

ВЫБОР БАЗИСНЫХ И ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА АНТЕНН С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Введение

В последнее время значительно возросла актуальность исследования антенн, поверхностный импеданс которых обладает нелинейными свойствами. С одной стороны, это связано с интенсивными исследованиями новых материалов, обладающих высокотемпературной сверхпроводимостью, и внедрением их в разработки различных электродинамических устройств СВЧ и антенн [1]. Для таких устройств задача анализа эффектов, вызванных нелинейным характером поверхностного импеданса сверхпроводников, имеет немаловажное значение. С другой стороны, освоение миллиметрового диапазона волн потребовало разработки источников излучения повышенной мощности. Один из способов решения данной задачи - использование устройств сложения мощности (power combining) на основе сеточных структур [2,3], характерной особенностью которых является включение в излучающую структуру генераторных или усилительных приборов с нелинейными характеристиками на небольшом расстоянии друг от друга (порядка 0,1 длины волны). При анализе таких структур существует возможность рассматривать их как устройства с нелинейным поверхностным импедансом путем введения усредненных нелинейных граничных условий, подобных условиям Астрахана-Конторовича.

Один из подходов к анализу антенн с нелинейным поверхностным импедансом предложен в [4]. В его основе лежит предположение, что на поверхности излучателя векторы касательных составляющих напряженности электрического и магнитного полей связаны между собой нелинейными граничными условиями. Это позволило получить нелинейное интегральное уравнение (НИУ) относительно распределения плотности поверхностного тока излучателя. С применением метода моментов данное уравнение сведено к системе нелинейных алгебраических уравнений, описывающих нелинейный режим излучателя. С целью увеличить эффективность вычислений в [4] предложено использовать различные системы базисных и весовых функций при аппроксимации тока в линейной и нелинейной частях НИУ. В настоящей работе на примере анализа тонкопроволочного излучателя обсуждаются вопросы выбора систем базисных функций и приводятся результаты количественной оценки погрешности численного решения НИУ при использовании данного подхода.

Постановка задачи, методы исследования

Рассмотрим установившийся периодический режим расположенного в свободном пространстве ($\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$) проволочного излучателя произвольной конфигурации, на поверхности проводников которого выполняется нелинейное граничное условие вида

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \mathbf{h}_0 \hat{Z}_s(\|\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\|) \right]. \quad (1)$$

Здесь: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей в точке \mathbf{r} на поверхности проводника; \mathbf{n} – нормаль к поверхности проводника в той же точке; $\hat{Z}_s[\cdot]$ – нелинейный оператор, описывающий свойства поверхностного импеданса проводника; \mathbf{h}_0 – единичный вектор, определяющий направление $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

Предполагаем, что излучатель возбуждается сторонним источником с частотой ω_0 (длина волны λ_0), создающим напряженность электрического поля $\mathbf{E}^{\text{ст}}(\mathbf{r}, \omega_0)$. Требуется определить отклик, в качестве которого рассматривается распределение тока излучателя, на частотах

$$\omega_q = q\omega_0, \quad \forall \quad q = \overline{0, N}, \quad (2)$$

где N – число высших гармоник, учитываемых в процессе расчета.

Вначале получим интегральные уравнения относительно распределения тока вдоль проводников излучателя. При этом считаем, что радиус любого из проводников излучателя a много меньше его длины и много меньше λ_0 / N . Таким образом, на каждой из частот ω_q выполняется так называемое “тонкопроволочное” приближение, и вектор поверхностной плотности тока имеет только одну компоненту, направленную вдоль оси проводника

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = J(\mathbf{r}, t)\mathbf{s}_0, \quad (3)$$

где \mathbf{s}_0 – единичный вектор, направленный вдоль оси проводника.

