

Н. Г. ЗУЕВ, канд. физ.-мат. наук, В. С. ЧУМАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
С. В. ЧУМАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ. II

В первой части нашей статьи [1] были решены задачи о распространении электромагнитных волн в периодических цилиндрических структурах с дисками конечной толщины. В этой части рассматриваются цилиндрические периодические структуры с тонкими дисками (теоретически – с бесконечно тонкими) как закрытого (рис. 1, а, б, в), так и открытого типов (рис. 1, г, д). Исследуются осесимметричные ($\partial/\partial\phi = 0$) поля электрического типа ($H_z = 0$).

Компоненты электромагнитных полей рассматриваемых структур определяются по формулам:

$$H_\phi(r, z) = -\frac{\partial A_z(r, z)}{\partial r}, \quad (1)$$

$$E_r(r, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial^2 A_z(r, z)}{\partial r \partial z}, \quad (2)$$

$$E_z(r, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \left(k^2 A_z(r, z) + \frac{\partial^2 A_z(r, z)}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

где $A_z(r, z)$ – составляющая векторного потенциала, с помощью которого определяются искомые электромагнитные поля. Для диафрагмированного волновода (рис. 1, а) компоненты векторного потенциала для двух областей запишутся как

$$A_z^I(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m^I(z) \frac{Z_0^I(\tau_m^I r)}{Z_0^I(\tau_m^I a)}, \quad (4)$$

$$A_z^{II}(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n T_n^{II}(z) \frac{Z_0^{II}(\tau_n^{II} r)}{Z_0^{II}(\tau_n^{II} a)}. \quad (5)$$

В (4) и (5) обозначено:

$$T_m^I(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2L}} \cos \frac{n\pi}{2L} z, \quad (6)$$

$$T_n^{II}(z) = e^{i\beta_n z} / \sqrt{2L}, \quad (7)$$

$$\beta_n = \beta_0 + (n\pi/L). \quad (8)$$

Определяя с помощью формул (1, 3-5) составляющие электромагнитного поля и приравнивая их на границе раздела областей при $r = a$, получим систему функциональных уравнений, решая которую, получим бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_m и B_n :

$$A_m \tau_m^I \frac{Z_0^{I'}(\tau_m^I a)}{Z_0^I(\tau_m^I a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{mn} \tau_n^{II} \frac{Z_0^{II'}(\tau_n^{II} a)}{Z_0^{II}(\tau_n^{II} a)} B_n \exp[i(\beta_0 L + n\pi/2)], \quad (9)$$

$$A_m (\tau_m^I)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{mn} (\tau_n^{II})^2 B_n \exp[i(\beta_0 L + n\pi/2)], \quad (10)$$

где $V_{mn} = -\frac{\sqrt{\epsilon_m} 2L 2\beta_n L}{(m\pi/2)^2 - (\beta_n L)^2} \sin[\beta_0 L + (m\pi/2)].$

