:

$$\varphi_{1,8}^{1,1}(1,3) = 1,\ \varphi_{1,9}^{1,1}(2,3) = 2. \tag{1}$$

Для этих условий алгоритм заключается в следующем:

1-й шаг: положить $x_2^1 = h;\ x_1^1 = x_2^1 - 0.5h;\ x_3^1 = x_2^1 + 0.5h.$

2-й шаг: если на первом шаге возникает исход $a)$, то $x^* \in [0, x_2^1)$ и поиск заканчивается; если на первом шаге возникает исход $б)$, то применить принцип повторных сравнений: $x_1^2 = x_1^1;\ x_2^2 = x_2^1;\ x_3^2 = x_3^1$.

Если в результате выполнения эксперимента на втором шаге возникает исход $b_1)$, то $x^* \in [0, x_2^1)$; если возникает исход $b_2)$, то $x^* \in [x_1^1, x_3^1)$ либо $x^* \in [x_2^1, 1)$; если возникает исход $b_3)$, то $x^* \in [x_1^1, x_3^1)$. Поиск x^* заканчивается.

Пусть $i = 3$. Тогда в результате первого шага могут, как известно, возникнуть исходы типа $a)$ и $б)$. Для исхода $a)$ (см. ранее рассмотренный алгоритм поиска) $x^* \in [0, x_2^1)$

На этом интервале действует $(3-1)$-шаговый алгоритм, который разобьет его на $\varphi_{1,8}^{1,1}(2,3)$ равные части. Поскольку $\varphi_{1,8}^{1,1}(2,3) = 2$, то этим устанавливаем длину полученного интервала неопределенности:

$$l([0, x_2^1)) = 2h. \tag{2}$$

Для исхода б) характерны такие соотношения:

$$x^* + \xi(t) \in [x_1^1, x_3^1);\ x^* + \xi(t) \in [x_2^1, 1),$$

для которых $x^* \in [x_1^{1,1}, x_3^1);\ x^* \in [x_2^{1,1}, 1)$.

Исходы $a)$, $б)$, $b_1)$, $b_2)$, $b_3)$ и т.д. взяты из работы [1]

При появлении одной из возможных реализаций исхода $б)$ можно применять смешанную стратегию либо стратегию, в основе которой лежит принцип "повторных сравнений".

Рассмотрим каждую реализацию исхода $б)$. Пусть первоначально применяется смешанная стратегия, для которой характерно:

$$x_1^2 = x_1^1;\ x_3^2 = x_3^1;\ x_2^2 \in [x_1^1, x_3^1]$$

Тогда при возникновении исхода $b_1)$ устанавливаем (см. ранее рассмотренные алгоритмы): помеха действовала на первом шаге; она будет действовать и на третьем шаге; $x^* \in [0, x_2^2]$. Поскольку $\varphi(1,3) = 1$, то $l\{[0, x_2^2]\} = h$.

При возникновении исхода $b_2)$, устанавливаем истинность выражения $x^* \in [x_1^2, x_3^2]$. Поскольку в распоряжении алгоритма остался один шаг, то длина выделенного интервала неопределенности определяется соотношением:

$$l\{[x_1^2, x_3^2]\} = h\varphi_{1,8}^{1,1}(1,3) = h.$$

Если при выполнении второго шага возникает исход $b_3)$, то устанавливаем истинность таких соотношений:

$$x^* \in [x_1^2, x_3^2];\quad l\{[x_1^2, x_3^1]\} = h\varphi_2(1,3) = 2h.$$

Поскольку для первой реализации исхода $b_2)$ смешанная стратегия совпадает со стратегией принципа "повторных сравнений", то ее отдельно для данного случая не рассматриваем.

