Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь у областях складної геометрії
(тема)

Виконав:
студент _2_ курсу, групи _САУм-18-1 _____
_____ Чернишов Б.С. _____
(прізвище, ініціали)
Спеціальність _____
_____124 Системний аналіз _____
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми _освітньо-професійна_____
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _____
_____Системний аналіз і управління____
(повна назва освітньої програми)
Керівник ___проф. Колосова С.В. _____
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____ ____Тевяшев А.Д._____
(підпис) (прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____
(підпис)
"_____" _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Чернишову Богдану Сергійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи (проекту) Застосування методу квазіфункцій Гріна до розв'язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь у областях складної геометрії
затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1601 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель задачі

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь в областях складної геометрії
2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту
5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз проблеми
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання _2_ вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи (проекту) _____ проф. Колосова С.В._____
(підпис) (посада, прізвище, ім'я, по батькові)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 86 с., 31 рис., 9 табл., 1 додаток, 12 джерел.

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ, НАБЛИЖЕНІ РОЗВ’ЯЗКИ, КРАЙОВІ УМОВИ, КООРДИНАТНІ ФУНКЦІЇ, НЕЛІНІЙНЕ ЕЛІПТИЧНЕ РІВНЯННЯ, МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА, КРАЙОВА ЗАДАЧА.

Об'єкт дослідження – крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометрії.

Мета роботи – вивчити можливість використання методу квазіфункцій Гріна для знаходження розв’язку крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометрії, дослідити вплив параметрів та вибраної області на результати, порівняти отримані результати з результатами, отриманими методом послідовних наближень.

Метод дослідження – метод квазіфункцій Гріна.

Атестаційна робота присвячена дослідженню можливості застосування методу послідовних наближень до розв’язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь. Було проведено обчислювальний експеримент для конкретної задачі та отримано наближений розв’язок, який порівнювався з розв’язком, отриманим у роботі Солодовника Андрія методом послідовних наближень. Програмна реалізація здійснювалася за допомогою математичного пакету «Mathematica 11.2».

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що метод квазіфункцій Гріна набув практичного застосування в плані використання його для розв’язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометрії, для яких важко побудувати функцію Гріна в аналітичному вигляді.

ABSTRACT

Introductory note: 86 pages, 31 figures, 9 tables, 1 appendix, 12 sources.

METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS, APPROXIMATE SOLUTIONS, BOUNDARY, COORDINATE FUNCTION, NONLINEAR ELLIPTIC EQUATION, BUBNOV-GALERKIN METHOD, QUASI-GREEN`S FUNCTION METHOD, BOUNDARY VALUE PROBLEM.

The object of the study is the boundary value problem for a nonlinear elliptic equation in the regions of complex geometry.

The purpose of work is to study the possibility of using the Green's quasifunctional method for finding a solution of the boundary value problem for a nonlinear elliptic equation in complex geometry regions, to investigate the influence of parameters and selected area on results, compare the obtained results with the results obtained by the method of successive approximations.

The method of research is the quasi-Green`s function method.

Attestation is devoted to explore the possibility of using the method of successive approximations to solving boundary value problems for nonlinear elliptic equations. Calculating experiment conducted for a specific task, was obtained approximate solution, which was compared with the solution obtained by the method of successive approximations in work made by Solodovnyk Andrii.

The scientific novelty of the obtained results is that the method of quasi-Green`s function method has become practical in terms of its use for solving the boundary value problem for a nonlinear elliptic equation.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія наближених методів розв’язку різних математичних задач стала на даний момент одним із важливих розділів функціонального аналізу. Ідеї функціонального аналізу не тільки дозволили істотно спростити погляд на багато чисельних методів, але й привели до розробки принципово нових обчислювальних схем в проблемах лінійної алгебри, диференційних та інтегральних рівнянь, нелінійного аналізу, тощо.

Велика кількість явищ в різних областях науки і техніки досить повно може бути описана за допомогою диференціальних рівнянь, однак точні розв’язки вдається отримати для досить вузького класу задач. У даній роботі розглядається застосування методу квазіфункцій Гріна до крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях геометрії.

Метою даної роботи є чисельний аналіз методу розв’язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях геометрії. Застосування методу квазіфункцій Гріна дозволяє отримати наближені розв’язки в аналітичному вигляді з заданою точністю у тих випадках, коли функція Гріна невідома або має складний характер. При проведенні обчислювальних експериментів з різними даними це може допомогти зацікавленим структурам робити прогнози щодо заданої задачі.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблем математичного моделювання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь в областях геометрії

1.1.1 Вербальна модель системи

Об’єкт аналізу – “Крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь в областях складної геометрії”.

Предмет аналізу – “Метод квазіфункцій Гріна”

Точка зору: дослідник.

Мета: отримання чисельних розв'язків крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь.

1.1.2 Морфологічна модель системи

Досліджувана система – система «Крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометрії».

Метафункція системи – вивчення можливості використання методу квазіфункцій Гріна для вирішення крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометрії.

Призначення цієї системи – розв’язок даної крайової задачі.

Морфологічний опис системи розглянутий в описі зовнішнього середовища, наведеного на рис. 1.1.

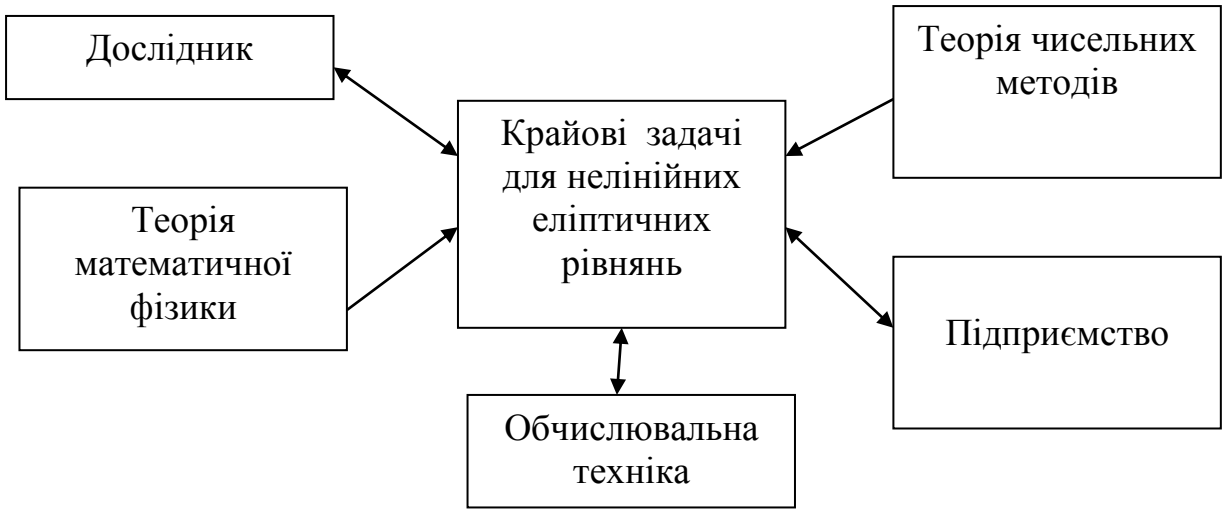

Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – сукупність факторів (умов і організацій), які надають впливу на роботу системи.

На рис. 1.2 представлена модель типу «чорний ящик».

Рисунок 1.2 – Модель типу «чорний ящик»

Модель типу «чорний ящик» відображає входи і виходи системи без надання інформації про внутрішні елементи та зв'язки системи. Така модель особливо корисна у випадку надання системи на макрорівні, коли важливим є провести аналіз зовнішніх зв'язків системи з іншими

системами. При складанні моделі типу «чорний ящик» важливо врахувати всі входи і виходи системи, що мають необхідне значення з точки зору призначення системи.

В моделі типу «білий ящик», рисунок 1.3, описаний «вміст системи», вказані взаємозв’язки між елементами системи.

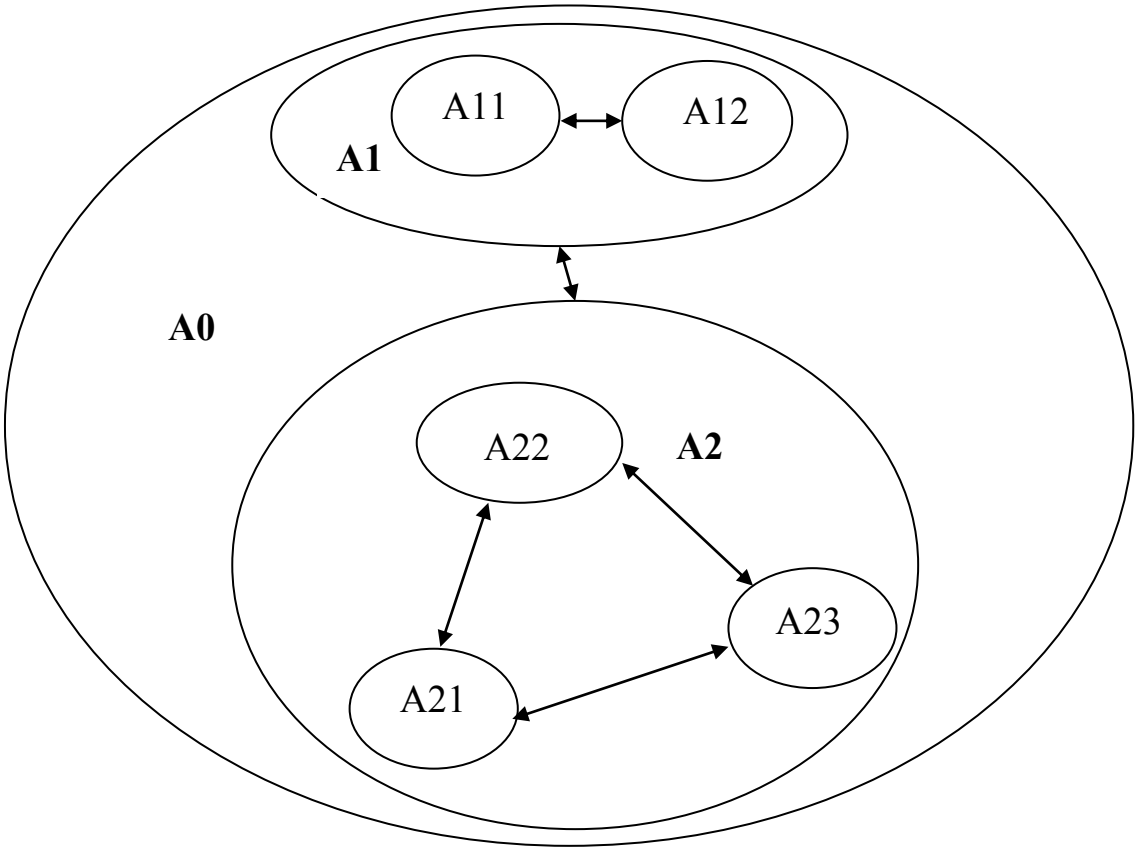

Рисунок 1.3 – Модель типу «білий ящик»

Дана система складається з двох підсистем – А1 і А2. А1 – керуюча система, яка складається з:

– А11 дослідник;

– А12 засоби керування.

А2 – система, якою керують, складається з:

– А21 математичний апарат;

– А22 програмне забезпечення;

– А23 апаратне забезпечення.

1.1.3 Функціональна модель системи

Контекстна діаграма моделює систему найбільш загальним чином. Зазвичай контекстна діаграма має зіркоподібну структуру. У центрі знаходиться головний процес, сполучений з джерелами і одержувачами інформації, яким відповідають зовнішні сутності. У загальному випадку кожен проект повинен мати тільки одну контекстну діаграму і її єдиний процес не нумерується. Однак для складної інформаційної системи обмежиться єдиною контекстної діаграмою важко, тому що вона буде містити дуже велику кількість зовнішніх сутностей, які буде складно розташувати на діаграмі.

Контекстна діаграма зображує функціонування системи в цілому (рис. 1.4). В IDEF0 система представляється як сукупність взаємодіючих робіт або функцій. Така чисто функціональна орієнтація є принциповою – функції системи аналізуються незалежно від об'єктів, якими вони оперують. Це дозволяє більш чітко змоделювати логіку і взаємодію процесів організації.

Під моделлю в IDEF0 розуміють опис системи (текстовий і графічний), який має дати відповідь на деякі заздалегідь певні питання.

Після опису системи в цілому проводиться розбиття її на великі фрагменти. Цей процес називається функціональною декомпозицією, а діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодію фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції (рис. 1.5).

Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні і так далі, до досягнення потрібного рівня детального опису (рис. 1.6).

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт діаграми вищого рівня.

IDEF3 – метод документування процесів системи, що використовується, наприклад, під час дослідження технологічних процесів на підприємствах. За допомогою IDEF3 описуються сценарій та послідовність операцій для кожного процесу. IDEF3 має прямий взаємозв'язок із методологією IDEF0 – кожна функція (функціональний блок) може бути подана у вигляді окремого процесу засобами IDEF3 (рис. 1.7 – 1.9).