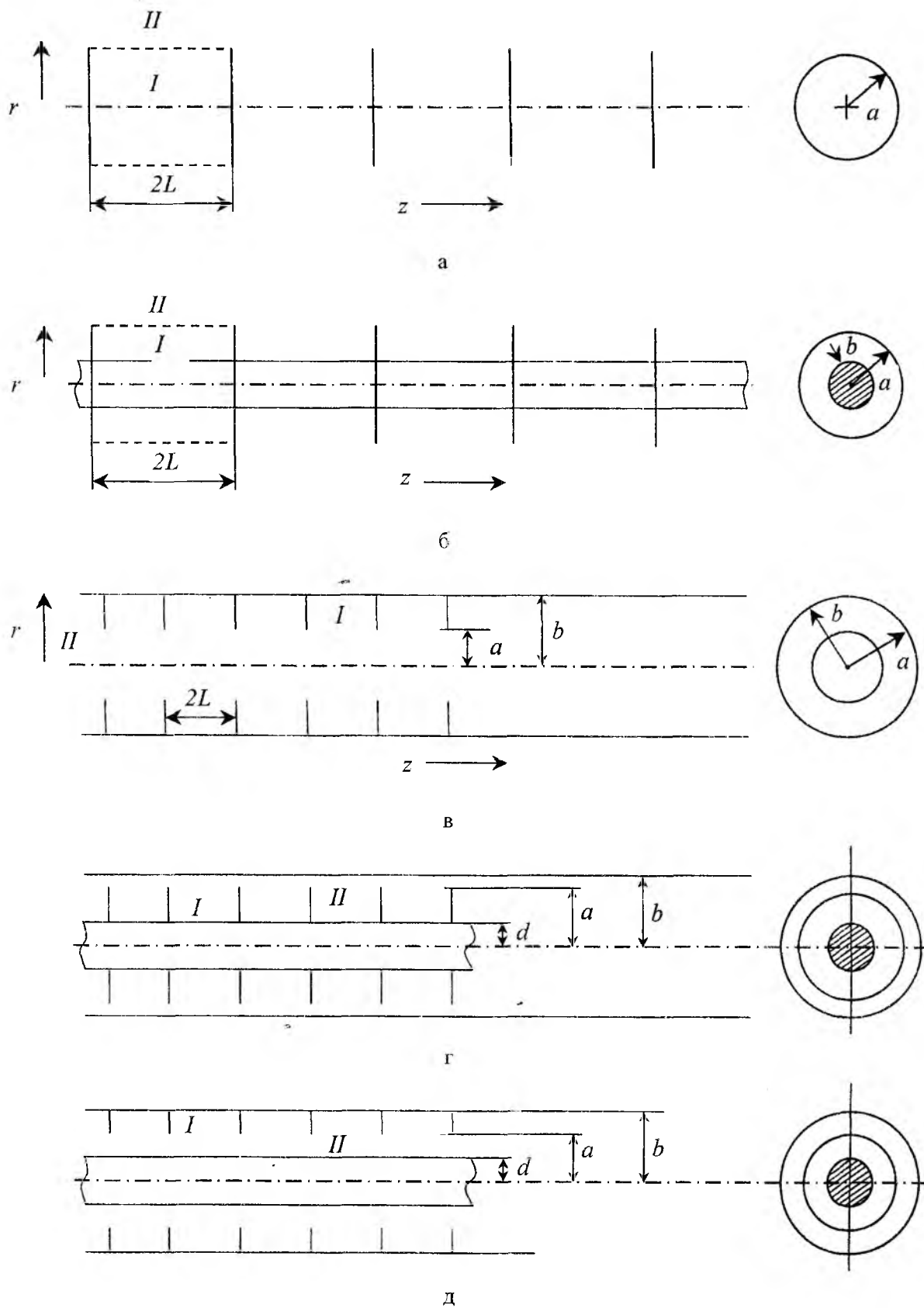


Рис.1

Условием существования и единственности решения системы (9),(10) является равенство нулю ее определителя:

$$\det \left\{ V_{mn} \left[\frac{\tau_n^{II} a Z_0^I(\tau_m^I a) Z_0^{II'}(\tau_n^{II} a)}{\tau_m^I a Z_0^I(\tau_m^I a) Z_0^{II}(\tau_n^{II} a)} - \left(\frac{\tau_n^{II} a}{\tau_m^I a} \right)^2 \right] \right\} = 0, \quad (11)$$

$m = 0, 1, 2, \dots; n = \dots - 1, 0, +1, \dots$

Из (11) при заданных геометрических размерах и частоте электромагнитного поля находится искомая постоянная распространения β_0 .

Уравнение (11) имеет место и для структур, изображенных на рис. 1, б, д, с той разницей, что для открытого волновода (рис. 1, г)

$$Z_0^I(\tau_m^I r) = I_0(\tau_m^I r), \quad Z_0^{II}(\tau_n^{II} r) = K_0(\tau_n^{II} r), \quad (12)$$

$$\tau_m^I = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{2L} \right)^2 - k^2}, \quad \tau_n^{II} = \sqrt{\beta_n^2 - k^2}, \quad (13)$$

а для открытого волновода (рис. 1, д)

$$Z_0^{II}(\tau_n^{II} r) = K_0(\tau_n^{II} r), \quad (14)$$

$$Z_0^I(\tau_m^I r) = K_0(\tau_m^I b) I_0(\tau_m^I r) - I_0(\tau_m^I b) K_0(\tau_m^I r). \quad (15)$$