Исходя из минимаксного критерия оптимальности, устанавливаем:

$$l\{[0, x_2^2]\} = h;\ l\{[x_1^2, x_3^2]\} = \min\{h, 2h\} = h. \qquad (3)$$

Для второй реализации исхода $б)$ смешанная стратегия заключается в следующем:

$$x_1^2 = x_2^1;\ x_3^1 = x_4^1;\ x_2^2 \in [x_2^1, 1]\ (x_4^1 = h\varphi_{1,8}^{1,1}(3,3)).$$

При этом если возникает исход $b_1)$, то устанавливаем $x^* \in [x_2^{1,1}, x_2^2]$, помеха действовала на первом шаге алгоритма и будет действовать на третьем шаге. Поскольку $x_2^{1,1} = x_2^1 - ah,\ a = 4,\ x_2^1 = \min\{2h, h\} = h$ (см. соотношение (2), (3)), то $x_2^{1,1} = 0$ и в распоряжении алгоритма остался один шаг. Длина интервала неопределенности $(x_2^{1,1}, x_2^2)$ определяем соотношение $l\{[x_2^{1,1}, x_2^2]\} = h\varphi_1(0,3) = h$, что противоречит смешанной стратегии, для которой $x_2^2 > x_1^2$. Поэтому для данной реализации исхода $б)$ применим только принцип "повторных сравнений", для которого справедливы соотношения:

$$x_1^2 = x_1^1;\ x_2^2 = x_2^1;\ x_3^2 = x_3^1$$

Для данной стратегии исход типа $b_2)$ может возникнуть дважды:

$$b_1^1)\ f(x_1^2) = \max_\rho\{f(x_3^2)\};\quad b_1^2)\ f(x_2^2) = \max_\rho\{f(x_\rho^2)\}.$$

Если возникает исход $b_1^1)$ то $x^* \in [0, x_2^2]$, помеха действовала на первом шаге:

$$\alpha = 0,\ \varphi_2(0,3) = h;\ l\{[0, x_2^2]\} = h\varphi_1(0,3) = h. \qquad (4)$$

В случае, когда возникает исход типа $b_1^2)$, это свидетельствует также о действии помехи на первом шаге алгоритма, он позволяет установить истинность таких соотношений:

$$x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ l([x_1^2, x_3^2]) = h\varphi_1(0,3) = h.$$

Когда возникает исход типа $b_2)$, то помеха не обнаруживается, однако устанавливается, что $x^* \in [x_2^2, 1]$ на выделенном интервале действует $(3-2)$-шаговый помехоустойчивый алгоритм, который разбивает этот интервал неопределенности на $\varphi^{1,1}_{1,8}(1,3)$ равные части. На этом основании справедливо соотношение:

$$l([x_2^2, 1]) = h\varphi^{1,1}_{1,8}(1,3) = h. \tag{5}$$

Для данной реализации исхода $б)$ исход $b_3)$ не может возникнуть. На основании приведенных соотношений устанавливаем:

$$l([0,1]) = l([0, x_2^2]) + l([x_2^2, 1]); \tag{6}$$

$$l([0, x_2^2]) = \max\{2h, h\} = h;$$

$$l([x_2^2, 1]) = \min\{h, 2h\} = h.$$

Из соотношений (6) следует справедливость равенства: $\varphi^{1,1}_{1,8}(3,3) = 2$.

Пусть $i = 4$. Тогда после первого шага для исхода типа $a)$ будем иметь

$$x_2^1 = h\varphi^{1,1}_{1,8}(3,3) = 2h. \tag{7}$$

Для исхода $б)$ применяем на втором шаге смешанную стратегию (см. решение для $i = 3$). Тогда для первой реализации исхода типа $б)$ в случае проявления исхода $b_1)$ будем иметь (помеха действовала на первом шаге алгоритма):

$$x^* \in [0, x_2^2],\ \varphi_1(1,3) = 2; \tag{8}$$

в случае появление исхода $b_2)$ устанавливаем справедливость выражений:

$$x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ \varphi^{1,1}_{1,8}(2,3) = 2. \tag{9}$$

Если возникает исход типа $b_3)$, то справедливы такие соотношения (помеха проявилась на втором шаге алгоритма):

$$x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ \varphi_2(H + \alpha_2 + \alpha_3, 3) = 2,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0,\ H = 1.$$

Для второй реализации исхода типа $б)$ в случае возникновения исхода типа $b_1^1)$ имеем:

$$\begin{gathered} x^* \in [x_1^{1,1}, x_2^2],\ i_1 = 1;\ \varphi_1(1,3) = 2; \\ x_1^{1,1} = 0\ \ (2h - 4h < 0);\ l([0, x_2^2]) = 2h. \end{gathered} \tag{10}$$