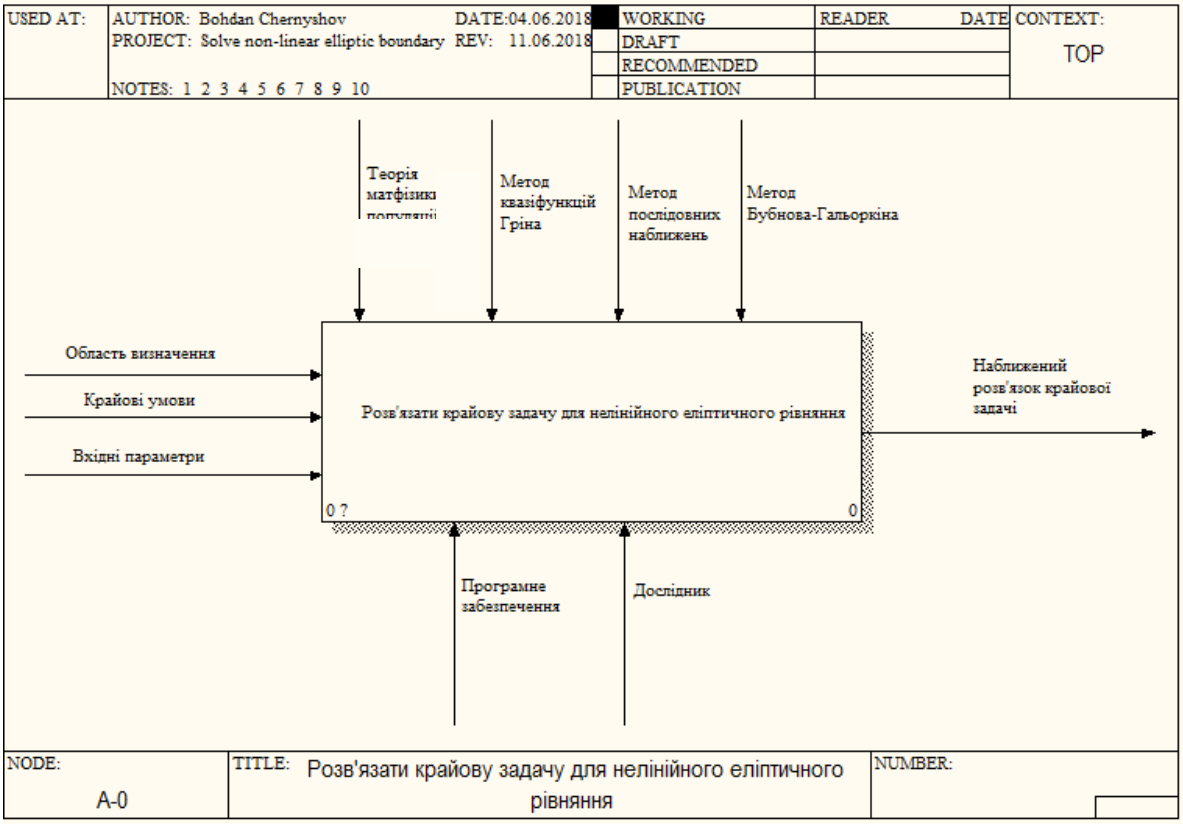

Рисунок 1.4 – Контекстна діаграма (рівень A-0)

1.1.4 Інформаційна модель системи

Інформаційні моделі відображають різні типи систем об'єктів, в яких реалізуються різні структури взаємодії і взаємозв'язку між елементами системи. Для відображення системи з різними структурами використовують різні типи інформаційних моделей: табличні, ієрархічні та мережні.

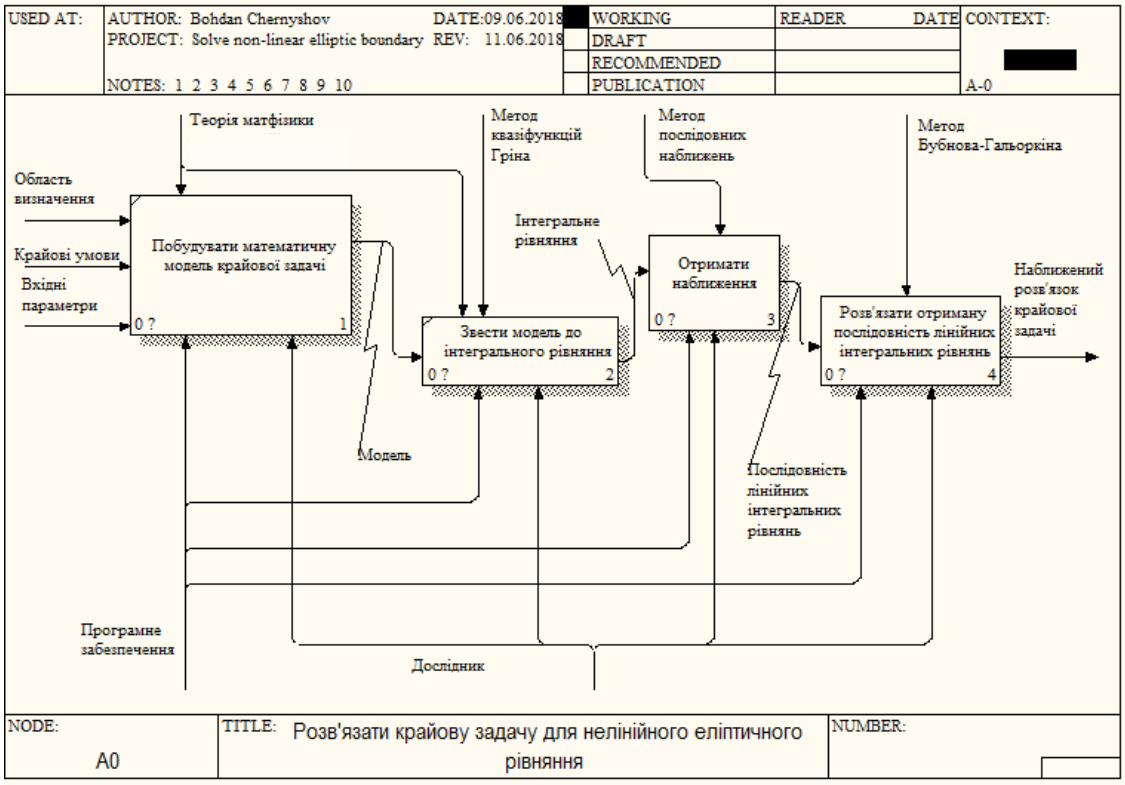

Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Розв’язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння»: рівень А0

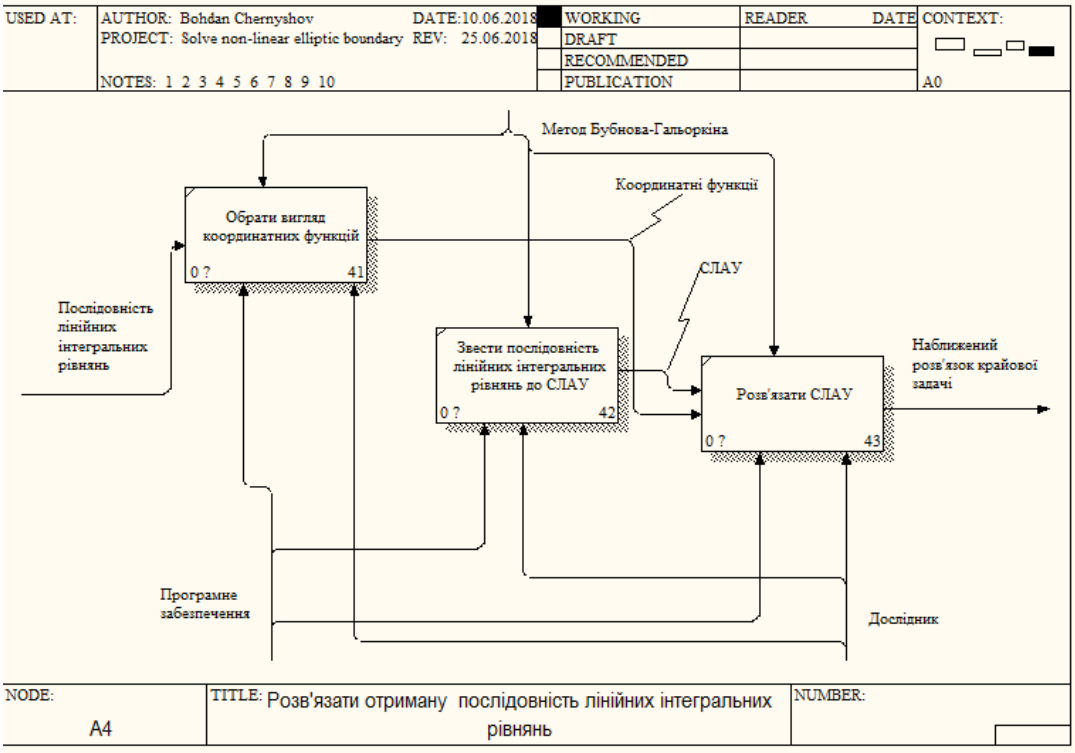

Рисунок 1.6 – Декомпозиція роботи «Розв’язати отриману послідовність лінійних інтегральних рівнянь»: рівень А4

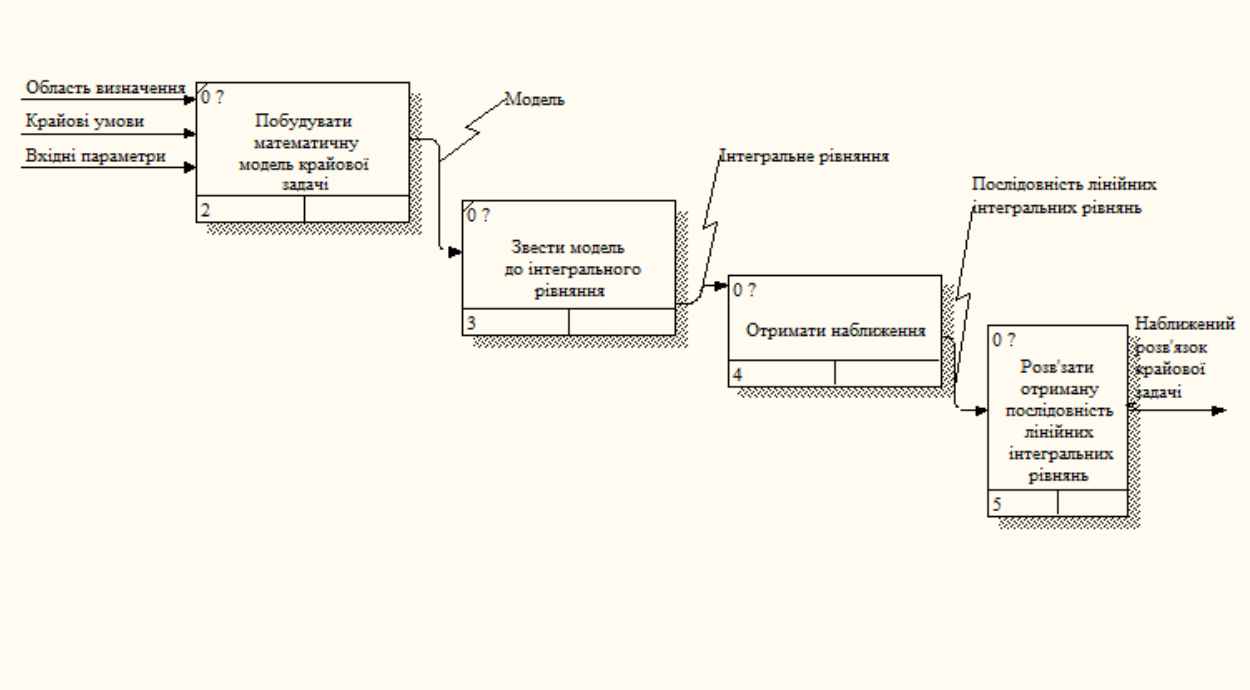

Рисунок 1.7 – Опис роботи «Розв’язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

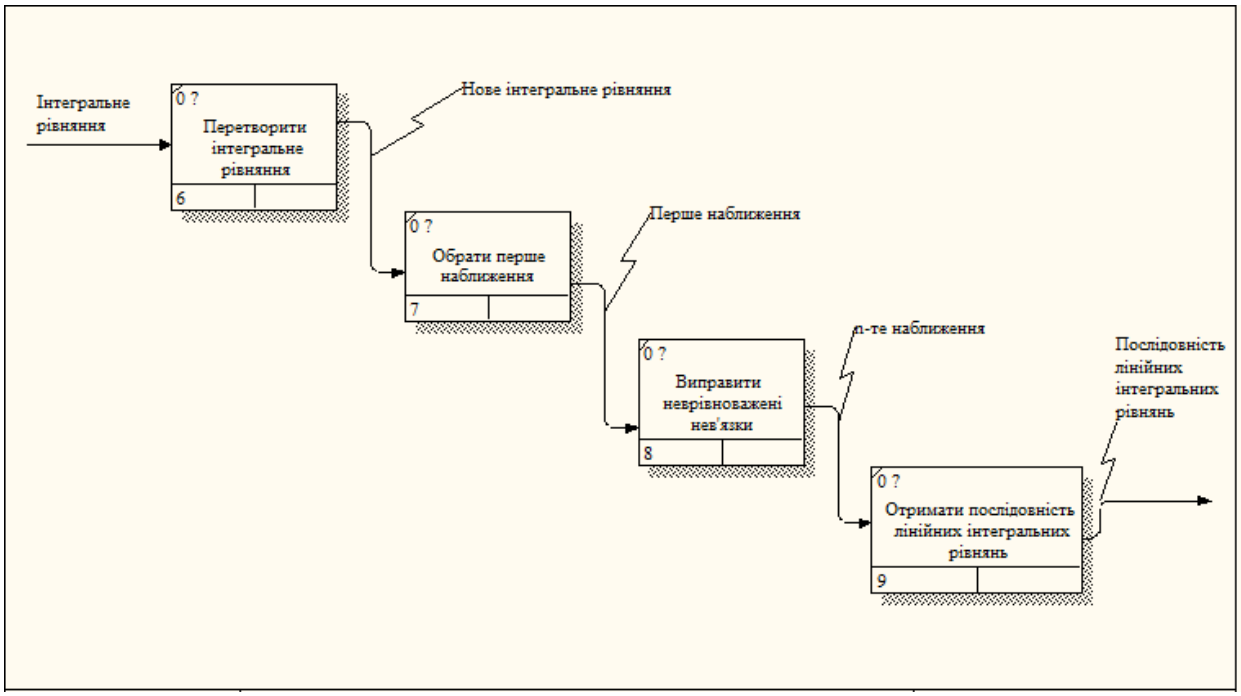

Рисунок 1.8 – Опис роботи «Отримати наближення»: рівень A3 (в нотації IDEF3)

