УДК 621.382

В. В. ОВЧАРЕНКО, канд. техн. наук

ТЕОРИЯ p—n-ПЕРЕХОДА, ТОЛЩИНА КОТОРОГО БОЛЬШЕ ДИФФУЗИОННОЙ ДЛИНЫ. *СООБЩЕНИЕ 1*

Рассмотрим одномерный p—n-переход, толщина которого намного превышает диффузионную длину неосновных носителей заряда. Тогда на концах этого перехода концентрация дырок и электронов практически совпадает с равновесными концентрациями, и в качестве адекватной модели p—n-перехода можно взять p—n-переход с неограниченными p- и n-областями, считая на бесконечности в p-области $p=p_p$, $n=n_p$, а в n-области $n=n_n$, $p=p_n$, где p_p, n_p, n_n, p_n — равновесные концентрации дырок и электронов в соответствующих областях.

Построение теории p—n-перехода предусматривает следующее [1]. На основании сравнения уровней Ферми для p- и n-областей устанавливается связь равновесных концентраций носителей заряда с контактной разностью потенциала φ_k в случае изолированного p—n-перехода. Затем рассматривается случай, когда к p—n-переходу прикладывается напряжение U и через него протекает ток I. Предполагая малыми падения напряжения на p-и n-областях, считают, что на контакте полупроводников действует разность потенциалов φ_k+U, и применяют имеющуюся формулу для концентрации носителей заряда, подставляя в нее φ_k+U вместо φ_k. Таким путем определяют неравновесные концентрации неосновных носителей заряда в окрестности контакта. Их используют в качестве граничных условий при решении диффузионных уравнений в p- и n-областях. С помощью полученных решений вычисляют силу тока I. В результате находят вольт-амперную характеристику p—n-перехода $I(U)$.

Таким образом, теория неограниченного p—n-перехода не позволяет найти распределение по всей длине такого перехода основных физических величин: концентраций дырок $p(x)$ и электронов $n(x)$, напряженности поля $E(x)$ и плотности заряда $\rho(x)$. А без этих распределений невозможно дать точное определение области пространственного заряда (ОПЗ) и вычислить толщину ОПЗ, накопленный в ней заряд, максимальную напряженность поля внутри ОПЗ, удельное сопротивление ОПЗ. Изучение этих распределений имеет теоретическое и практическое значение для современного периода развития полупроводниковой электроники (особенно микроэлектроники), широко применяющей разнообразные комбинации p—n-переходов и использующей особенности и вариации конфигурации ОПЗ, а также особенности физических свойств этой области.

На первый взгляд может показаться, что выяснение перечисленных вопросов не вызывает принципиальных трудностей: достаточно решить уравнения непрерывности для дырок и электронов совместно с уравнением Пуассона при соответствующих граничных условиях, чтобы получить нужные распределения. Однако в действительности на этом пути имеются серьезные препятствия, связанные с необычным характером задания дополнительных условий, обеспечивающих единственность решения. Именно это обстоятельство заставляет отнести задачу о безграничном p—n-переходе к классу нестандартных задач математической физики со всеми вытекающими отсюда техническими и принципиальными затруднениями. Имеющиеся исследования p—n-переходов [2—5] касаются в основном тонких переходов и не могут быть использованы в рассматриваемом случае.

Изложим новый метод построения теории безграничного p—n-перехода. Сначала устраняется недостаток стандартных одномерных уравнений непрерывности, применяемых в теории полупроводниковых приборов. Они не удовлетворяют естественному требованию — суммарная плотность тока не должна зависеть от пространственной координаты x. В результате получаем новое уравнение непрерывности с нелинейным релаксационным членом. Затем исследуется общее решение линеаризованных дифференциальных уравнений (ДУ), которыми описывается p—n-переход вдали от ОПЗ. На основе этого исследования формулируются условия единственности решения нелинейной системы ДУ, описывающего весь p—n-переход, включая ОПЗ. Метод решения соответствующей системы нелинейных ДУ с полученными дополнительными ограничениями строится с помощью двумерных рядов экспонент (рядов Дирихле). Приведены результаты численных экспериментов на ЭВМ.