Для исхода типа $b_1^2)$ устанавливаем $x^* \in [x_1^2, x_3^2]$, проявление помехи обнаружено, на выделенном интервале действует непомехоустойчивый алгоритм поиска, который разобьет интервал на $\varphi_1(1,3)$ равные части:

$$\varphi_1(1,3) = 2,\ l([x_1^2, x_3^2]) = 2h. \tag{11}$$

Для исхода $b_2)$ характерно то, что помеха не обнаружена, однако однозначно можно утверждать, что $x^* \in [x_2^1, 1]$. Этот интервал помехоустойчивым алгоритмом поиска будет разбит на $\varphi^{1,1}_{1,8}(2,3)$ равные части, что и подтверждает истинность соотношения:

$$l\left([x_2^2,1]\right) = h\varphi_{1,8}^{1,1}(2,3) = 2h. \tag{12}$$

Анализ (7) – (12) позволяет установить истинность выражений:

$$\begin{gathered}\varphi_{1,8}^{1,1}(4,3) = \varphi_{1,8}^{1,1}(3,3) + \varphi_{1,8}^{1,1}(2,3) = 4,\\ x_2^1 = 2h,\ x_1^1 = h,\ x_3^1 = 3h.\end{gathered} \tag{13}$$

Пусть $i = 5$. Тогда будем соответственно иметь:

исход a): $x_2^1 = h\varphi_{1,8}^{1,1}(4,3) = 4h$;

первая реализация исхода $б$):

$$b_1)\ x_1^{1,1} = 0,\ \alpha = 1,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_1(1,3) = 2,\ x_2^1 = 2h;$$

$$b_2)\ l(x_1^1,\ x_3^1) = 2h;$$

$$b_3)\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1,\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ \varphi_2(2,3) = 4,\ l\left([x_1^1,\ x_3^1]\right) = 4h;$$

вторая реализация исхода $б$), $x^* \in [0, x_2^2]$:

$$b_1)\ x_1^{1,1} = 0,\ \alpha = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \varphi_1(1,3) = 2,\ l\left([0, x_2^2]\right) = 2h;$$

$$b_1^2)\ x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ \alpha = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \varphi_1(1,3) = 2,\ l\left([x_1^2, x_3^2]\right) = 2h;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_2^2, 1],\ l\left([x_2^2, 1]\right) = h\varphi_{1,8}^{1,1}(3,3) = 2h.$$

Исходя из минимаксного критерия, устанавливаем:

$$\begin{gathered} l\left([0,1]\right) = \min\left\{ h\varphi_{1,8}^{1,1}(4,3),\ h\varphi_1(1,3) + h\varphi_{1,8}^{1,1}(3,3)\right\};\\ h\varphi_1(1,3) + h\varphi_{1,8}^{1,1}(3,3) = 4h;\\ \varphi_{1,8}^{1,1}(5,3) = \varphi_1(1,3) + \varphi_{1,8}^{1,1}(3,3) = 4,\\ x_1^2 = h;\ x_2^1 = 2h;\ x_3^1 = 3h. \end{gathered}$$

Пусть $i = 6$. Тогда будем соответственно иметь:

исход a): $x_2^1 = h\varphi_{1,8}^{1,1}(5,3) = 4h$;

первая реализация исхода $б$):

$$b_1)\ x^* \in [x_1^{1,1}, x_2^2],\ x_1^{1,1} = 0,\ \alpha = 2,\ \alpha_1 = 0,\ \varphi_1(2,3) = 4,\ x_2^2 = 4h;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ l\left([x_1^1, x_3^1]\right) = h\varphi_{1,8}^{1,1}(4,3) = 4h;$$

$$b_3)\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 0,\ l\left([x_1^1, x_3^1]\right) = h\varphi_2(2,3) = 4h;$$