Выпишем дисперсионное уравнение для открытого волновода, изображенного на рис. 1, г:

$$\det \left\{ V_{mn} \left[\frac{\tau_n^{II} a Z_0^I(\tau_m^I a) K_0'(\tau_n^{II} a)}{i \tau_m^I a Z_0^I(\tau_m^I a) K_0(\tau_n^{II} a)} - \left(\frac{\tau_n^{II} a}{\tau_m^I a} \right)^2 \right] \right\} = 0, \quad (16)$$

$m = 0, 1, 2, \dots; n = \dots - 1, 0, +1, \dots$

Графическая зависимость безразмерной частоты ka от безразмерной постоянной распространения βa показана на рис. 2 для трех значений отношения радиуса к полурасстоянию между дисками:

$$a/L = 3,5; \quad a/L = 6,5; \quad a/L = 9,5.$$

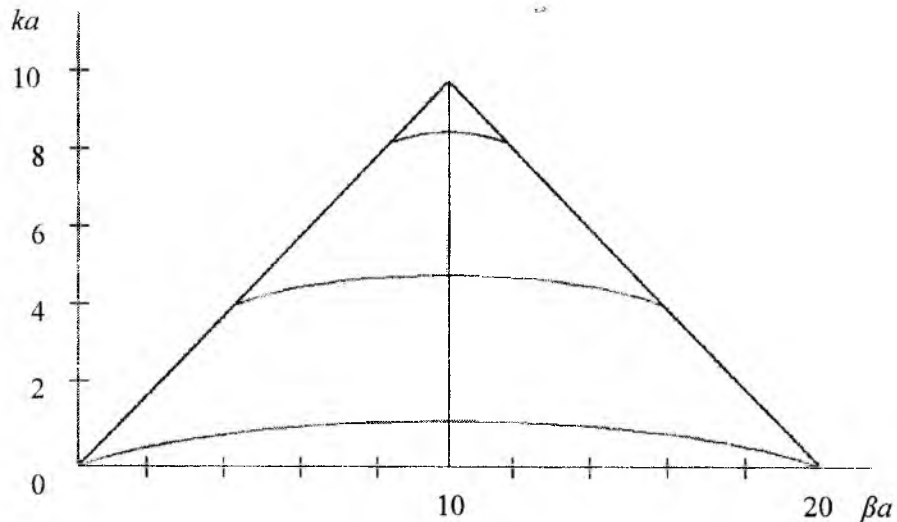


Рис. 2

Физический анализ дисперсионных свойств цилиндрических периодических волноводов (в частности, рассмотренных в [1]) может быть проведен двумя заметно отличающимися по трудоемкости способами. Во-первых, он может основываться на информации, которую можно получить численно-

ми методами путем отыскания корней сложных трансцендентных уравнений в виде определителей соответствующих систем линейных алгебраических уравнений достаточно высокого порядка. В общем виде такая алгебраическая система, а именно (11), приведена в [1]. Во-вторых, в случае узких щелей можно извлекать идентичную информацию из гораздо более простых по форме, но в высокой степени достоверных по существу дисперсионных уравнений в аналитической форме.

Физическая достоверность информации, содержащейся в полученных в явном виде дисперсионных уравнениях, объясняется тем обстоятельством, что в этих уравнениях учтено все бесконечное число пространственных гармоник поля в области распространения периодического волновода. Компактную аналитическую форму дисперсионное уравнение имеет благодаря тому, что бесконечные ряды, определяющие вклад высших пространственных гармоник, удается просуммировать и получить конечный результат в весьма простом виде.

Необходимо отметить, что полученные нами в аналитической форме дисперсионные уравнения существенным образом в идейном плане отличаются от известных в литературе аналогичных уравнений явного вида именно по способу их получения. В нашем случае дисперсионные уравнения получаются путем обращения в нуль просуммированного бесконечного определителя системы алгебраических уравнений. Во всех известных случаях дисперсионные уравнения были получены различными авторами [2-5] путем приравнивания нулю единственного элемента бесконечного определителя. В физическом отношении это означает, что в нашем случае дисперсионное уравнение описывает волны, распространяющиеся в периодическом волноводе (с волнами ТЕМ типа во внутренней области), а обращение в нуль единственного элемента бесконечного определителя физически адекватно замене исходной периодической структуры моделью регулярного волновода с анизотропной проводимостью стенок.