1. Рассмотрим одномерную симметричную неограниченную модель резкого p—n-перехода, находящуюся в статическом состоянии. В силу симметрии модели будем изучать лишь p-область. Ось пространственной переменной x направим от p- к n-области, полагая $x=0$ в месте контакта p- и n-полупроводников. Стандартная система ДУ, описывающая процессы в p-области, имеет вид [1, с. 56, 62]

$$-\frac{p-p_p}{\tau}-\frac{1}{q}\frac{d}{dx}j_p=0; \tag{1}$$

$$-\frac{n-n_p}{\tau}+\frac{1}{q}\frac{d}{dx}j_n=0; \tag{2}$$

$$\frac{dE}{dx}=\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{3}$$

где ρ — плотность заряда, $\rho=q\,[(p-p_p)-(n-n_p)]$; (4)

q — элементарный заряд; τ — постоянная релаксации; ε — диэлектрическая проницаемость; ε_0 — диэлектрическая постоянная; E — напряженность электрического поля; j_p, j_n — плотности дырочного и электронного токов. При $x \to -\infty$ концентрации $p \to p_p$, $n \to n_p$.

Система (1)—(3), строго говоря, некорректна, так как она не удовлетворяет требованию независимости от x суммарной плотности тока $j(x) = j_p(x) + j_n(x)$, поскольку из (1) — (4) получаем

$$\frac{d}{dx} j(x) = -\frac{q}{\tau}[(p - p_p) - (n - n_p)] = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\tau}\frac{dE}{dx}.$$

Отсюда $j(x) = E(x) + \text{const} \neq \text{const}$. Далее выводятся новые уравнения непрерывности вместо (1), (2), для которых $j(x) \equiv \equiv \text{const}$.

2. Проанализируем уравнения непрерывности. Рассмотрим три случая: собственный полупроводник без тока; примесный полупроводник без тока; примесный полупроводник с током, пренебрегая каждый раз генерацией свободных носителей заряда под действием всех внешних факторов, кроме температуры.

В собственном полупроводнике все время происходит генерация и рекомбинация электронно-дырочных пар. При малой концентрации свободных носителей заряда (p_i, $n_i \ll 10^{24}$ см$^{-3}$) скорость генерации, определяемая концентрацией неионизированных атомов в кристалле (порядка 10^{24} см$^{-3}$) и температурой, постоянна:

$$v_{\text{ген},p} = v_{\text{ген},n} = v_\text{г} = \text{const}. \tag{5}$$

С другой стороны, скорость рекомбинаций пропорциональна малой концентрации свободных носителей заряда (дырок и электронов):

$$v_{\text{рек},p} = v_{\text{рек},n} = -r p_i n_i, \tag{6}$$

где r — неизвестный пока коэффициент пропорциональности. С помощью (5), (6) записываем очевидные релаксационные уравнения для дырок и электронов

$$\frac{dp}{dt} = v_{\text{ген},p} + v_{\text{рек},p} = v_\text{г} - r p_i n_i; \tag{7}$$

$$\frac{dn}{dt} = v_{\text{ген},n} + v_{\text{рек},n} = v_\text{г} - r p_i n_i.$$

Так как в собственном полупроводнике $p_i = n_i$, система (7) сводится к одному нелинейному ДУ:

$$\frac{dp_i}{dt} = v_\text{г} - r p_i^2, \tag{8}$$

точкой равновесия которого является

$$p_{i0}=\sqrt{\frac{v_г}{r}}. \tag{9}$$

Линеаризация ДУ (8) в окрестности точки p_{i0} дает линейное ДУ:

$$\frac{d}{dt}\Delta p_i+\frac{1}{\tau_i}\Delta p_i=0, \tag{10}$$

где постоянная релаксация (или время жизни носителей заряда)

$$\tau_i=1/2p_{i0}r \tag{11}$$

Формулы (9), (11) позволяют найти константы $v_г$, r по результатам измерения равновесной концентрации p_{i0} и времени жизни τ_i:

$$v_г=p_{i0}/2\tau_i;\ r=1/p_{i0}2\tau_i. \tag{12}$$

Рассмотрим примесный полупроводник без тока. Если предположить, что концентрации свободных носителей заряда p, $n\ll 10^{24}$ см$^{-3}$, то константы $v_г$; r будут иметь те же постоянные значения (12), а релаксационные процессы описываться системой

$$\frac{dp}{dt}=v_г-rpn,\quad \frac{dn}{dt}=v_г-rpn, \tag{13}$$

аналогичной (7). Однако в (13) в отличие от (7) $p\neq n$. Далее показывается, что система (13), так же как и (7), сводится к одному ДУ.