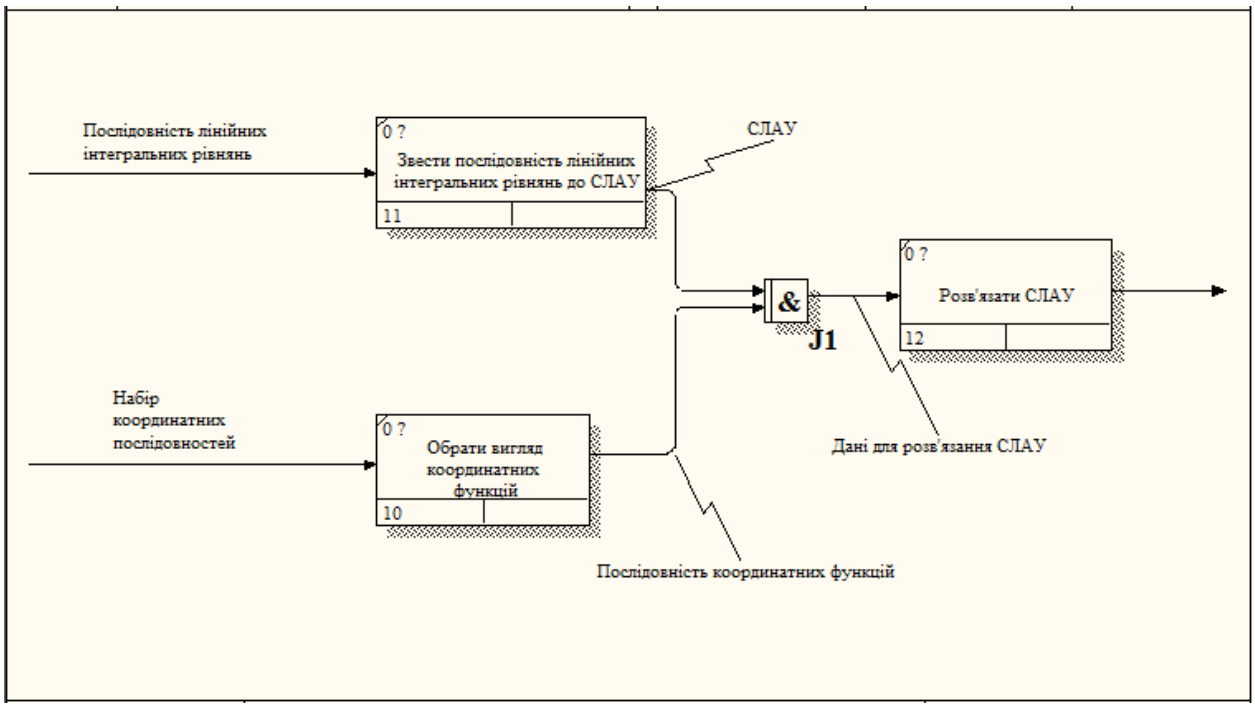

Рисунок 1.9 – Опис роботи «Розв'язати отриману послідовність лінійних інтегральних рівнянь»: рівень A4 (в нотації IDEF3)

DFD (Data Flow Diagrams) — діаграми потоків даних. Інструменти методології DFD дозволяють відображати джерела і адресати даних, ідентифікувати процеси і групи даних, що зв'язують в потоки одну функцію з іншою, і ефективно використовуються для опису процесів при впровадженні процесного підходу до управління організацією, так як дозволяє максимально знизити суб'єктивність опису бізнес процесів. Крім того, нотація DFD дозволяє описувати потоки документів і потоки ресурсів.

DFD-діаграма представлена на рис. 1.10. DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. 1.11.

Діаграми, отримані в результаті кожного кроку декомпозиції, передаються на експертизу експертам предметної області. Експерти оцінюють відповідність реальних процесів створеним діаграмам. Знайдені невідповідності виправляються автором діаграми. Після проходження експертизи без зауважень виконується наступний сеанс декомпозиції.

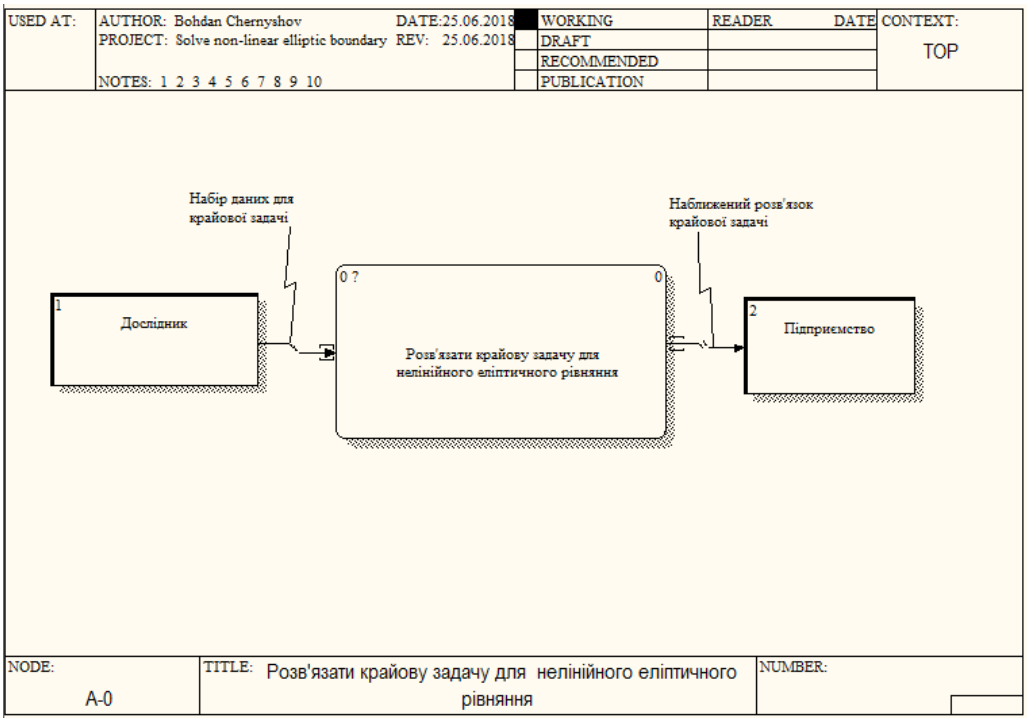

Рисунок 1.10 – DFD-діаграма

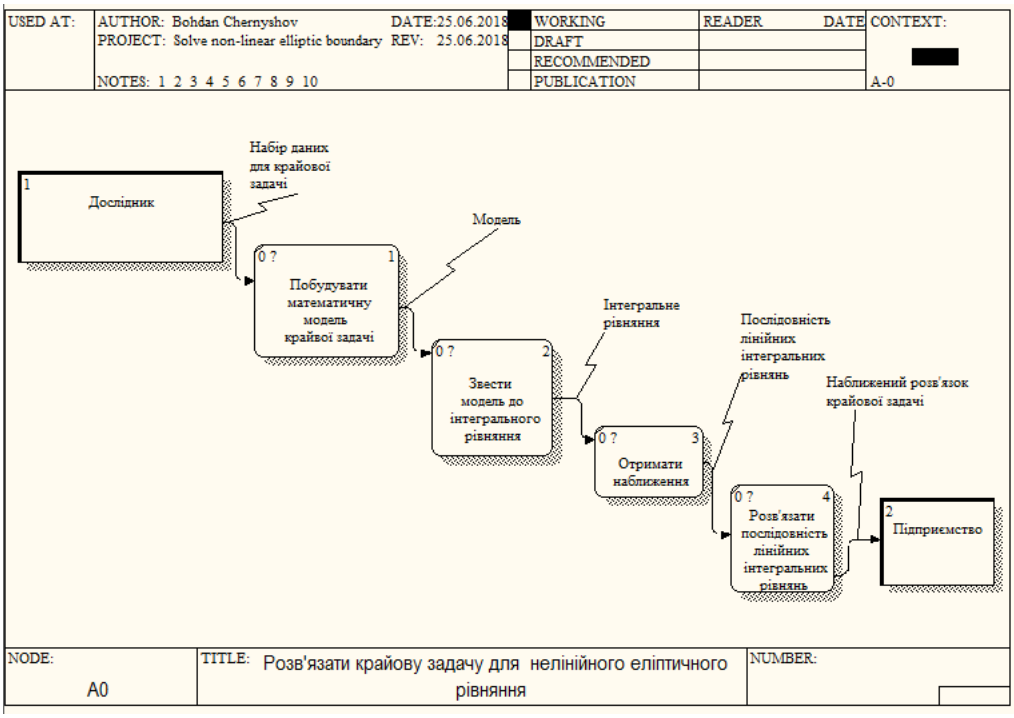

Рисунок 1.11 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

Діаграма дерева вузлів відображає ієрархічну взаємозв'язок блоків (функцій, робіт) без опису взаємозв'язків між ними. Процес створення моделі

робіт є ітераційним, отже, роботи можуть міняти своє розташування в дереві вузлів багаторазово. Щоб не заплутатися і перевірити спосіб декомпозиції, слід після кожної зміни створювати діаграму дерева вузлів. У моделі може бути побудовано довільну кількість діаграм дерев вузлів, так як їх коренем може бути будь-який блок моделі (не обов'язково контекстна діаграма) і вони можуть бути побудовані на довільну глибину (рис. 1.12).

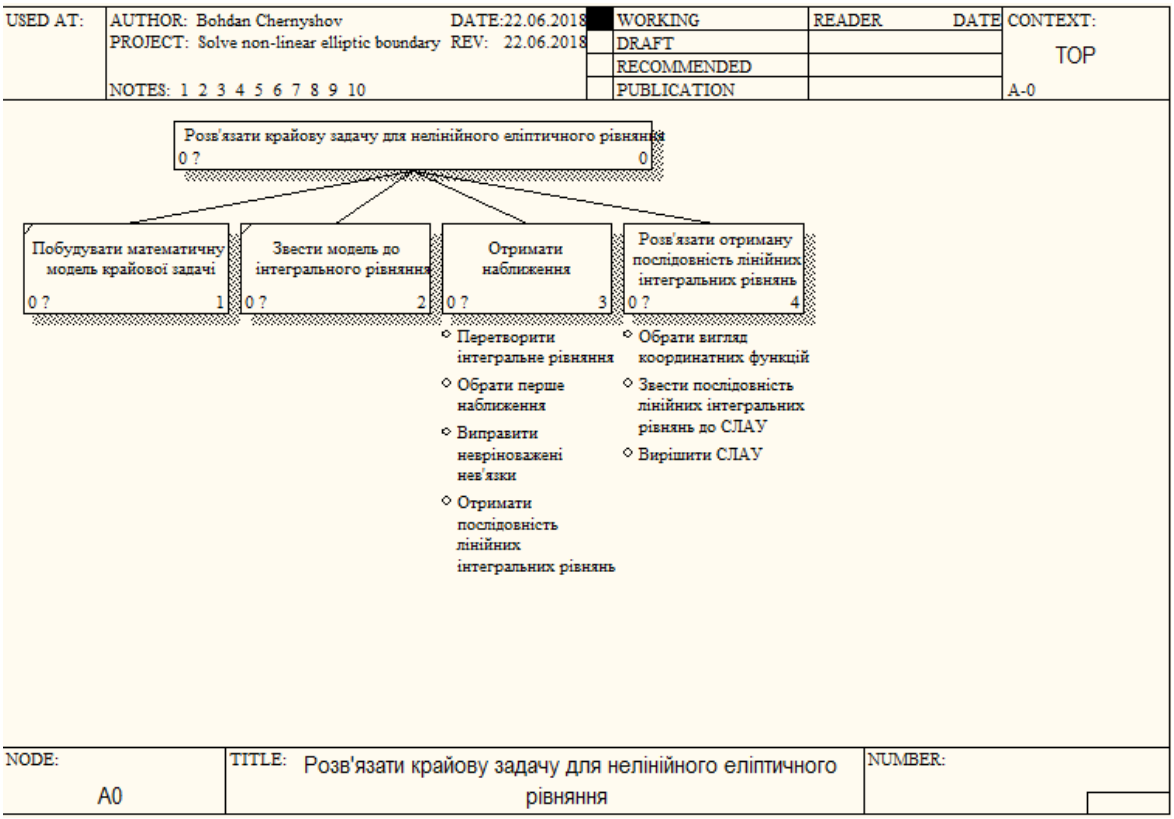

Рисунок 1.12 – Діаграма дерева вузлів

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблем математичного моделювання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Досліджуємо задачу про вибір методу, яким буде вирішуватися крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння. Проблема буде вирішуватися за наступними критеріями:

– критерій 1: час роботи програми;

– критерій 2: складність алгоритму при програмуванні;

– критерій 3: необхідні для проведення розрахунків ресурси;

– критерій 4: точність отриманого розв’язку;

– критерій 5: універсальність;

– критерій 6: вартість програмного забезпечення.