С учетом этого граничное условие (1) запишется в виде

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \hat{Z}[J(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (4)$$

Анализ установившегося периодического режима излучателя целесообразно проводить в частотной области. Чтобы перейти в частотную область, представим $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $J(\mathbf{r}, t)$ в виде разложения в ряд Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{q=-N}^N \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_q) e^{j\omega_q t}, \quad (5)$$

$$J(\mathbf{r}, t) = \sum_{q=-N}^N J(\mathbf{r}, \omega_q) e^{j\omega_q t} \quad (6)$$

и подставим данные соотношения в (4). Тогда, воспользовавшись преобразованием Фурье, получим

$$\mathbf{s}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_q) - \frac{1}{T} \int_0^T \hat{Z}_s \left[\sum_{p=-N}^N J(\mathbf{r}, \omega_p) e^{j\omega_p t} \right] e^{-j\omega_q t} dt = 0, \quad \forall \quad q = \overline{0, N}. \quad (7)$$

Здесь $T=2\pi/\omega_0$.

Видно, что НГУ во временной области преобразовалось в систему нелинейных граничных условий, связывающих на поверхности проводников комплексные амплитуды гармоник поверхностной плотности тока $J(\mathbf{r}, \omega_p)$ с амплитудами гармоник касательной составляющей полного электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_q)$, которые для каждой из частот ω_q определяются соотношением

$$\mathbf{s}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_q) = \frac{1}{j\omega_q \varepsilon_0} \mathbf{s}_0 \left(\text{grad div} + k_q^2 \right) \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega_q) G_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d|\mathbf{r}'| + \begin{cases} \mathbf{s}_0 \mathbf{E}^{\text{ct}}(\mathbf{r}, \omega_0), & \text{при } q = 1 \\ 0, & \text{при } q \neq 1 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь: $G_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk_q|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ – функция Грина свободного пространства; $k_q = 2\pi q / \lambda_0$ –

волновое число свободного пространства на частоте ω_q ; \mathbf{r}, \mathbf{r}' – радиус-векторы точек наблюдения и интегрирования. Интегрирование ведется по поверхности проводников излучателя. Так как в рамках тонкопроволочного приближения считается, что поверхностная плотность тока зависит только от продольной координаты, то в (8) можно перейти от поверхностной плотности тока $J(s', \omega_q)$ к полному току через поперечное сечение проводника

$I(s', \omega_q) = 2\pi a J(s', \omega_q)$, в результате чего для $s_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_q)$ получим [5, 6]:

$$s_0 \mathbf{E}(s, \omega_q) = \frac{1}{j\omega_q \varepsilon_0} \int_L I(s', \omega_q) \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} + (s_0 s'_0) k_q^2 \right\} G_q(s, s') ds' + \begin{cases} E_{tg}^{ct}(s, \omega_0), & \text{при } q = 1 \\ 0, & \text{при } q \neq 1 \end{cases} \quad (9)$$

В данном соотношении: s, s' - координаты точек наблюдения и интегрирования, отсчитываемые вдоль оси проводника; $E_{tg}^{ct}(s, \omega_q) = s_0 \mathbf{E}^{ct}(s, \omega_q)$. Подставив (9) в (7), получим систему нелинейных интегральных уравнений (ИУ) относительно распределения гармоник тока вдоль проводников излучателя в виде:

$$\int_L I(s', \omega_q) \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} + (s_0 s'_0) k_q^2 \right\} G_q(s, s') ds' + \frac{j\omega_q \varepsilon_0}{T} \int_0^T \dot{Z}_s \left[\frac{1}{2\pi a} \sum_{p=-N}^N I(s, \omega_p) e^{j\omega_p t} \right] e^{-j\omega_q t} dt = \begin{cases} -j\omega_0 \varepsilon_0 E_{tg}^{ct}(s, \omega_0), & \text{при } q = 1 \\ 0, & \text{при } q \neq 1 \end{cases} \quad \forall q = \overline{0, N}. \quad (10)$$