вторая реализация исхода $б$):

$$b_1)\ x^* \in [x_1^{1,1}, x_2^2],\ x_1^{1,1} = 0,\ \alpha = 2,\ \alpha_1 = 0,\ \varphi_1(2,3) = 4,\ l\left([0, x_2^2]\right) = 4h;$$

$$b_1^2)\ x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ \alpha = 2,\ \alpha_1 = 0,\ \varphi_1(2,3) = 4,\ l\left([x_1^2, x_3^2]\right) = 4h;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_2^2, 1],\ l\left([x_2^2, 1]\right) = h\varphi_{1,8}^{1,1}(4,3) = 4h.$$

Исходя из минимаксного критерия, устанавливаем:

$$\varphi_{1,8}^{1,1}(6,3) = \min\{\varphi_{1,8}^{1,1}(5,3),\ \varphi_1(2,3)\} + \varphi_{1,8}^{1,1}(4,3) = 8;$$

$$x_1^1 = 2h;\ x_2^1 = 4h;\ x_3^1 = 6h.$$

Пусть $i = 7$. Тогда справедливы такие соотношения:

исход a): $x_2^1 = h\varphi_{1,8}^{1,1}(6,3) = 8h$;

первая реализация исхода $б$):

$$b_1)\ x^* \in [x_1^{1,1}, x_2^2],\ \alpha = 2,\ \alpha_1 = 0,\ \varphi_1(2,3) = 4,\ l(x_1^{1,1}, x_2^2) = 4h,\ x_1^{1,1} = 0;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ l(x_1^1, x_3^1) = h\varphi_{1,8}^{1,1}(5,3) = 4h;$$

$$b_3)\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1,\ l(x_1^1, x_3^1) = h\varphi_2(3,3) = 8h;$$

вторая реализация исхода $б$):

$$b_1^1)\ x^* \in [x_2^{1,1}, x_2^2],\ x_2^{1,1} = \min\{h\varphi_{1,8}^{1,1}(6,3), h\varphi_1(2,3)\} = 4h,\ x_2^{1,1} = 0;$$

$$b_1^2)\ x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ \varphi_1(2,3) = 4,\ l(x_1^2, x_3^2) = 4h;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_2^1, 1],\ l(x_2^2, 1) = h\varphi_{1,8}^{1,1}(5,3) = 4h.$$

Исходя из минимаксного критерия, устанавливаем:

$$\varphi_{1,8}^{1,1}(7,3) = \min\{\varphi_{1,8}^{1,1}(6,3),\ \varphi_1(2,3)\} + \varphi_{1,8}^{1,1}(4,3) = 8;$$

$$x_1^1 = 2h;\ x_2^1 = 4h;\ x_3^1 = 6h.$$

Показано, что для $i = 8$ имеют место соотношения:

$$\varphi_{1,8}^{1,1}(8,3) = \varphi_{1,8}^{1,1}(8-1,3) + \varphi_{1,8}^{1,1}(8-2,3) = 16;$$

$$x_1^1 = 4h;\ x_2^1 = 8h;\ x_3^1 = 12h.$$

Для других значений параметра i справедливы соотношения:

$$\varphi_{1,8}^{1,1}(i,3) = \varphi_{1,8}^{1,1}(i-1,3) + \varphi_{1,8}^{1,1}(i-2,3);$$

$$x_1^1 = h\varphi_{1,8}^{1,1}(i-3,3),\ x_2^1 = h\varphi_{1,8}^{1,1}(i-1,3),\ x_3^1 = x_2^1 + \varphi_{1,8}^{1,1}(i-3,3)$$

Рассмотрим другой характерный случай, для которого параметры алгоритма принимают значения $l = 1,\ H = 2,\ a = 4,\ k = 3$.

Для начальных значений i соответственно будем иметь:

$$\varphi_{1,8}^{1,2}(0,3) = \varphi_{1,8}^{1,2}(1,3) = 1;\ \varphi_{1,8}^{1,2}(2,3) = 2.$$

Пусть $i = 3$. Тогда будем соответственно иметь:

исход a) : $x_2^1 = h\varphi_{1,8}^{1,2}(2,3) = 2h$;