Система (13) имеет бесконечное количество точек равновесия, описываемых уравнением гиперболы: $v_г-rp_0n_0=0$ (14) на фазовой плоскости pOn. Каждой из этих точек равновесия соответствует своя концентрация примесей. Действительно, в равновесном состоянии и при отсутствии токов в силу локальной электронейтральности полупроводника имеем $p_0=n_0+N$ (15),

где

$$N=\begin{cases} N_а & \text{для анцепторного полупроводника;}\\ 0 & \text{для собственного полупроводника;}\\ -N_д & \text{для донорного полупроводника.}\end{cases}$$

Система алгебраических уравнений (14), (15) однозначно определяет координаты точки равновесия через концентрацию примесей N:

$$p_0=+\frac{N}{2}+\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2+\frac{v_г}{r}},\quad n_0=-\frac{N}{2}+\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2+\frac{v_г}{r}}. \tag{16}$$

Согласно (9) $p_{i0}^2=v_г/r$, поэтому с учетом неравенства $N\gg p_{i0}$, справедливого для примесных полупроводников, из (16) получаем хорошо известные приближенные равенства [1, с. 41]: для акцепторных полупроводников

$$p_0 \cong N_а, \ n_0 = p_{i0}^2 / N_а;$$

для донорных полупроводников

$$n_0 \cong N_д, \quad p_0 = p_{i0}^2 / N_д.$$

В соответствии с уравнениями (13) во время протекания релаксационного процесса изображающая точка на фазовой плоскости pOn перемещается по прямой линии $p=n+C$, которая проходит через некоторую точку равновесия (p_0, n_0). В этой точке имеем $C=p_0-n_0=N$. Используя равенство $p=n+N$, сводим систему (13) к одному ДУ: $\frac{dp}{dt}=v_г - rp(p-N)$. Линеаризация этого уравнения дает (10) с постоянной релаксации

$$\tau = \frac{1}{r(2p_0 - N)} = \frac{1}{2r\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + p_{i0}^2}} \cong \frac{1}{r|N|} \tag{17}$$

(предполагается, что $N \gg p_{i0}$). Из этой формулы следует, что время жизни носителей заряда значительно меньше времени жизни для собственного полупроводника и не зависит от типа примесного полупроводника.

Рассмотрим примесный полупроводник с током. Если в нем существуют дырочный и электронный токи, при выводе уравнений непрерывности [1, с. 62] к релаксационным составляющим скорости изменения концентрации носителей заряда добавляются составляющие, обусловленные соответствующими токами: $-\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x} j_p$ для дырок и $\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x} j_n$ для электронов. В результате уравнения непрерывности принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = v_г - rpn - \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x} j_p;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_г - rpn + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x} j_n. \tag{18}$$

В статическом случае имеем

$$0 = v_г - rpn - \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x} j_p; \quad 0 = v_г - rpn + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x} j_n,$$

откуда $\quad \frac{\partial}{\partial x} j = \frac{\partial}{\partial x} j_p + \frac{\partial}{\partial x} j_n = 0, \quad$ или $j(x) = \text{const}.$

Преобразуем релаксационный член

$$v_r - rpn = \frac{p_{i0}}{2\tau_i} - \frac{pn}{p_{i0}2\tau_i} = -\left(\frac{p}{p_p}n - n_p\right)\frac{1}{\tau'},$$

где $\tau' = 1/rp_p$ (19). Поскольку согласно (17), (19), (16) отношение констант $\frac{\tau}{\tau'} \cong 1 - \frac{p_{i0}^2}{N^2} \cong 1$ с высокой степенью точности, в дальнейшем (считаем $\tau = \tau'$ (см. (17)). Теперь учтем выражения для плотностей токов [1, с. 61, 62]:

$$j_p = q\left(p\mu_p E - D_p\frac{\partial p}{\partial x}\right); \quad j_n = q\left(n\mu_n E + D_n\frac{\partial n}{\partial x}\right) \tag{20}$$

и запишем уравнения непрерывности (18) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\hat{p}n - n_p}{\tau} + D_p\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p\frac{\partial p}{\partial x}E - \mu_p p\frac{\partial E}{\partial x}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\hat{p}n - n_p}{\tau} + D_n\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n\frac{\partial n}{\partial x}E + \mu_n n\frac{\partial E}{\partial x}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\hat{p} = p/p_p$; μ_p и D_p; μ_n и D_n — подвижности и коэффициенты диффузии дырок и электронов соответственно. Эти уравнения будем использовать в качестве уравнений непрерывности для p-области p—n-перехода. В отличие от стандартных уравнений непрерывности для полупроводников уравнения (21) нелинейны в релаксационном члене.