В общем случае решение интегральных уравнений даже для излучателей с линейными характеристиками поверхностного импеданса возможно только с использованием численных методов, среди которых наибольшее распространение получил метод моментов и, в частности, метод Галеркина. Согласно данному методу на первом этапе решения искомое распределение тока $I(s', \omega_q)$ представляется в виде разложения по некоторой системе базисных функций $\{\Phi_m(s', \omega_q)\}$, ($m = \overline{1, M}$), а затем исходное ИУ приводится к системе линейных алгебраических уравнений [5,6]. Воспользуемся этим методом для решения полученной системы нелинейных ИУ. Однако, в отличие от случая решения линейных ИУ, для аппроксимации искомого распределения тока в линейном операторе ИУ (первое слагаемое в левой части (10)) и нелинейном операторе (второе слагаемое в левой части (10)) будем использовать различные системы базисных функций: $\{\Phi_m^{(L)}(s', \omega_q)\}$ и $\{\Phi_m^{(N)}(s', \omega_q)\}$, соответственно. Таким образом, распределение ищется в виде

$$I(s', \omega_q) = \sum_{m=1}^M I_m^{(L)}(\omega_q) \Phi_m^{(L)}(s', \omega_q) \quad (11)$$

для линейного оператора и в виде

$$I(s', \omega_q) = \sum_{m=1}^M I_m^{(N)}(\omega_q) \Phi_m^{(N)}(s', \omega_q) \quad (12)$$

для нелинейного. Полагаем, что неизвестные коэффициенты аппроксимации в (11) и (12) одинаковы $I_m^{(L)}(\omega_q) = I_m^{(N)}(\omega_q) = I_m(\omega_q)$. Подставив (11) и (12) в (10), после умножения на весовые функции и интегрирования вдоль проводников излучателя получим

$$\mathbf{Z}(\omega_q) \mathbf{I}(\omega_q) + \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{N}[I(t)] e^{-j\omega_q t} dt = \begin{cases} \mathbf{U}(\omega_0), & \text{при } n = 1 \\ 0, & \text{при } n \neq 1 \end{cases} \quad \forall q = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Здесь: $\mathbf{Z}(\omega_q)$ - квадратная матрица размерности $M \times M$ с элементами

$$Z_{mn}(\omega_q) = \iint_{LL} \Phi_n^{(L)}(s, \omega_q) \Phi_m^{(L)}(s', \omega_q) \left[-\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} + (\mathbf{s}_0 \mathbf{s}'_0) k_q^2 \right] G_q(s, s') ds' ds; \quad (14)$$

$\mathbf{I}(\omega_q) = (I_1(\omega_q), I_2(\omega_q), \dots, I_M(\omega_q))^T$ - матрица-столбец (вектор), элементами которой являются коэффициенты аппроксимации искомого распределения тока; $\aleph[I(t)] = (\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_M)^T$ и $\mathbf{U}(\omega_0) = (U_1(\omega_0), U_2(\omega_0), \dots, U_M(\omega_0))^T$ - матрицы-столбцы с элементами:

$$\aleph_n[I(t)] = j\omega_q \varepsilon_0 \int_L \Phi_n^{(N)}(s, \omega_q) \hat{Z}_s \left[\frac{1}{2\pi a} \sum_{p=-N}^N \sum_{m=1}^M I_m(\omega_p) \Phi_m^{(N)}(s, \omega_p) e^{j\omega_p t} \right] ds \quad (15)$$

и

$$U_n(\omega_0) = -j\omega_0 \varepsilon_0 \int_L \Phi_n^{(L)}(s, \omega_0) E_{tg}^{ct}(s, \omega_0) ds. \quad (16)$$

Индекс T обозначает операцию транспонирования.

Полученные соотношения (13) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд гармоник распределения тока вдоль проводников излучателя. Данная система – это система уравнений гармонического баланса для нелинейной цепи, представляющей собой соединение нелинейного и линейного $2M$ -полюсников (рис. 1, а). При этом нелинейный многополюсник описывается вектором $\aleph[I(t)]$ во временной области, а линейный - в частотной области матрицей собственных и взаимных сопротивлений $\mathbf{Z}(\omega_q)$ и системой действующих на его входах источников ЭДС $\mathbf{U}(\omega_0)$.