Обирати будемо з множини альтернатив:

– альтернатива 1: метод послідовних наближень;

– альтернатива 2: метод квазіфункцій Гріна;

– альтернатива 3: метод сіток.

Побудуємо ієрархічну стуктуру, використовуючи метод парних порівнянь. Ієрархічна структура приведена на рис. 1.13.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархії

Для продовження аналізу необхідно побудувати матриці парних порівнянь за критеріями та за альтернативами.

Після цього побудувати вертор локальних та глобальних приорітетів та знайти найбільш оптимальну альтернативу для розв'язування поставленої у атестаційній роботі задачі.

Матриця попарних порівнянь критеріїв наведена у таблиці 1.1.

Для таблиці 1.1 індекс узгодженості (ІУ) = $\frac{6.635-6}{6-1}=0{,}127$, випадкова узгодженість = 1,24, відносна узгодженість (ВУ) = $\frac{0{,}127}{1{,}24}=0{,}1024=10{,}24\%$.

Для прийняття рішення про використання методу необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив.

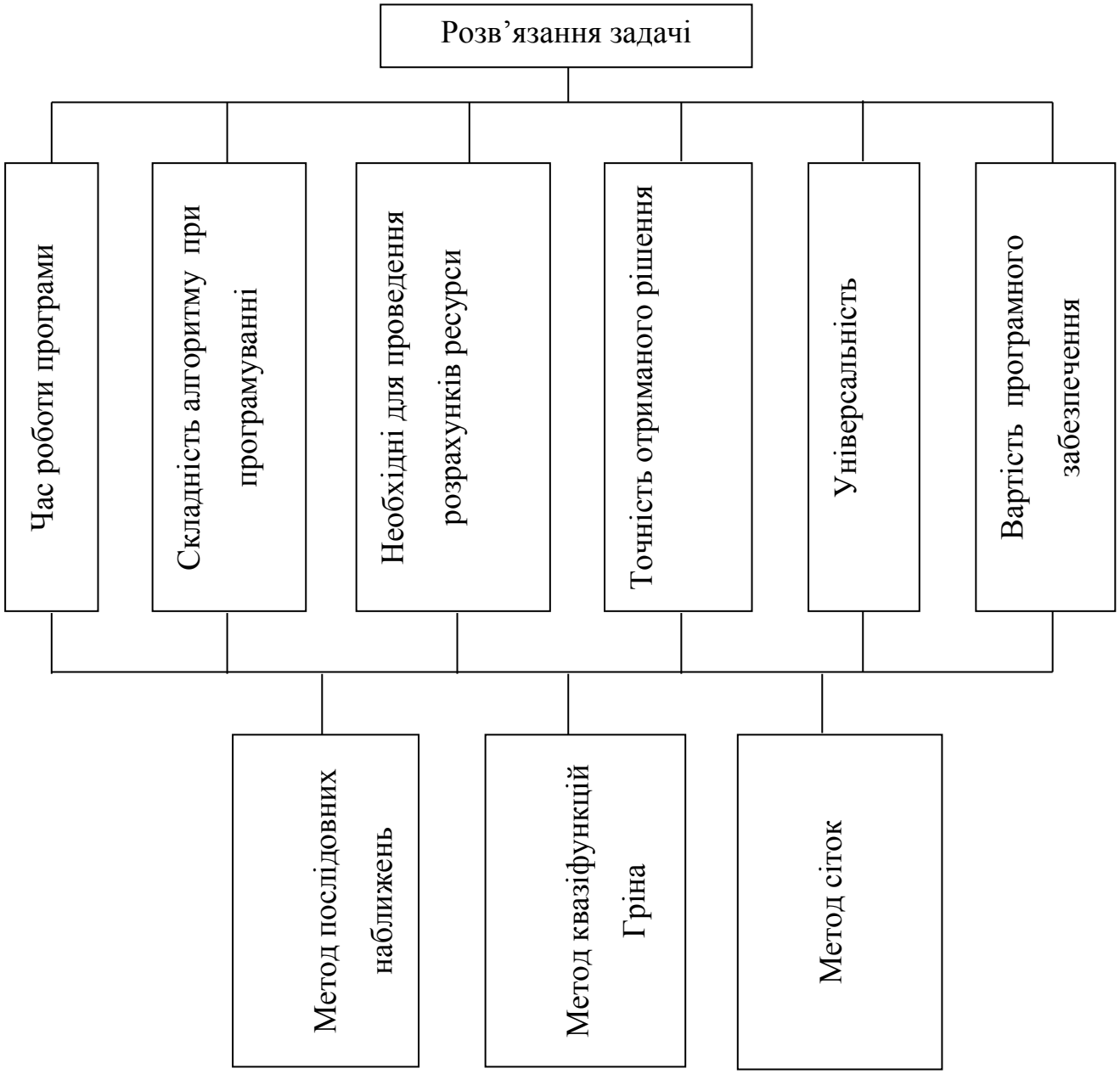

Рисунок 1.13 – Ієрархічна модель процесу аналізу розв'язання задачі

Оцінивши їх щодо кожної з альтернатив, отримаємо дані, які представлені в таблицях 1.2 – 1.7.

Випадкова узгодженість для матриць є рівною 0,58.

Для таблиці 1.2 індекс узгодженості (ІУ) = 0,0595, відносна узгодженість (ВУ) = 0,1025 = 10,25%, а для таблиці 1.3 індекс узгодженості (ІУ) = 0,027, відносна узгодженість (ВУ) = 0,0465 = 4,65%.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	К1	К2	К3	К4	К5	К6	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
К1	1	3	9	8	4	8	4,364	0,472	0,918
К2	$\frac{1}{3}$	1	5	8	3	5	2,418	0,261	1,270
К3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$	2	4	0,668	0,072	1,282
К4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0,371	0,040	1,023
К5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	6	1	6	1,070	0,116	1,195
К6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{6}$	1	0,357	0,039	0,947
Всього							9,249		6,635

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

Критерій 1	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	0,464	0,106	0,845
А2	5	1	7	3,271	0,744	1
А3	2	$\frac{1}{7}$	1	0,659	0,150	1,274
Всього				4,394		3,119

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

Критерій 2	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	$\frac{1}{2}$	4	1,260	0,345	1,120
А2	2	1	4	2,0	0,547	0,957
А3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0,397	0,109	0,977
Всього				3,657		3,054

Для таблиці 1.4 індекс узгодженості (ІУ) = 0,0595, відносна узгодженість (ВУ) = 0,1025 = 10,25%, а для таблиці 1.5 індекс узгодженості (ІУ) = 0,027, відносна узгодженість (ВУ) = 0,0465 = 4,65%.

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

Критерій 3	А1	А2	А3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
А1	1	2	$\frac{1}{8}$	0,630	0,129	1,229
А2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{7}$	0,415	0,085	0,852
А3	8	7	1	3,826	0,785	0,996
Всього				4,871		3,076

Для таблиці 1.6 індекс узгодженості (ІУ) = 0,038, відносна узгодженість (ВУ) = 0,0655 = 6,55%.

Для таблиці 1.7 індекс узгодженості (ІУ) = 0,0324, відносна узгодженість (ВУ) = 0,0559 = 5,59%.

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

Критерій 4	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	3	7	2,759	0,649	0,9582
A2	$\frac{1}{3}$	1	5	1,186	0,279	1,1716
A3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	0,306	0,072	0,9351
Всього				4,25		3,065

Таблиця 1.6 – Порівняння за п'ятим критерієм

Критерій 5	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	5	1,186	0,297	1,247
A2	3	1	5	2,466	0,618	0,947
A3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0,342	0,086	0,942
Всього				3,994		3,136

Таблиця 1.7 – Порівняння за шостим критерієм

Критерій 6	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0,500	0,131	0,918
A2	4	1	4	2,520	0,661	0,991
A3	2	$\frac{1}{4}$	1	0,794	0,208	1,145
Всього				3,814		3,054

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо виконати кінцеві розрахунки та зробити висновки.

У таблиці 1.8 наведені результати, що дозволяють нам стверджувати, що найкращою для нас буде друга альтернатива — метод квазіфункцій Гріна.

Таблиця 1.8 – Кінцеві дані

Критерій /Альтернатива	К1	К2	К3	К4	К5	К6	Узагальнені пріоритети
A1	0,106	0,345	0,129	0,649	0,297	0,131	0,317
A2	0,744	0,547	0,085	0,279	0,618	0,661	0,385
A3	0,150	0,109	0,785	0,072	0,086	0,208	0,298

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Розглядається крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння, що є математичною моделлю фізичних, хімічних та біологічних процесі. Використання подібної моделі також поширилося на економіку, фінансове прогнозування та інші сфери, що включають похідні двох або більше незалежних змінних, якими, як правило, є час, довжина або кут. Така математична модель зводиться або до диференціального рівняння в часткових похідних, або до системи таких рівнянь.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Задачею атестаційної роботи є дослідження можливості використання методу квазіфункцій Гріна для розв’язання крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь в областях складної геометрії. В якості прикладу розглядається наступна крайова задача:

$$-\Delta u = \lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}\right) \quad \forall x \in \Omega \subset R^n, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

для областей

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \middle| y\left(1 - x^2 - y^2\right) > 0 \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) \middle| xy\left(1 - x^2 - y^2\right) > 0 \right\},$$

$$\Omega_3 = \left\{ (x, y) \middle| y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) > 0 \right\}.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного системного аналізу системи, а також аналізу проблеми вибору ефективного методу розв’язання, сформулюємо завдання дослідження даної роботи:

– сформулювати крайову задачу;

– розробити програмний продукт, який реалізує метод квазіфункцій Гріна для розв’язання крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння;

– зробити аналіз ефективності запропонованого методу.

2 ВИБІР ТА ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ

2.1 Метод R - функцій у застосуванні до математичного моделювання задач

Означення. R-функцією, що відповідає розбиттю числової осі на проміжки $(-\infty,0)$ та $[0,+\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів, тобто функція $z=f(x,y)$ називається R - функцією, якщо існує така булева функція F, що $S[z(x,y)]=F[S(x),S(y)]$, де двозначний предикат $S(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\geq 0.\end{cases}$ В цьому випадку булева функція F називається супроводжуючою.

Системою R-функцій, що часто використовується, є система $\mathfrak{R}_0$:

$$\overline{x}=-x,$$
$$x\wedge_0 y=x+y-\sqrt{x^2+y^2},$$
$$x\vee_0 y=x+y+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Супроводжуючими булевими функціями для них є відповідно $\neg,\wedge,\vee$.

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії. Нехай в $\mathbb{R}^2$ заданий геометричний об'єкт Ω з кусочно-гладкою межею $\partial\Omega$, і необхідно побудувати функцію $\omega(x,y)$, що є додатною всередині Ω, від'ємною поза межами Ω і дорівнює нулю на $\partial\Omega$. Рівняння $\omega(x,y)=0$ буде в неявній формі визначати геометричне місце точок, що відповідає межі $\partial\Omega$ області Ω.

Нехай область Ω може бути побудована з більш простих (опорних) областей $\Omega_1=\{\omega_1(x,y)\geq 0\},...,\Omega_m=\{\omega_m(x,y)\geq 0\}$ за допомогою теоретико-множинних операцій об'єднання, перетину та доповнення. Тоді області Ω можна поставити у відповідність предикат

$$\Omega = F\left(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m\right),$$

який приймає значення 1, якщо $(x, y) \in \Omega \cup \partial\Omega$, і 0, якщо $(x, y) \notin \Omega \cup \partial\Omega$.

Перехід від предикатної форми задання області до звичайної, прийнятої в аналітичній геометрії, відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)(i = 1, 2, ..., m)$, а символи $\{\cap, \cup, \neg\}$ - на символи R - операцій $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, -\}$ відповідно. В результаті отримаємо аналітичний вираз $\omega(x, y)$, що визначає в елементарних функціях шукане рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$. При цьому для внутрішніх точок області $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх відповідно $\omega(x, y) < 0$.

Означення. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умовам $\omega|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -1$, де n - вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Нормалізоване рівняння $\omega(x, y) = 0$ може бути отримане із рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ таким чином.

Теорема. Якщо $\omega_1(x, y) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ задовольняє умовам $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial\omega_1}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} > 0$, то функція $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{{\omega_1}^2 + \left|\nabla\omega_1\right|^2}} \in C^{m-1}\left(\mathbb{R}^2\right)$ задовольняє умовам $\omega|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -1$ в усіх регулярних точках межі $\partial\Omega$.

Якщо $\left|\nabla\omega_1\right| \neq 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого рівняння можна скористатися більш простою формулою $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\left|\omega_1\right|}$.