Дисперсионные характеристики периодических структур удобно представлять на так называемой диаграмме Бриллюэна. Хотя последнюю, можно считать достаточно хорошо известной специалистам, занимающимся исследованиями периодических структур, по-видимому, следует вкратце остановиться на ее описании. Применительно к нашим случаям диаграмма Бриллюэна представляет собой изображение дисперсионных свойств цилиндрических периодических волноводов в системе координат (x, xa) , где x – ось ординат, а xa – ось абсцисс. Поскольку xa представимо в виде

$xa = n_0 + v$, где n_0 – ближайшее к xa целое число и $|v| < \frac{1}{2}$, а исходное дисперсионное уравнение

в виде бесконечного определителя инвариантно относительно замены нумерации столбцов (например, n на $n' = n_0 + n$), что в практических целях удобно использовать систему координат (x, v, n_0) , где n_0 играет роль параметра для построения диаграммы Бриллюэна. Тогда в системе координат

(x, xa) области $0 \leq x \leq \infty, -\frac{1}{2} \leq xa < \frac{1}{2}$ будет соответствовать $(x, v; 0)$; области

$0 \leq x < \infty, \frac{1}{2} \leq xa < \frac{3}{2} - (x, v, 1)$; области $0 \leq x < \infty, -\frac{3}{2} \leq xa < -\frac{1}{2} - (x, v, -1)$ и т.д. Причем из вида [1]

исходных дисперсионных уравнений следует, что дисперсионные кривые на диаграмме Бриллюэна не зависят от параметра n_0 . Физически это означает, что при выбранной в самом начале (при постановке задачи) нумерации пространственных гармоник в ряде Фурье для области распространения волн с изменением n_0 изменяется номер так называемой основной гармоники поля. Под основной гармоникой (волной) принято подразумевать ту, которая имеет наибольшую по абсолютному значению фазовую скорость вдоль волновода. Например, при $n_0 = 0$ основной пространственной гармоникой является та, которая имеет индекс $n = 0$, при $n_0 = 1$ – имеющая индекс $n = -1$, при $n_0 = -1$ – с индексом $n = +1$ и т.д.

На диаграмме Бриллюэна с координатами (x, xa) лучи $x = \pm(xa - n_0)$, где $n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ соответствуют распространению вдоль волновода основной пространственной гармоники со скоростью света. Части дисперсионных кривых, лежащих в области $x > |xa - n_0|$, соответствуют случаю, когда пространственная гармоника с индексом $n = -n_0$ принадлежит к типу волноводных волн, описываемых функциями Бесселя с вещественным аргументом (режим быстрых волн). Те участки

дисперсионных кривых, которые помещаются в области $x < |x_0 - n_0|$, соответствуют существованию пространственной гармоники с индексом $n = -n_0$ в виде поверхностной волны, описываемой модифицированными функциями Бесселя и функциями Макдональда с вещественными аргументами, – режим медленных волн.

В дальнейшем нами будет использована система координат (x, ν) для построения диаграммы Бриллюэна, причем полагается $n_0 = 0$. Построение этой диаграммы в системе координат (x, x_0) , как видно из предыдущего, не встречает каких-либо затруднений и сводится формально к последовательному наложению диаграмм, полученных для $(x, \nu; 0)$. Итак, далее в работе будет идти речь о диаграмме Брюллиэна в системе координат (x, ν) , а значение параметра n_0 опускается.

Лучи $x = \pm \nu$ на применяемой нами диаграмме разделяют два качественно отличающихся состояния основной пространственной гармоники поля, а именно – принадлежность ее к волноводному типу при $x > |\nu|$ и к поверхностному типу при $x < \nu$. Точки пересечения дисперсионной кривой с этими лучами соответствуют особому “пороговому” состоянию волны, когда при изменении параметра частоты x на сколь угодно малую величину $\Delta x > 0$ основная волна становится медленной (т.е. имеет фазовую скорость $V_\phi < c$), а при изменении x на произвольную малую величину $\Delta x < 0$ она существует в виде быстрой волноводной волны с $V_\phi > c$. Пороговые значения параметра x (будем обозначать их далее x_n) определяют нижние границы полос пропускания волновода для медленных волн и верхние значения полос пропускания для быстрых волн, способных распространяться вдоль периодической структуры.