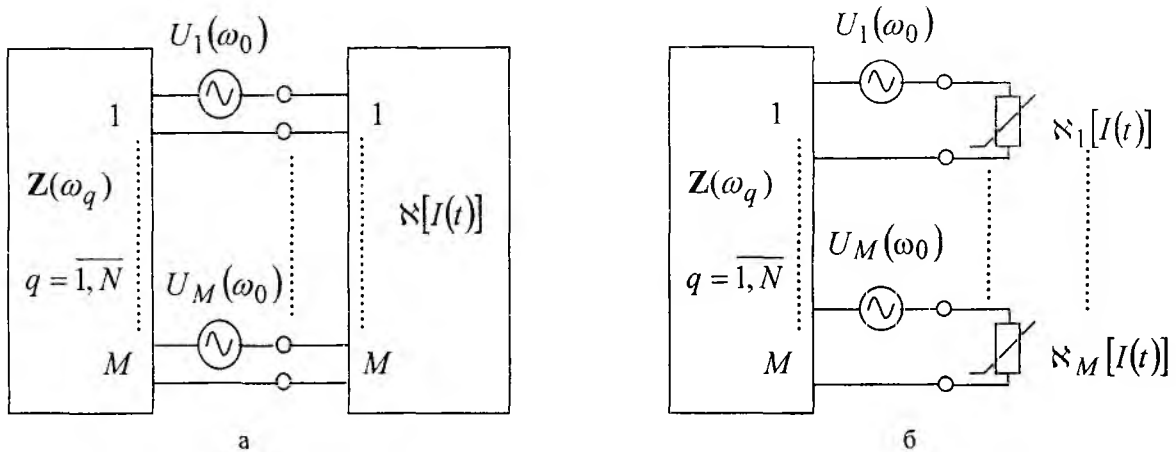


Рис.1

Остановимся теперь на выборе систем базисных функций.

Так как линейный интегральный оператор в (13) имеет такой же вид, как и для идеально проводящих излучателей, то при выборе системы $\{\Phi_m^{(L)}(s', \omega_q)\}$ необходимо руководствоваться такими же требованиями, что и при выборе систем базисных функций для решения ИУ идеально проводящих излучателей. Следует, однако, учесть, что для получения корректных результатов анализа излучателей с нелинейным поверхностным импедансом требуется вычисление линейного интегрального оператора на частотах высших гармоник. Это ведет к увеличению числа базисных функций, необходимых для корректной аппроксимации распределения тока и, как результат, к увеличению времени расчета матрицы собственных и взаимных сопротивлений. Как показали расчеты, для проволочных и узких микрополосковых излучателей наиболее приемлемой, по-видимому, является система кусочно-синусоидальных

функций подобластей, предложенная Ричмондом [6]. Она позволяет, с одной стороны, получить выражения для собственных и взаимных сопротивлений в аналитическом виде, исключив численное интегрирование, и, с другой стороны, разработать универсальный пакет программ, позволяющий исследовать характеристики практически сколь угодно сложных проволочных излучателей с нелинейным поверхностным импедансом.

Одно из основных требований, предъявляемых к системе функций $\{\Phi_m^{(N)}(s', \omega_q)\}$ – эффективность вычисления нелинейного оператора $\aleph[I(t)]$. Как можно видеть из соотношения (15), если на одном элементарном сегменте проводника ток определяется суммой двух или более базисных функций (рис. 2,а), значения которых отличны от нуля, то $\aleph[I(t)]$ описывает многополюсник общего вида.