В деяких випадках для нормалізації рівняння можна лише ввести сталі множники. Наприклад:

а) $\frac{y-kx-b}{\sqrt{1+k^2}}=0$ – нормалізоване рівняння прямої $y=kx+b$;

б) $\frac{1}{2R}\left(R^2-\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2\right)=0$ – нормалізоване рівняння кола радіуса R з центром $\left(x_0,y_0\right)$;

в) $\frac{1}{2a}\left(a^2-x^2\right)=0$ – нормалізоване рівняння смуги, що розташована між прямими $x=-a$ та $x=a$.

За допомогою нормалізованого рівняння можна будувати жмутки функцій, нормальна похідна яких або довільна лінійна комбінація нормальної похідної і самої функції на межі області приймає задані значення.

2.2 Доведення існування єдиного розв’язку розглядуваної задачі

Розглянемо крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння

$$-\Delta u=\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}\right),\forall x\in\Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \lambda>0.$$

Цій задачі на класі функцій з $C(\Omega)$ відповідає еквіваленте операторне рівняння

$$u(x)=\int_{\Omega}G(x,s)\cdot\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}(s)\right)ds,$$

$G(x,s)$ – функція Гріна оператора Δ крайової задачі у $\Omega, x=(x_1,...,x_n), s=(s_1,...,s_n)$ [6]. Введемо у розгляд оператор

$$Tu=\lambda\int_{\Omega}G(x,s)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}(s)\right)ds,\ D(T)=K.$$

Дослідимо властивості оператора Т.

Вочевидь, Т є монотонний оператор. Крім того, відомо що, Т є цілком неперервним оператором.

Будуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0\rangle$, тобто такий, що $tv_0 \geq v_0$ та $tw_0 \leq w_0$.

Нехай $v_0=0$, покладемо $u=v_0=0$ та складемо елемент

$$v_1(x)=\lambda\int_{\Omega}G(x,s)\left(\frac{1}{5}\right)ds > v_0=0.$$

Маючи елемент v_1, будуємо елемент

$$v_2(x)=\lambda\int_{\Omega}G(x,s)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}v_1^{\frac{3}{4}}(s)\right)ds > v_1.$$

Продовжуючи процес, приходимо до співвідношень $0=v_0\leq v_1\leq v_2\leq ...\leq v_n.$

Якщо покласти $u=w_0=\beta=const>0,$ отримаємо елемент

$$D_1(x)=\lambda\int_{\Omega}G(x,s)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\beta^{\frac{3}{4}}\right)ds.$$

Параметри λ та β обираємо так, щоб $w_1 \le w_0 = \beta$, це приводить до умови

$$\lambda \int_{\Omega} G(x,s)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\beta^{\frac{3}{4}}\right)ds \le \beta, \forall x \in \Omega.$$

Звідки маємо

$$\max \int_{\Omega} G(x,s)ds \le \frac{\beta}{\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\beta^{\frac{3}{4}}\right)}.$$

Продовжуючи процес побудови елементів w_i аналогічно процесу для v_i отримуємо нерівності $0 = v_0 \le v_1 \le ... \le v_n \le ...w_n... \le w_1 \le w_0 = \beta$, отже, конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ є інваріантний для оператора T [7].

Щоб дослідити T на угнутість, складаємо

$$T(tu) - tTu = \lambda\left[\int_{\Omega} G(x,s)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}v_1^{\frac{3}{4}}(s)\right)ds\right] - \int_{\Omega} G(x,s)t\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u\frac{3}{4}\right)ds =$$

$$= \lambda \int_{\Omega} G(x,s)\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{4}t^{\frac{3}{4}}u^{\frac{3}{4}} - \frac{t}{5} - \frac{t}{4}u^{\frac{3}{4}}\right]ds =$$

$$= \lambda \int_{\Omega} G\left[\frac{1}{5}(1-t)+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}(t^{\frac{3}{4}}-t)\right]ds.$$

Щоб ця різниця була додатною $\forall t \in (0,1), u > 0$, достатньо щоб $1-t > 0$ та $\left(t^{\frac{3}{4}} - t\right) > 0$, що виповнюється завжди $\forall t \in (0,1)$.

Треба ще довести виконання нерівностей

$$A \cdot u_0 \le Tu \le B \cdot u_0 \, (A > 0, B > 0),$$

де $u_0 \in K$ – деякий фіксований елемент.

Розглянемо ліву нерівність $A \cdot u_0 \le Tu$, нехай $u_0 = \int\limits_\Omega G(x,s)ds$, тоді треба довести, що $A \cdot \int\limits_\Omega G(x,s)ds \le \int\limits_\Omega G(x,s)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}\right)ds$.

Розглянемо праву нерівність $Tu \le \beta u_0$. Так як $u \le w_0 = \beta$, маємо

$$Tu = \int\limits_\Omega G\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}v_1^{\frac{3}{4}}(s)\right)ds \le \int\limits_\Omega G\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}u\frac{3}{4}\right)ds \le \beta u_0,$$

отже, для В маємо: $B \ge \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\beta^{\frac{3}{4}}\right)$, тобто така $B(u)$ існує.

Дослідимо T на угнутість, для цього перевіримо виконання умови: для будь-якої $u > 0$ та будь-якого $t \in (0,1)$

$$f(tu) - tf(u) > 0 \, \forall x \in \Omega.$$

У нашому випадку умова набуває вигляду:

$$\lambda\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}(tu)^{\frac{3}{4}}\right) - t\lambda\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}(u)^{\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \lambda\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{4}t^{\frac{3}{4}}u^{\frac{3}{4}} - t\frac{1}{5} - \frac{1}{4}tu^{\frac{3}{4}}\right] = \lambda\left[\frac{1}{5}(1-t) + \frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}t^{\frac{3}{4}}(1-t^{\frac{1}{4}})\right] > 0,$$

тобто виконується [8].

Таким чином, приходимо до висновку, що послідовні наближення, які будуються, за схемою $u_{n+1} = Tu_n, n = 1,2...$, збігаються за нормою простору $C(\Omega)$ до єдиного додатнього розв'язку u^*, яким би не було початкове наближення $u_1 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ [9, 10].

Беручи за початкове наближення $u_1 = v_0$, $u_1 = w_0$, отримаємо нерівності $0 = v_0 \le v_1 \le ... \le v_n \le u^* \le ... w_n ... \le w_1 \le w_0 = \beta$.

Крім того, у випадку, якщо задача розглядається у області, для якої знаємо функцію Гріна, можливо побудувати двобічні наближення до розв'язку [11, 12]. Але метою роботи є побудувати розв'язок задачі у областях, для якої не знаємо функцію Гріна. Тому в наступному розділі розглянемо метод, застосування якого вирішить цю проблему.

2.3 Метод послідовних наближень

2.3.1 Загальне формулювання методу

Нехай потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ нелінійного диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

що задовольнить початковій умові

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{2.2}$$

Будемо вважати, що в деякому прямокутнику $D=\{|x-x_0|\leq a, |y-y_0|\leq b\}$ з центром в точці (x_0, y_0) для рівняння (2.1) виконані умови а) та б) теореми існування та єдності розв'язку задачі (2.1) – (2.2).

Розв'язок задачі (2.1) – (2.2) може бути знайдено методом послідовних наближень, який полягає в наступному.

Будуємо послідовність $\{y_n(x)\}$ функцій, визначених рекурентними співвідношеннями

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

В якості нульового наближення $y_0(x)$ можна взяти будь-яку функцію, неперервну в околиці точки $x = x_0$, зокрема $y_0(x) \equiv y_0$ – початкове значення Коші. Можна довести, що при зроблених припущеннях відносно рівняння (2.1)

послідовні наближення $\{y_n(x)\}$ збігаються до точного розв'язку рівняння (2.1), яке задовольняє умові (2.2), в деякому інтервалі $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, де

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),\ \ M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|. \tag{2.4}$$

Оцінка похибки, яка виходить при заміні точного розв'язку $y(x)$ n-м наближенням $y_n(x)$, задається нерівністю

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{MN^{n-1}}{n!}h^n, \tag{2.5}$$

де $N = \max\limits_{(x,y)\in D}\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$. Застосовуючи метод послідовних наближень, слід зупинитися на такому n, для якого $|y_{n+1} - y_n|$ не перевищує допустиму похибку.

2.3.2 Застосування методу послідовних наближень для нелінійних рівнянь

Нехай формула $Bx = P$ символізує сукупність систем диференціальних рівнянь та початкових або граничних умов.

Представимо попередні рівняння у вигляді

$$Ax + (B - A)x = P, \tag{2.6}$$

де A – деякий лінійний оператор достатньо простої будови, а $C = B - A$.

В якості першого наближення до розв'язку задачі застосовується розв'язок рівняння

$$Ax_1 = P, \tag{2.7}$$

причому оператор A вибраний так, що це рівняння розв'язується легко. Якщо це рівняння підставити в початкове рівняння, то різниця між правою та лівою частинами рівнянь буде $\Delta_2 = P - Ax_1 - Cx_1$. Можна сказати, що похибка першого наближення викликана наявністю неврівноваженості Δ_2.

Для усунення неврівноваженості похибки δ_2 до першого наближення визначають з рівняння $A\delta_2 = \Delta_2$ та в якості другого наближення до істинності розв'язку приймають $x_2 = x_1 + \delta_2$. Аналогічним чином визначають «неврівноваженість» другого наближення, нову похибку до розв'язку і т.д.

2.3.3 Алгоритм методу послідовних наближень

Використовуючи викладений вище метод, побудуємо алгоритм розв’язання задачі

$$-\Delta u = f(x,u)\,\forall x = (x_1,\dots,x_m) \in \Omega \subset R^m,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.8}$$

Запишемо рівняння задачі у вигляді

$$-\Delta u + const = f(u) + const,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.9}$$

або

$$-\Delta u + const - f(u) = const,\ u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.10}$$

Позначимо:

$$Au = -\Delta u, \tag{2.11}$$

$$Cu = const - f(u), \tag{2.12}$$

$$Au + Cu = const. \tag{2.13}$$

Першим наближенням є розв’язок наступної задачі:

$$-\Delta u_1 = const,\quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.14}$$

Підставляємо u_1 у вихідне рівняння:

$$-\Delta u_1 + const - f(u_1) = const, \tag{2.15}$$

так як $-\Delta u_1 = const$, маємо $1 - f(u_1) = 0$.

Позначимо $\Delta_2 = f(u_1) - const$ – нев'язка (похибка) розв'язку u_1.

Друге наближення u_2 шукаємо у вигляді

$$u_2 = u_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = u_2 - u_1, \tag{2.16}$$

де δ_2 визначаємо з рівняння $A\delta_2 = \Delta_2 \Rightarrow -\Delta_2 = f(u_1) - const$, або

$$\begin{aligned} -\Delta(u_2 - u_1) &= f(u_1) - const, \\ -\Delta u_2 + \Delta u_1 &= f(u_1) - const. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Отже, для u_2 отримуємо задачу

$$-\Delta u_2 = f(u_1) \text{ в } \Omega, \tag{2.18}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.19}$$

і так далі.

Отримуємо послідовність задач:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= const,\ u_1|_{\partial\Omega} = 0, \\ -\Delta u_2 &= f(u_1),\ u_2|_{\partial\Omega} = 0, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ -\Delta u_n &= f(u_{n-1}),\ u_n|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.4 Метод Бубнова-Гальоркіна

Процес Бубнова-Гальоркіна можна розглядати як узагальнення процесу Рітца для рівнянь виду $Au = f$, де оператор A необов'язково додатній. Приведемо більш загальне формулювання процесу Бубнова - Гальоркіна. Нехай лінійний оператор A визначений на множині, щільному в деякому сепарабельному гільбертовому просторі H, і нехай потрібно розв'язати рівняння

$$Au - f = 0. \tag{2.21}$$

Вибираємо послідовність елементів $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D(A) \subset H$, які будемо називати координатними, тобто задовольняють наступним умовам: $\varphi_1,...,\varphi_n$ є лінійно незалежними $\forall n$, кожна координатна функція задовольняє крайовим умовам завдання, послідовність елементів $\{\varphi_n\}$ є повною в просторі H. Будемо вважати, що рівняння (2.1) і відповідні йому крайові умови лінійні. Тоді функція

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{2.22}$$

де a_k – довільно вибрані постійні, задовольняє всім крайовим умовам завдання. Згідно з методом Бубнова-Гальоркіна коефіцієнти a_k визначаються з вимоги, щоб ліва частина рівняння (2.21) стала, після підстановки в неї $u_n(x)$ замість $u(x)$, ортогональна до функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$.