Режимы медленных и быстрых волн в различных волноводах изучались в отдельности с той или иной степенью точности, зависящей от применяемого метода решения задачи. Исследования порогового состояния затруднялись тем, что необходимо было иметь возможно более точную исходную информацию о поле в периодическом волноводе, которую можно получить только с помощью надлежащей методики решения краевой задачи. Применяемая нами методика в отличие от других позволяет приступить к детальному изучению данного состояния.

Существенной особенностью порогового состояния является то, что в этом случае основная пространственная гармоника распространяется вдоль периодического волновода со скоростью света (поскольку $\nu = x$); следовательно, продольное волновое число для нее равно k , а радиальное число p_0 равно нулю. Воспользовавшись асимптотическими выражениями для цилиндрических функций $I_0(z)$, $N_0(z)$ и их производных при малых значениях аргументов, получим из дисперсионных уравнений для рассмотренных волноводов следующие простые уравнения для отыскания пороговых значений $x = x_n$ в каждом из рассмотренных случаев [1]:

$$I_0\left(x_n \pi \frac{c}{l}\right) N_0\left(x_n \pi \frac{a}{l}\right) - I_0\left(x_n \pi \frac{a}{l}\right) N_0\left(x_n \pi \frac{c}{l}\right) = 0, \quad (17)$$

$$I_0\left(x \pi \frac{a}{l}\right) = 0. \quad (18)$$

Пороговые значения параметра x определяются из этих уравнений при значениях $x < \frac{1}{2}$, для которых эти уравнения справедливы, и в первых трех случаях легко находятся с помощью таблиц. В самом деле,

$$x_n = \frac{l x_{os}(\tau)}{\pi c}, \quad \tau = \frac{a}{c}, \quad (19)$$

$$x_{ns} = \frac{j_{os}}{\pi a}. \quad (20)$$

Здесь j_{os} ($s = 1, 2, 3, \dots$) – нули функции Бесселя $I_0(x)$, (т.е. $I_0(j_{os}) = 0$); $x_{os}(\tau)$ – табулированные корни уравнения $I_0(x)N_0(\tau x) - I_0(\tau x)N_0(x) = 0$. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что пороговые значения параметра x (а, следовательно, и частоты, которая через x_n опре-

деляется по формуле $\omega_{ns} = \frac{\pi}{l} c x_{ns}$ для волноводов указанных типов зависят не от всех, а только от трех геометрических параметров. А именно, x_n зависит только от периода структуры и глубины щелей, определяемой радиусами a , c .

Найдем теперь выражение для электромагнитных полей, которые существуют в пороговом режиме в периодических волноводах, рассмотренных выше. Существенно, что амплитуды пространственных гармоник для этого случая определяются путем решения систем линейных алгебраических уравнений. Нас будет интересовать поле порогового режима в области распространения периодических волноводов. Для рассматриваемых волноводов в принятых на рис.1 обозначениях параметров a , b , c , смысл которых в каждом из случаев различный и легко усматривается из рисунка, аналитические выражения для компонент электромагнитного поля имеют одинаковый вид в области распространения:

$$E_z = 0,$$

$$E_r = H_\varphi = -\frac{iA}{\ln \frac{b}{a}} \Psi(x_n) \frac{e^{ikz}}{kr}, \quad \Psi(x_n) = \frac{\sin\left(\pi x_n \frac{d}{l}\right)}{\pi x_n \frac{d}{l}},$$

где A – константа, с точностью до которой определяется решение граничной задачи для системы однородных уравнений Максвелла.

Список литературы: 1. Зувев Н.Г., Пятак Н.И., Чумаченко В.С., Чумаченко С.В. Численно-аналитический и физический анализ распространения электромагнитных волн в цилиндрических периодических структурах. I // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып.117. С.100-103. 2. Вальднер О.А., Власов А.Д., Шальнов А.В. Ускоряющие волноводы. М.: Атомиздат, 1973. 216с. 3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. Радио, 1957. 582с. 4. Волтер К. Антенны бегущей волны. М.: Энергия, 1970. 448с. 4. Шестопалов В. П. Дифракционная электроника. Харьков: Выща шк., 1976. 232с.

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники
Харьковский научный физико-технологический центр НАНУ*

Поступила в редколлегию 10.07.2001