3. Рассмотрим нелинейные ДУ для p-области, проанализировав дополнительные условия. В силу симметрии p—n-перехода будем рассматривать только p-область, процессы в которой описываются уравнениями (21), где $D_p = D_n = D$; $\mu_p = \mu_n = \mu$, а также уравнением Пуассона (3). Отмечая все размерные переменные штрихом, запишем полную систему уравнений для статического случая в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2p'}{dx'^2} &= \frac{-n_p + p'n'/p_p}{L^2} + \frac{1}{\varphi}p'\frac{dE'}{dx'} + \frac{1}{\varphi}\frac{dp'}{dx'}E'; \\ \frac{d^2n'}{dx'^2} &= \frac{-n_p + p'n'/p_p}{L^2} - \frac{1}{\varphi}n'\frac{dE'}{dx'} - \frac{1}{\varphi}\frac{dn'}{dx'}E'; \\ \frac{dE'}{dx'} &= \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}[(p' - p_p) - (n' - n_p)] = \frac{\rho'}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $L^2 = D\tau$; $\varphi = D/\mu$. Если ввести дополнительные неизвестные функции $z_p' = \frac{dp'}{dx'}$, $z_n' = \frac{dn'}{dx'}$, то система ДУ (22) сведется к системе из пяти ДУ первого порядка, которая при использовании безразмерных величин (без штрихов), определяемых формулами преобразования:

$$x' = L\sqrt{a}x;\ p' = p_p\tilde{p};\ n' = n_p\left\{1 + [(\tilde{p} - 1) - \rho]\frac{1}{b}\right\};$$

$$z_p' = \frac{p_p z_p}{L\sqrt{a}};$$

$$z_n' = \frac{p_p(z_p - z)}{L\sqrt{a}};\quad E' = \frac{\varphi\tilde{E}}{L\sqrt{a}};\quad \rho' = qp_p\rho,\qquad a = \frac{\varphi\varepsilon\varepsilon_0}{L^2p_pq},$$

$$b = \frac{n_p^*}{p_p}, \tag{23}$$

примет вид

$$\frac{dz_p}{dx} = a(\tilde{p} - 1)(\tilde{p} - b) + \tilde{p}\rho(1 - a) + z_p\tilde{E};\quad \frac{dp}{dx} = z_p; \tag{24}$$

$$\frac{dz}{dx} = (2\tilde{p} - 1 + b - \rho)\rho + (2z_p - z)\tilde{E};\quad \frac{d\rho}{dx} = z;\quad \frac{d\tilde{E}}{dx} = \rho.$$

Эта система ДУ в пятимерном фазовом пространстве R^5 имеет бесконечное множество особых точек, составляющих линию:

$$\Gamma: z_p = 0,\ \tilde{p} = 1,\ z = 0,\ \rho = 0,\ \forall\tilde{E}\in R. \tag{25}$$

Рассмотрим произвольную особую точку из Г. Она определяется значением координаты $\tilde{E}$, которое обозначим через E_1. Каждая фазовая траектория, проходящая через эту точку, может стремиться к ней при $x \to +\infty$ либо при $x \to -\infty$. Далее покажем, что такие траектории существуют и составляют два однопараметрических семейства. Каждое из этих семейств определяет двумерное интегральное многообразие. Обозначим через ИМ (ИМ') интегральное многообразие, на котором лежат фазовые траектории, проходящие через особую точку при $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$). Каждая из траекторий, лежащих на ИМ, описывает некоторое распределение величин z_p, p, z, ρ, E в p-области, где координата x отрицательна. При этом значения указанных величин в особой точке соответствуют равновесным значениям в области, бесконечно удаленной от контакта. В этой об-

---

* Константы $a = 10^{-9}$, $\tilde{b} = 10^{-12}$ при $p_p = 10^{17}$ см$^{-3}$, $n_p = 10^5$ см$^{-3}$, $L = 400$ мкм, $\varphi = 25$ мВ, $\varepsilon = 12$.

ласти между суммарной плотностью тока $j(-\infty)$ и напряженностью поля $\tilde{E}=E_1$ существует однозначная связь, которую получаем, подставляя в выражение для суммарной плотности тока (см. (20), (23)):

$$j(x)=j_p(x)+j_n(x)=q\left\{\mu p'E'-D\frac{\partial p'}{\partial x'}+\mu n'\ '+\right.$$

$$\left.+D\frac{\partial n'}{\partial x'}\right\}=\frac{q\mu p_p\varphi}{L\sqrt{a}}\left[(2\tilde{p}+b-1-\rho)\tilde{E}-z\right] \qquad (26)$$

значения (25)

$$j(-\infty)=\frac{q\mu p_p\varphi}{L\sqrt{a}}(1+b)E_1. \qquad (27)$$

Таким образом, каждая особая точка однозначно определяется суммарной плотностью тока $j(x)=\text{const}$, протекающего через p—n-переход.