Наближений розв'язок рівняння (2.21) будуємо у вигляді лінійної комбінації координатних елементів з постійними коефіцієнтами вигляду

(2.22). Коефіцієнти a_k визначаємо з умови, щоб після заміни u на u_n ліва частина рівняння (2.21) була ортогональна до елементів $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. Це призводить до наступної системи лінійних рівнянь з невідомими a_k:

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j),\ j = 1, ..., n. \tag{2.23}$$

Так само завдання про власні значення для рівняння

$$Au - \lambda Bu = 0, \tag{2.24}$$

призводить до рівняння

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(B\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(B\varphi_1, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(B\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(B\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(B\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(B\varphi_2, \varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(B\varphi_n, \varphi_1) & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(B\varphi_n, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(B\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.25}$$

Якщо $B = E$, то рівняння (2.4) та (2.5) приймають більш простий вигляд

$$Au - \lambda u = 0, \tag{2.26}$$

$$\begin{vmatrix} (A\phi_1, \phi_1) - \lambda(\phi_1, \phi_1) & (A\phi_1, \phi_2) - \lambda(\phi_1, \phi_2) & \dots & (A\phi_1, \phi_n) - \lambda(\phi_1, \phi_n) \\ (A\phi_2, \phi_1) - \lambda(\phi_2, \phi_1) & (A\phi_2, \phi_2) - \lambda(\phi_2, \phi_2) & \dots & (A\phi_2, \phi_n) - \lambda(\phi_2, \phi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\phi_n, \phi_1) - \lambda(\phi_n, \phi_1) & (A\phi_n, \phi_2) - \lambda(\phi_n, \phi_2) & \dots & (A\phi_n, \phi_n) - \lambda(\phi_n, \phi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.27}$$

2.5 Метод квазіфункцій Гріна

2.5.1 Загальне формулювання методу

Розглянемо спочатку задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta\upsilon \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2} = f_0;\ x \in \Omega; \tag{2.28}$$

$$\upsilon\big|_{\Gamma} = \varphi_0, \tag{2.29}$$

де $\Gamma = \partial\Omega$ – границя області Ω, а $n = 2$ або 3.

Припускаючи, що φ_0 є елементарна або кусочно-елементарна функція, можемо продовжити φ_0 в Ω, побудувавши таку елементарну достатньо гладку всередині Ω функцію φ, що $\varphi\big|_{\partial\Omega} = \varphi_0$. Тоді, замінивши $u = \upsilon - \varphi$, прийдемо до крайової задачі с однорідною граничною умовою

$$\Delta u = f;\ x \in \Omega; \tag{2.30}$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \tag{2.31}$$

де $f = f_0 - \Delta\varphi$.

Нехай $\omega = 0$ є нормалізоване до першого порядку (елементарне) рівняння $\partial\Omega$.

Розглянемо двовимірну задачу. Використавши відоме інтегральне представлення функції класу $C^2(\Omega)$ і формулу Гріна, для всіляких $u, q \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ можемо записати

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} \ln\frac{1}{r} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln\frac{1}{r} \right] d_{\xi}\Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln\frac{1}{r} \Delta_{\xi} u(\xi)\, d\xi; \tag{2.32}$$

$$\int_{\Omega}\left[u(\xi)\Delta_{\xi}q(\xi)-q(\xi)\Delta_{\xi}u(\xi)\right]d\xi=\int_{\partial\Omega}\left[u(\xi)\frac{\partial q(\xi)}{\partial\nu}-q(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}\right]d_{\xi}\Gamma, \quad (2.33)$$

де $r=\|x-\xi\|=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}$; $\Delta_{\xi}=\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}$; $d_{\xi}\Gamma$ – означає, що інтегрування за ξ ведеться по $\Gamma=\partial\Omega$. Покладемо

$$q=q(x,\xi)=-\frac{1}{2}\ln\left[r^2+4\omega(x)\omega(\xi)\right]; \quad (2.34)$$

$$G_2(x,\xi)=\ln\frac{1}{r}-q(x,\xi). \quad (2.35)$$

Можна побачити, що $q(x,\xi)\in C^2(\Omega\times\Omega)$, а внаслідок того що $\omega=0$ при $x\in\partial\Omega$

$$G_2(x,\xi)\big|_{\omega(x)=0}=0. \quad (2.36)$$

Перемноживши рівність (2.33) на $\frac{1}{2\pi}$ і додаючи до формули (2.32), з урахуванням (2.31) – (2.33) та (2.36) отримаємо

$$u(x)=u_0(x)+\int_{\Omega}u(\xi)K(x,\xi)d\xi, \quad (2.37)$$

де

$$u_0(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}G_2(x,\xi)f(\xi)d\xi; \quad (2.38)$$

$$K(x,\xi)=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}\right)q(x,\xi). \quad (2.39)$$

2.5.2 Застосування методу квазіфункцій Гріна до атестаційної задачі

Розглянемо застосування метода квазіфункцій Гріна до нелінійних крайових задач в областях складної геометрії. Задачі (1.1), (1.2) у класі функцій $W_2^1(\Omega)$ відповідає еквівалентне нелінійне інтегральне рівняння

$$u(x)=\int_{\Omega} G(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}\right)\right)ds, \qquad (2.40)$$

де $W_2^1(\Omega)$ – простір функцій, що дорівнюють нулю на $\delta\Omega$ та мають в Ω квадратично сумовні похідні першого порядку, $G(x,s)$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі в області Ω, $x=(x_1,x_2), s=(s_1,s_2)$. Якщо функція Гріна невідома або має складний вигляд, пропонується застосувати метод квазіфункцій Гріна, який дозволяє відшукати наближений розв'язок задачі (1.1), (1.2). Вихідну задачу (1.1), (1.2) зводимо до інтегрального рівняння

$$u(x)=\int_{\Omega} G_{кв.}(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}\right)\right)ds+\int_{\Omega} u(s)K(x,s)ds, \qquad (2.41)$$

$$G_{кв.}(x,s)=\ln\frac{1}{r}-q(x,s),\ q(x,s)=-\frac{1}{2}\ln\left[r^2+4\omega(x)\omega(s)\right],$$

$$r=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-s_i)^2},\quad K(x,s)=-\frac{1}{2\pi}\Delta_s q(x,s).$$

Застосовуючи до рівняння (2.41) метод послідовних наближень, зводимо його до послідовності лінійних інтегральних рівнянь

$$u_m(x) - \int_\Omega u_m(s)K(x,s)ds = \\ = \int_\Omega G_{кв.}(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u_{m-1}^{\frac{3}{4}}\right)\right)ds,\ m=2,3, \tag{2.42}$$

де візьмемо $u_1(x)=1$. Наближений розв'язок кожного з рівнянь (2.42) згідно з методом Бубнова-Гальоркіна шукаємо у вигляді

$$u_{m,k}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(m)}\varphi_i(x), \tag{2.43}$$

де $\varphi_i(x)$ – координатні функції. Це призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $c_i^{(m)},\ i=1,2,...,k,\ m=2,3,...$:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^{(2)}\left[\int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx - \int_\Omega\int_\Omega K(x,s)\varphi_i(s)\varphi_j(x)dsdx\right] = \\ = \int_\Omega\int_\Omega G_{кв.}(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u_1^{\frac{3}{4}}\right)\right)\varphi_j(x)dsdx,\ j=1,2...,$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^{(m)}\left[\int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx - \int_\Omega\int_\Omega K(x,s)\varphi_i(s)\varphi_j(x)dsdx\right] = \\ = \int_\Omega\int_\Omega G_{кв.}(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u_{m-1,k}^{\frac{3}{4}}\right)\right)\varphi_j(x)dsdx,\ j=1,2...,k,$$

де $\{\varphi_j(x)\}$ — координатна послідовність, $x=(x_1,x_2)$ або (x,y).

Координатну послідовність можна обрати у вигляді:

$\varphi_k(x,y)=\omega(x,y)F_k(x,y)$, де $F_k(x,y)=x^i y^j, i\geq 0,\ j\geq 0,\ i+j=0, i,j=\overline{1,n}$,

або $F_k(x,y)=P_i(x)P_j(x)$, $P_i(x)=\frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dx^i}\left(x^2-1\right)^i$ – поліноми Лежандра.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 11.2 як система символьної математики

Система символьних обчислень Mathematica дуже широка і багатогранна. Незважаючи на свою спрямованість на серйозні математичні обчислення, системи класу Mathematica прості в освоєнні і можуть використовуватися досить широкою категорією користувачів – студентами і викладачами вузів, інженерами, аспірантами, науковими працівниками та навіть учням математичних класів загальноосвітніх і спеціальних шкіл. Всі вони знайдуть в подібній системі численні корисні можливості для застосування.

Mathematica була задумана як система, яка максимально автоматизує працю науковців і математиків-аналітиків, тому вона заслуговує вивчення навіть в якості типового представника елітних і високоінтелектуальних програмних продуктів вищої міри складності. Однак куди більший інтерес вона представляє як потужний і гнучкий математичний інструментарій, який може надати неоціненну допомогу більшості науковців, викладачів університетів і вищих навчальних закладів, студентів і інженерів.

З самого початку велика увага приділялася графіці, в тому числі динамічній, і навіть можливостям мультимедіа – відтворення динамічної анімації та синтезу звуків. Набір функцій графіки та їх опцій дуже обширний. Графіка завжди була сильною стороною різних версій системи Mathematica і забезпечувала їм лідерство серед систем комп’ютерної математики.

В результаті Mathematica швидко зайняла провідні позиції на ринку символьних математичних систем. Особливо привабливі великі графічні можливості системи і реалізація інтерфейсу типу Notebook. При цьому система забезпечує динамічний зв’язок між осередками документів в стилі електронних таблиць навіть при вирішенні символьних завдань, що принципово і вигідно відрізняло її від інших подібних систем.

Таким чином, Mathematica – це, з одного боку, типова система програмування на базі одного з найпотужніших проблемних мов функціонального програмування високого рівня, призначена для вирішення різних завдань (в тому числі і математичних), а з іншого – інтерактивна система для розв’язання більшості математичних задач в діалоговому режимі без традиційного програмування.

3.2 Опис програми

Для розв’язання крайової задачі, яка описувалася у розділі 1, для метода квазіфункцій Гріна була складена програма. Дана програма виконана з використанням можливостей пакета Mathematica 11.2, які дозволяють створювати програмні продукти у формі електронних документів.

Порядок використання електронного документу для метода квазіфункцій Гріна наступний:

а) задання початкових даних: задання параметрів задачі, вигляд нелінійної правої частини рівняння, початкового наближення, послідовності координатних функцій;

б) обчислення матриці Бубнова-Гальоркіна;

в) обчислення коефіцієнтів першого наближення;

г) ітераційний процес, в якості результатів виводиться похибка між поточним та попереднім наближенням;

д) побудова поверхні наближеного розв’язку, його ліній рівня, а також його аналітичний вигляд.

Лістинг програми наведено в додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

4.1 Розв’язання задачі методом послідовних наближень

Розглянемо задачу:

$$-\Delta u = \lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}\right) \quad \forall x \in \Omega \subset R^n,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

де в якості Ω візьмемо три області:

$$\Omega_1 = \left\{(x,y)\middle| y\left(1-x^2-y^2\right)>0\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{(x,y)\middle| xy\left(1-x^2-y^2\right)>0\right\},$$
$$\Omega_3 = \left\{(x,y)\middle| y\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)>0\right\}.$$

Для кожної з цих областей побудуємо розв’язок при $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 10$.

Для побудови розв’язку знайдемо функції $u_1, u_2, \ldots, u_m$ для послідовності задач. Кожну з цих задач ми можемо розв’язати за допомогою варіаційних методів. Скористаємося методом Бубнова-Гальоркіна. Розв’язок шукаємо у вигляді

$$u_{m,k}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(m)} \varphi_i(x),\ i = 1,2,\ldots,k,\ m = 2,3,\ldots,$$

де $\varphi_k(x,y)$ – це послідовність координатних функцій вигляду

$$\varphi_{i,j}(x,y)=\omega_n(x,y)P_k(x)P_k(2y-1),\ n=1,2,3,$$

$$\omega_1(x,y)=\begin{cases} y\left(1-x^2-y^2\right), & \forall(x,y)\in\Omega_1,\\ 0, & \forall(x,y)\in\partial\Omega_1,\end{cases}$$

$$\omega_2(x,y)=\begin{cases} xy\left(1-x^2-y^2\right), & \forall(x,y)\in\Omega_2,\\ 0, & \forall(x,y)\in\partial\Omega_2,\end{cases}$$

$$\omega_3(x,y)=\begin{cases} y\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right), & \forall(x,y)\in\Omega_3,\\ 0, & \forall(x,y)\in\partial\Omega_3,\end{cases}$$

де $P_k(x)=\dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}\left[\left(x^2-1\right)^k\right]$ – поліноми Лежандра, а c_k знаходимо із системи лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{k}c_i^{(2)}\left[\int_\Omega\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx-\int_\Omega\int_\Omega K(x,s)\varphi_i(s)\varphi_j(x)dsdx\right]=$$

$$=\int_\Omega\int_\Omega G_{кв.}(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u_1^{\frac{3}{4}}\right)\right)\varphi_j(x)dsdx,\ j=1,2...,$$

$$\sum_{i=1}^{k}c_i^{(m)}\left[\int_\Omega\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx-\int_\Omega\int_\Omega K(x,s)\varphi_i(s)\varphi_j(x)dsdx\right]=$$

$$=\int_\Omega\int_\Omega G_{кв.}(x,s)\left(\lambda\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}u_{m-1,k}^{\frac{3}{4}}\right)\right)\varphi_j(x)dsdx,\ j=1,2...,k,$$

Для отримання розв’язку задачі використовуємо пакет Mathematica 11.2. В якості критерію зупинки оберемо

$$\max_{(x,y)\in\Omega}\left|u_m(x,y)-u_{m-1}(x,y)\right|<\varepsilon,\ \varepsilon=10^{-3}.$$