Если же в любом сечении проводника ток зависит только от одной базисной функции (рис. 2,б), то соотношение (15) упрощается и принимает вид:

$$\aleph_n[I(t)] = j\omega_q \varepsilon_0 \int_L \Phi_n^{(N)}(s, \omega_q) \hat{Z}_s \left[\frac{1}{2\pi a} \sum_{p=-N}^N I_n(\omega_p) \Phi_n^{(N)}(s, \omega_p) e^{j\omega_p t} \right] ds. \quad (17)$$

Данное соотношение описывает нелинейный многополюсник, состоящий из отдельных, несвязанных между собой двухполюсных нелинейных элементов с характеристиками $U(t) = \aleph_n[I(t)]$ (рис. 1,б).

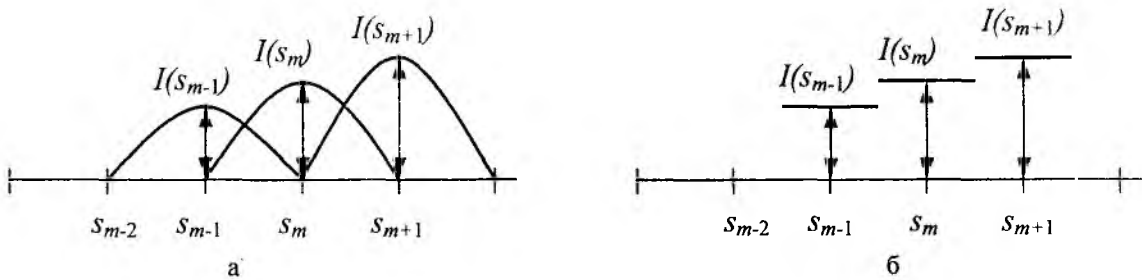


Рис. 2

Такой вид схемы приводит к более простому виду уравнений гармонического баланса и, как результат, повышает эффективность их решения.

Численные результаты и выводы

Чтобы подтвердить возможность использования различных систем базисных функций при аппроксимации тока в линейном и нелинейном операторах системы нелинейных ИУ, были рассмотрены два случая: а) расчет входного сопротивления полуволнового вибратора $Z_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$ при использовании для аппроксимации тока одной системы базисных функций, в качестве которой была выбрана система кусочно-синусоидальных функций, и б) расчет входного сопротивления полуволнового вибратора $\tilde{Z}_{вх} = \tilde{R}_{вх} + j\tilde{X}_{вх}$ при использовании для аппроксимации тока в линейном операторе системы кусочно-синусоидальных функций, а в нелинейном операторе – системы кусочно-постоянных функций. В последнем случае соотношения для вычисления нелинейного оператора (17) имеют наиболее простой вид:

$$\aleph_n[I(t)] = j\omega_q \varepsilon_0 \Delta s_n \hat{Z}_s \left[\frac{1}{2\pi a} \sum_{p=-N}^N I_n(\omega_p) e^{j\omega_p t} \right], \quad (18)$$

где Δs_n – длина n -го элементарного сегмента проводника.

Результаты расчетов приведены на рис. 3,4.

На рис. 3 показаны зависимости активной $\Delta R_{ex} = R_{ex} - \tilde{R}_{ex}$ и реактивной $\Delta X_{ex} = X_{ex} - \tilde{X}_{ex}$ частей разности входных сопротивлений, рассчитанных по этим двум вариантам аппроксимации, от величины поверхностного импеданса R_s при различном числе разбиений на длину вибратора. Из сравнения графиков рис. 3,а и рис. 3,б видно, что относительная ошибка из-за использования более грубой аппроксимации тока в нелинейном операторе больше для реактивной части входного сопротивления, но и она не превосходит $5 \cdot 10^{-4}$ в широком диапазоне изменения R_s уже при 9 разбиениях на длину вибратора. С увеличением числа разбиений, т.е. с уменьшением длины элементарного сегмента проводника точность расчета резко повышается (рис. 4) и при числе разбиений больше 15 ошибка не превышает 10^{-4} .