Заметим, что в силу предположения о симметрии p—n-перехода в месте контакта p- и n-областей должно выполняться равенство концентраций $p'=n'$ и их производных $z_p'=-z_n'$. В безразмерных величинах эти равенства принимают вид

$$\rho(0)=-1+b,\ z(0)=2z_p. \qquad (28)$$

Условия (26) позволяют выделить из семейства фазовых траекторий, лежащих на ИМ, единственную траекторию, которая описывает равновесное состояние p—n-перехода.

Приведенное качественное описание особенностей потока фазовых траекторий показывает, что целесообразно сделать еще одну замену переменных, введя вместо $\tilde{p}$, $\tilde{E}$ их отклонения $p=\tilde{p}-1$, $E=\tilde{E}-E_1$ от равновесных значений $\tilde{p}=1$, $\tilde{E}=E_1$. Это позволяет записать систему (24) в стандартной форме

$$\frac{dz_p}{dx}=E_1z_p+a(1+b)+(1-a)\rho+[ap^2+(1-a)p\rho+z_pE];$$

$$\frac{dp}{dx}=z_p; \qquad (29)$$

$$\frac{dz}{dx}=2E_1z_p-E_1z+(1+b)\rho+[(2p-\rho)\rho+(2z_p-z)E];$$

$$\frac{d\rho}{dx}=z;\quad \frac{dE}{dx}=\rho$$

или

$$\frac{dy}{dx}=Ay+(Ty,y), \qquad (30)$$

где

$$y=\begin{bmatrix} z_p \\ p \\ z \\ \rho \\ E \end{bmatrix}; \quad A=\begin{bmatrix} E_1 & a(1+b) & 0 & 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 2E_1 & 0 & -E_1 & 1 & +a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix},$$

а компоненты тензора T имеют значения

$$t^2_{rs}=0,\ t^4_{rs}=0,\ t^5_{rs}=0 \quad \text{при } \forall r,\ s=1,2,3,4,5;$$

$$t^1_{22}=a,\ t^1_{24}=1-a,\ t^1_{15}=1, \text{ остальные } t^1_{rs}=0; \tag{31}$$

$$t^3_{24}=2,\ t^3_{44}=-1,\ t^3_{15}=2,\ t^3_{35}=-1, \text{ остальные } t^3_{rs}=0.$$

Отметим, что условие постоянства суммарного тока $j_p+j_n=$ $=\text{const}$ равносильно существованию у системы (27) интеграла движения, который с учетом (26), (27) имеет вид

$$H(p,z,\rho,E)=(1+b+2p-\rho)(E_1+E)-z=(1+b)E_1. \tag{32}$$

При фиксированной константе E_1 уравнение (32) описывает в фазовом пространстве R^5 гиперповерхность H, в которую погружено интегральное многообразие ИМ.

Список литературы: 1. *Степаненко И. П.* Основы микроэлектроники. М., 1980. 423 с. 2. *Авакьянс Г. И.* О свойствах p—n-перехода при очень больших токах//Радиотехника и электроника. 1964. **10**. С. 1898—1899. 3. *Васильева А. Б., Кардо-Сысоев А. Ф., Стельмах В. Г.* Пограничный слой в теории p—n-перехода//Физика и техника полупроводников. 1976. **10**. Вып. 7. С. 1321—1329. 4. *Васильева А. Б., Стельмах В. Г.* Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. **17**. № 2. С. 339—348. 5. *Гудков В. В., Клоков Ю. А.* Двухточечная краевая задача для одной системы третьего порядка//Дифференц. уравнения. 1982. **18**. № 4. С. 576—580.

Поступила в редколлегию 25.07.85.

УДК 537.312

Ю. Е. ГОРДИЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
Ю. И. ГУД, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СВЧ РЕЗОНАТОРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРОВ ПЛЕНОК НА НИЗКООМНЫХ ПОДЛОЖКАХ

Для получения объективной информации об электрофизических параметрах полупроводниковых материалов успешно применяются СВЧ измерительные средства [1]. Наиболее перспективными при измерении толщины и электропроводности полу-