Розглянемо задачу при $\lambda_1 = 0,5$ та $a = 0,3, b = 1$ в трьох областях, що задані вище. На рис. 4.1 – 4.3 представлені поверхні наближення $u_{1,n}, n = 1,2,3$, а на рис. 4.4 – 4.6 – їхні лінії рівня. Аналітичний вигляд наближень наступний:

$$u_{1,1}(x,y) = 0,20332\,y(1-x^2-y^2) - 2,08792\cdot 10^{-8}\,xy(1-x^2-y^2) +$$
$$+0,00881(3x^2-1)y(1-x^2-y^2) - 0,08385\,y(2y-1)(1-x^2-y^2) -$$
$$-1,88135\cdot 10^{-7}\,xy(2y-1)(1-x^2-y^2) + 0,01947\,y(1-x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

$$u_{1,2}(x,y) = 0,52579\,xy(1-x^2-y^2) - 0,41962\,x^2y(1-x^2-y^2) +$$
$$+0,043119(3x^2-1)xy(1-x^2-y^2) - 0,16526\,xy(2y-1)(1-x^2-y^2) +$$
$$+0,03493\,x^2y(2y-1)(1-x^2-y^2) + 0,05439\,xy(1-x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

$$u_{1,3}(x,y) = 0,08158\,y(1-11,1x^2-y^2) + 5,54095\cdot 10^{-8}\,xy(1-11,1x^2-y^2) +$$
$$+0,02367(3x^2-1)y(1-11,1x^2-y^2) - 0,04467\,y(2y-1)(1-11,1x^2-y^2) -$$
$$-8,82326\cdot 10^{-7}\,xy(2y-1)(1-11,1x^2-y^2) +$$
$$+0,019125\,y(1-11,1x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

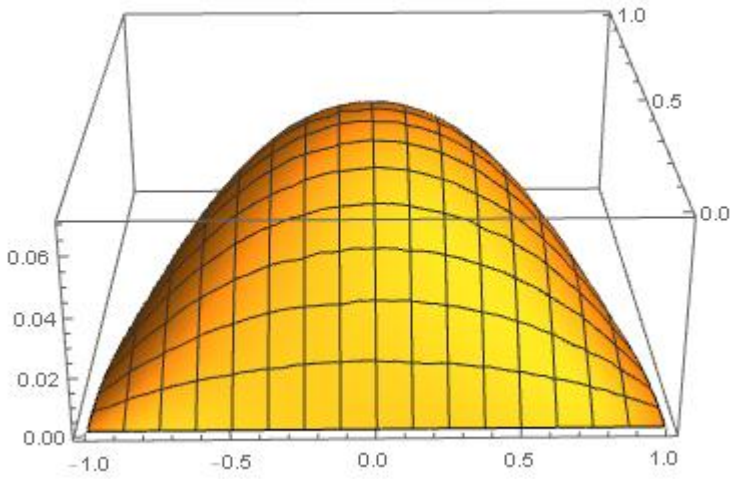

Рисунок 4.1 – Поверхня наближення $u_{1,1}$

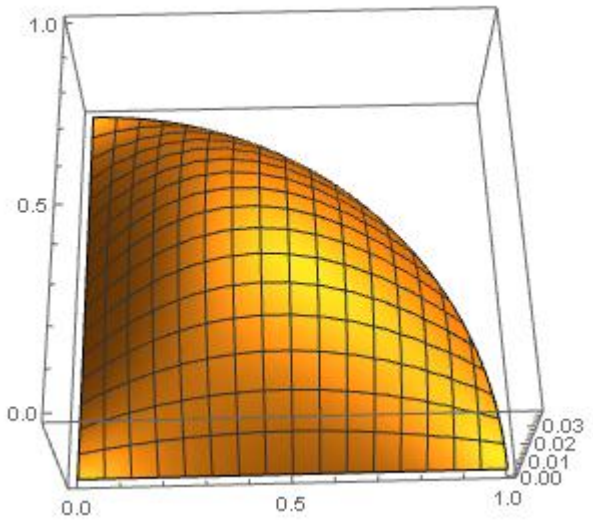

Рисунок 4.2 – Поверхня наближення $u_{1,2}$

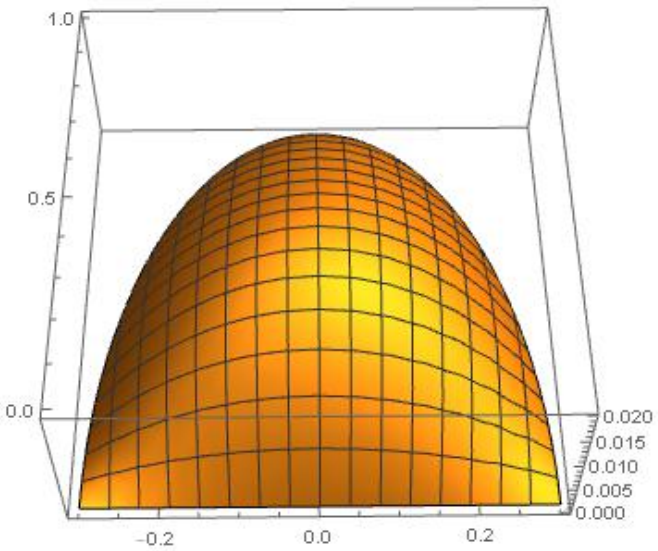

Рисунок 4.3 – Поверхня наближення $u_{1,3}$

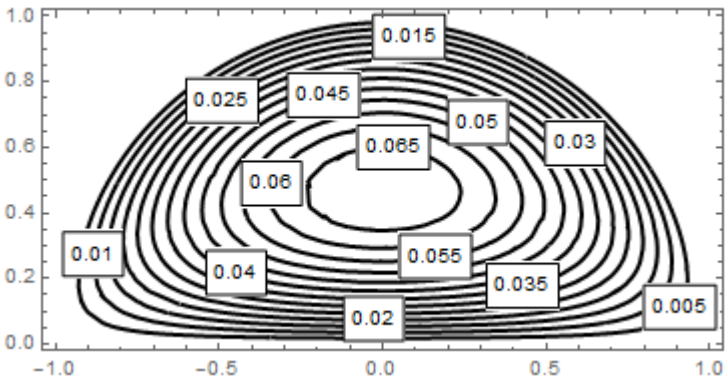

Рисунок 4.4 – Лінії рівня наближення $u_{1,1}$

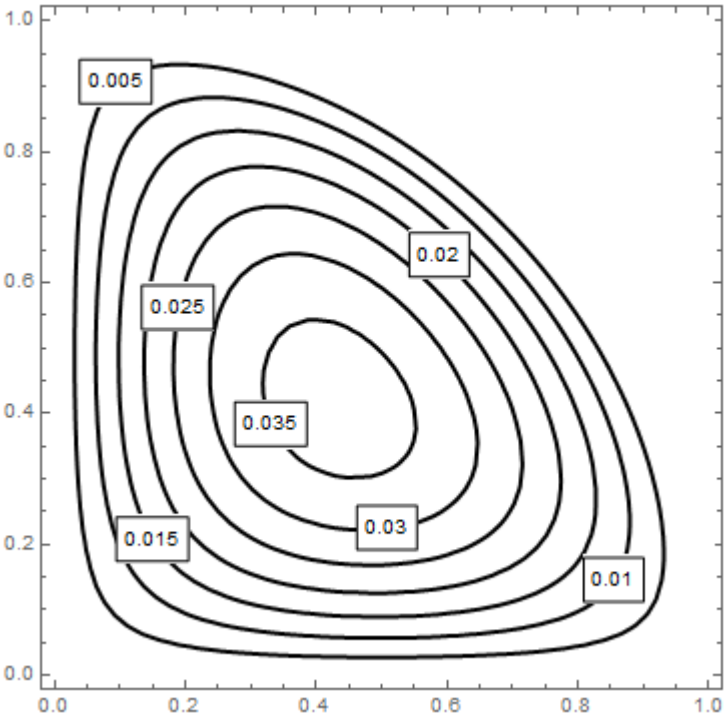

Рисунок 4.5 – Лінії рівня наближення $u_{1,2}$

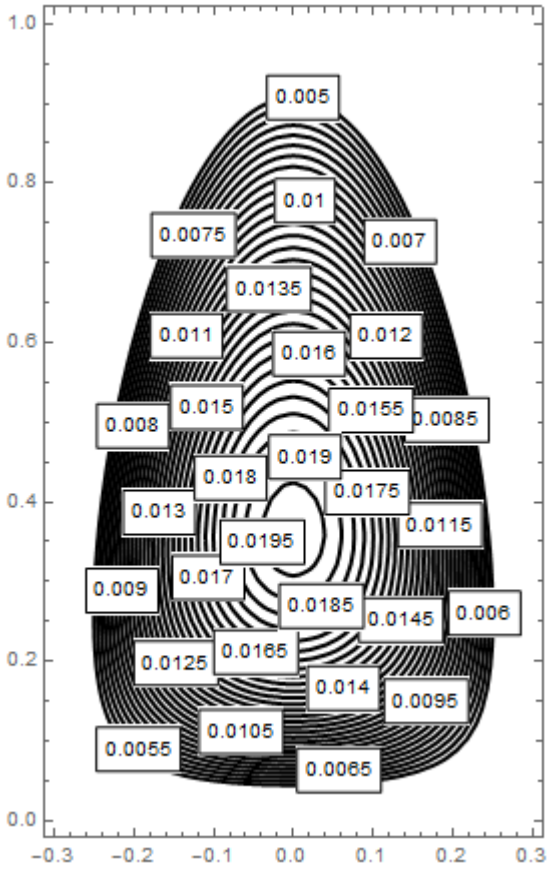

Рисунок 4.6 – Лінії рівня наближення $u_{1,3}$

Розглянемо задачу при $\lambda_2 = 3$ та $a = 0,3, b = 1$ в трьох областях. На рис. 4.7 – 4.9 представлені поверхні наближення $u_{2,n}, n = 1,2,3$, а на рис. 4.10 – 4.12 – їхні лінії рівня. Аналітичний вигляд наближень наступний:

$$u_{2,1}(x,y) = 1,69276y(1-x^2-y^2) - 1,80931\cdot 10^{-7}xy(1-x^2-y^2) -$$
$$-0,01748(3x^2-1)y(1-x^2-y^2) - 0,73484y(2y-1)(1-x^2-y^2) -$$
$$-1,69145\cdot 10^{-6}xy(2y-1)(1-x^2-y^2) + 0,103y(1-x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

$$u_{2,2}(x,y) = 4,91288xy(1-x^2-y^2) - 4,77893x^2y(1-x^2-y^2) +$$
$$+0,82635(3x^2-1)xy(1-x^2-y^2) - 1,72953xy(2y-1)(1-x^2-y^2) +$$
$$+1,16062x^2y(2y-1)(1-x^2-y^2) + 0,40914xy(1-x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

$$u_{2,3}(x,y) = 0,40293y(1-11,1x^2-y^2) + 3,321\cdot 10^{-7}xy(1-11,1x^2-y^2) -$$
$$-0,00189(3x^2-1)y(1-11,1x^2-y^2) - 0,31434y(2y-1)(1-11,1x^2-y^2) -$$
$$-3,41045\cdot 10^{-6}xy(2y-1)(1-11,1x^2-y^2) +$$
$$+0,1149y(1-11,1x^2-y^2)(1-6y+6y^2).$$