первая реализация исхода $б$):

$$b_1)\ x^* \in [x_1^{1,1}, x_2^1],\ x_1^{1,1} = 0,\ i_1 = 1,\ \varphi_1(1,3) = 2,\ x_2^1 = 2h;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ l(x_1^1, x_3^1) = h\varphi_{1,8}^{1,2}(1,3) = h;$$

$$b_3)\ x^* \in [x_1^1, x_3^1],\ \varphi_2(1,3) = 2,\ l(x_1^1, x_3^1) = 2h;$$

вторая реализация исхода $б$):

$$b_1^1)\ x^* \in [x_1^{1,1}, x_2^1],\ x_1^{1,1} = 0,\ i_1 = 1,\ \varphi_1(1,3) = 2,\ x_2^1 = 2h;$$

$$b_1^2)\ x^* \in [x_1^2, x_3^2],\ i_1 = 1,\ \varphi_1(1,3) = 2,\ l(x_1^2, x_3^2) = 2h;$$

$$b_2)\ x^* \in [x_2^2, 1],\ l(x_2^2, 1) = h\varphi_{1,8}^{1,2}(1,3) = h.$$

На основании минимаксного критерия оптимальности устанавливаем:

$$\varphi_{1,8}^{1,2}(3,3) = \varphi_{1,8}^{1,2}(2,3) + \varphi_{1,8}^{1,2}(1,3) = 3.$$

Показано, что для других значений параметра i целевая функция будет принимать такие значения:

$$i = 4,\ \varphi_{1,8}^{1,2}(4,3) = \varphi_{1}(1,3) + \varphi_{1,8}^{1,2}(2,3) = 4;$$

$$i = 5,\ \varphi_{1,8}^{1,2}(5,3) = \varphi_{1,8}^{1,2}(4,3) + \varphi_{1,8}^{1,2}(3,3) = 7.$$

Для всех остальных значений i целевая функция описывается соотношением:

$$\varphi_{1,8}^{1,2}(i,3) = \varphi_{1,8}^{1,2}(i-1,3) + \varphi_{1,8}^{1,2}(i-4,3).$$

В табл. 1 приведены значения целевой функции в зависимости от количества шагов алгоритма.

Таблица 1

Значения целевой функции $\varphi_{1,8}^{1,2}(i,3)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi_{1,8}^{1,2}(i,3)$	1	1	2	3	4	7	11	18	29	47	76

В том случае, когда параметры алгоритма поиска принимают значения:

$$l = 1,\ H = 2,\ a = \infty,\ k = 3,$$

для целевой функции алгоритма справедливо выражение:

$$\varphi_{1,8}^{1,2}(i,3) = \min\{\varphi_{1,8}^{1,2}(i-1,3),\ \varphi_{1}(i_1,3)\} + \varphi_{1,8}^{1,2}(i-2,3).$$

Значения этой функции приведены в табл. 2.3.

Таблица 2

Значения функции $\varphi_{1,8}^{1,2}(i,3)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi_{1,8}^{1,2}(i,3)$	1	1	2	3	4	7	11	15	26	41	58	99	157	227

Если параметры алгоритма поиска принимают значения $l = 1,\ H = 3$, $a = 4,\ k = 3$, то для целевой функции алгоритма справедлив ряд Фибоначчи описываемый таким соотношением:

$$\varphi_{1,8}^{1,3}(i,3) = \varphi_{1,8}^{1,3}(i-1,3) + \varphi_{1,8}^{1,3}(i-2,3).$$

Следует заметить, что по такой методике могут быть построены алгоритмы поиска точки экстремума унимодальной функции, помехоустойчивые к несимметричным регулярным помехам, для любых параметров алгоритма.

Литература: 1. *Алипов Н.В., Булах Е.В.* Помехоустойчивые к несимметричным регулярным последовательностям алгоритмы поиска точки экстремума унимодальной функции / / Сб. научных трудов по материалам 6-й международной конференции "Теория и техника передачи, приема и обработки информации", Харьков: ХТУРЭ, 2000. С. 593-595

Поступила в редколлегию

Булах Евгений Вячеславович, аспирант кафедры конструирования электронно-вычислительных машин ХТУРЭ. Научные интересы: защита информации. Адрес: Украина, 61007, Харьков, пр.50 лет ВЛКСМ, 65-а, кв. 8, тел. 40-94-94.