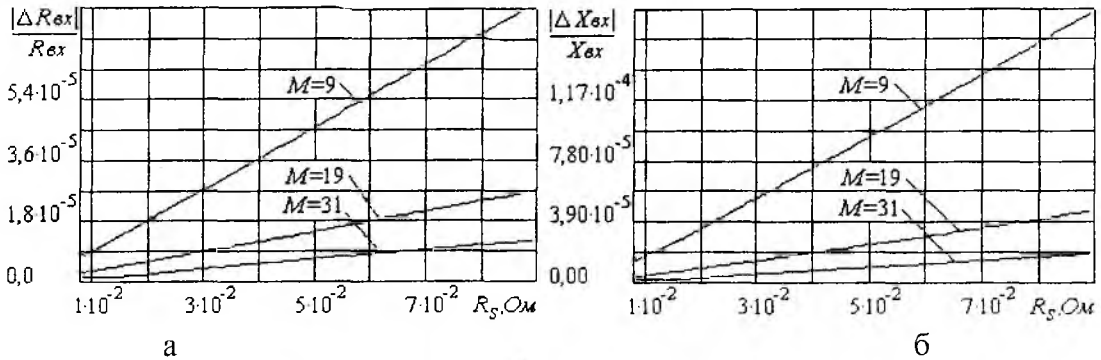


Рис. 3

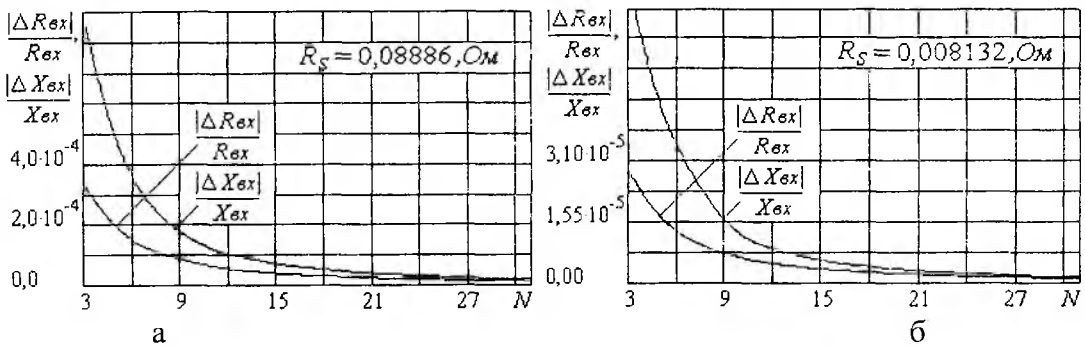


Рис. 4

Таким образом, приведенные результаты подтверждают, что при решении нелинейного интегрального уравнения методом моментов на этапе аппроксимации искомого распределения тока в линейной и нелинейной частях интегрального оператора возможно использование различных систем базисных функций, а на этапе сведения исходного интегрального уравнения к уравнениям гармонического баланса – различных систем весовых функций. Это увеличивает эффективность алгоритма анализа антенн с распределенной нелинейностью за счет значительного упрощения системы уравнений гармонического баланса и сокращения времени ее решения.

Список литературы: 1. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 1999. No. 2. 2. Lin J., Itoh T. Active Integrated Antennas // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1994. Vol. 42. No. 12. P. 2186-2194. 3. Harvey J., Brown E.R., Rutledge D.B., York R.A. Spatial Power Combining for High-Power Transmitters // *IEEE Microwave Magazine*. 2000. Vol. 1. No. 4. P. 48-59. 4. Шифрин Я.С., Лучанинов А.И., Омаров М.А. Анализ антенн с распределенной нелинейностью // *Антенны. Сб. статей*. М.: ИПРЖР. 2000. Вып. 1(44). С. 70-83. 5. *Вычислительные методы в электродинамике* / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 476с. 6. *Moment methods in electromagnetics. Techniques & Applications*/ Ed. by J. Moore and R. Pizer. - N.Y.: McMillan, 1984. 346 p.