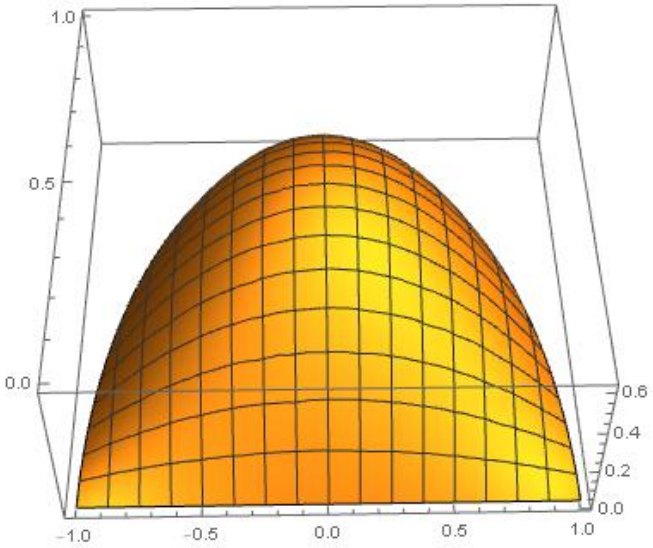

Рисунок 4.7 – Поверхня наближення $u_{2,1}$

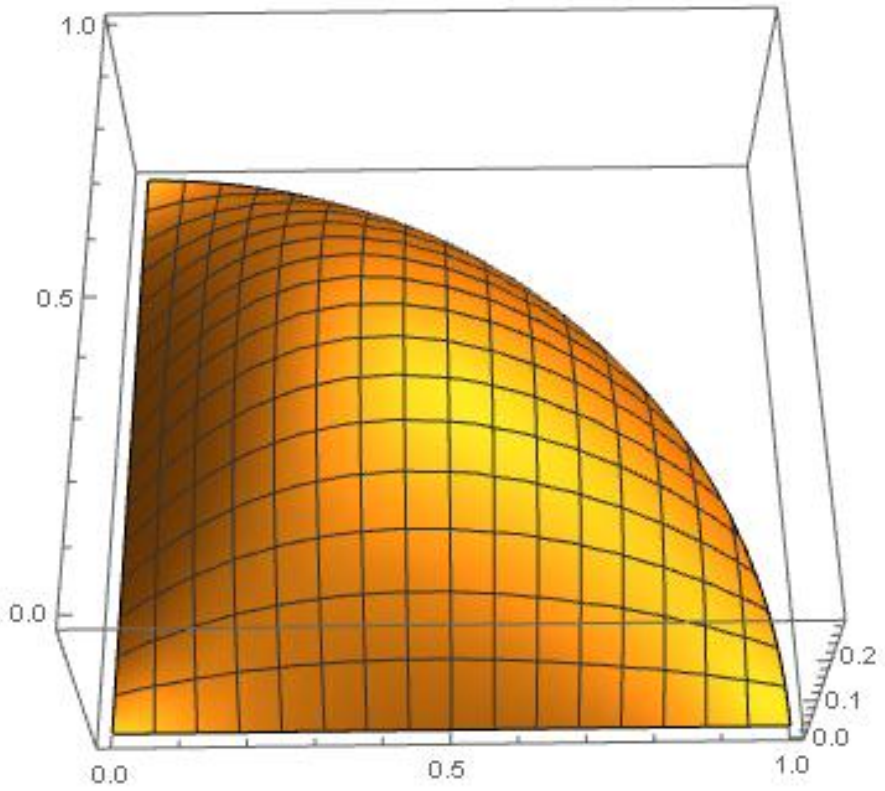

Рисунок 4.8 – Поверхня наближення $u_{2,2}$

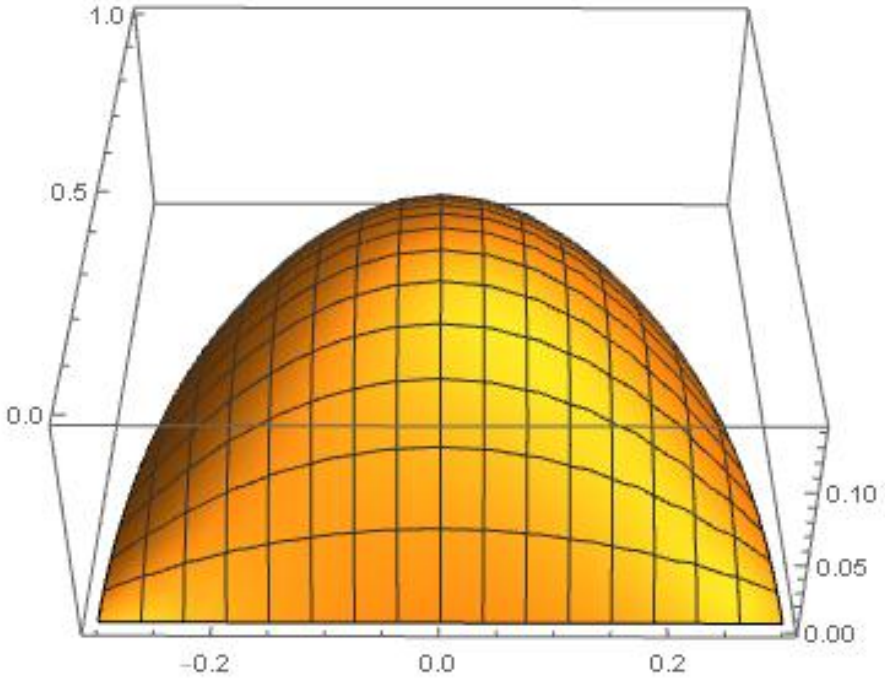

Рисунок 4.9 – Поверхня наближення $u_{2,3}$

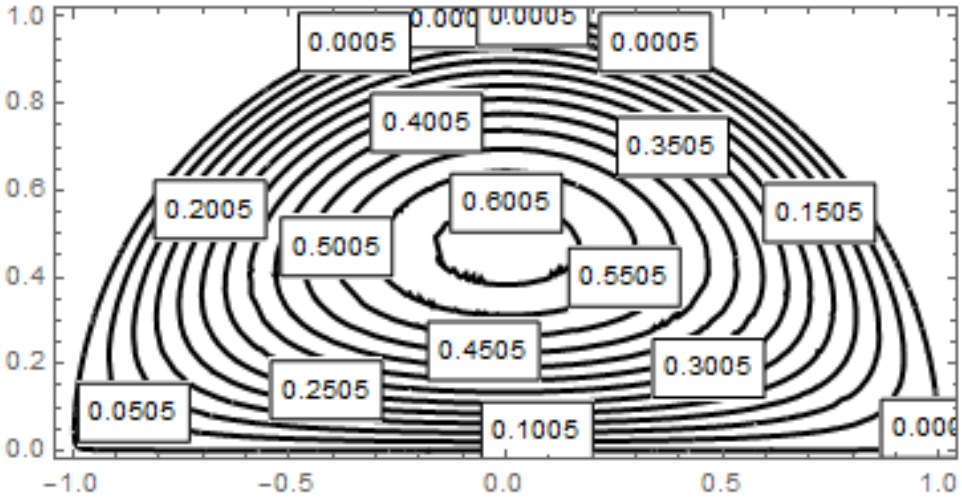

Рисунок 4.10 – Лінії рівня наближення $u_{2,1}$

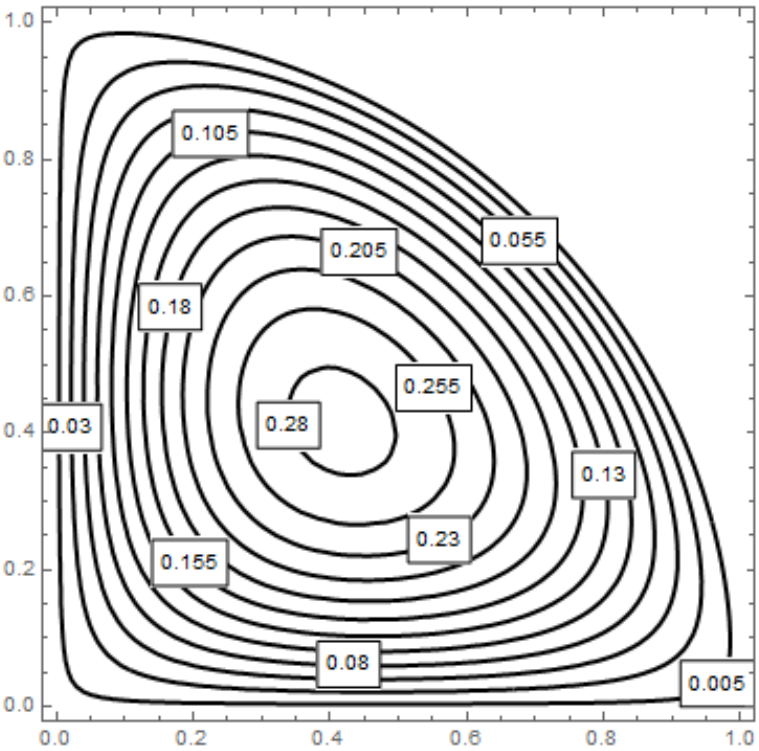

Рисунок 4.11 – Лінії рівня наближення $u_{2,2}$

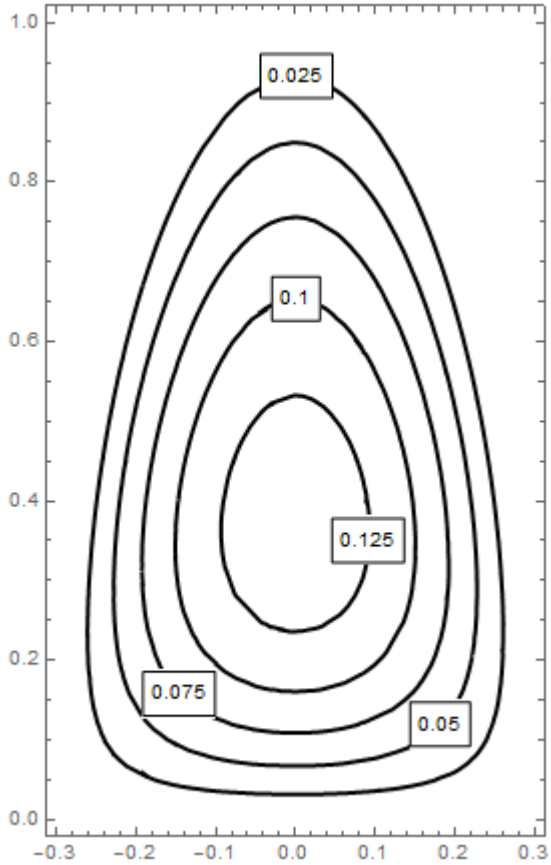

Рисунок 4.12 – Лінії рівня наближення $u_{2,3}$

Розглянемо задачу при $\lambda_3 = 10$ та $a = 0,3, b = 1$ в трьох областях. На рис. 4.13 – 4.15 представлені поверхні наближення $u_{3,n}, n = 1,2,3$, а на рис. 4.16 – 4.18 – їхні лінії рівня. Аналітичний вигляд наближень наступний:

$$u_{3,1}(x,y) = 13,2419y(1-x^2-y^2) - 1,54082\cdot 10^{-6}xy(1-x^2-y^2) -$$
$$-1,52496(3x^2-1)y(1-x^2-y^2) - 6,2757y(2y-1)(1-x^2-y^2) -$$
$$-1,4824\cdot 10^{-5}xy(2y-1)(1-x^2-y^2) - 0,02408y(1-x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

$$u_{3,2}(x,y) = 25,3868xy(1-x^2-y^2) - 23,1482x^2y(1-x^2-y^2) +$$
$$+2,98969(3x^2-1)xy(1-x^2-y^2) - 10,6215xy(2y-1)(1-x^2-y^2) +$$
$$+7,10895x^2y(2y-1)(1-x^2-y^2) + 1,36068xy(1-x^2-y^2)(1-6y+6y^2),$$

$$u_{3,3}(x,y) = 1,3671y(1-11,1x^2-y^2)+1,37281\cdot 10^{-6}xy(1-11,1x^2-y^2)-$$
$$-0,46469(3x^2-1)y(1-11,1x^2-y^2)-1,4833y(2y-1)(1-11,1x^2-y^2)-$$
$$-7,88542\cdot 10^{-6}xy(2y-1)(1-11,1x^2-y^2)+$$
$$+0,43229y(1-11,1x^2-y^2)(1-6y+6y^2).$$

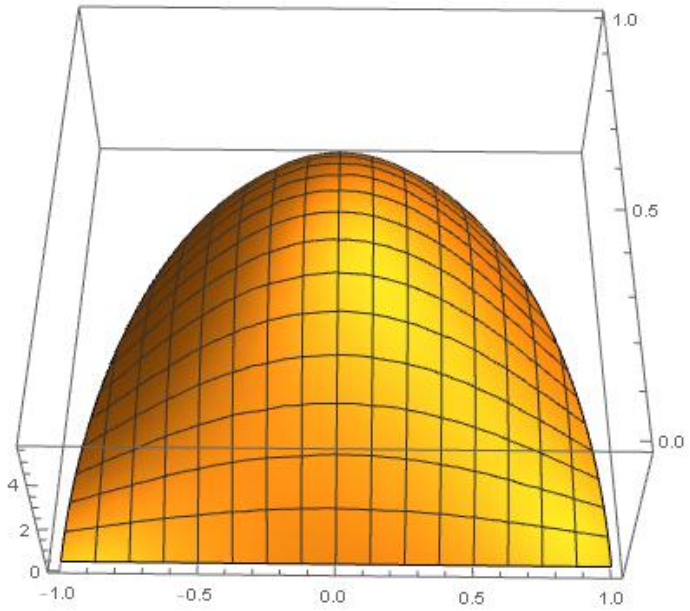

Рисунок 4.13 – Поверхня наближення $u_{3,1}$

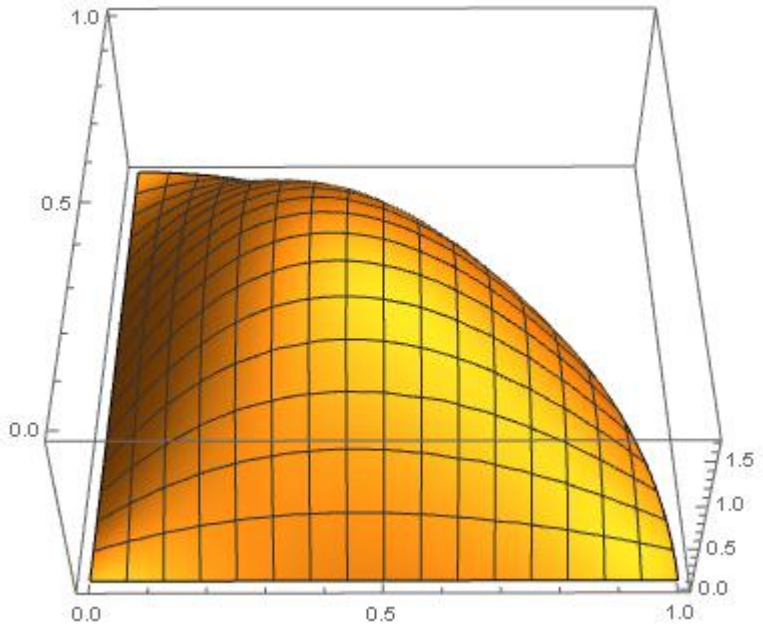

Рисунок 4.14 – Поверхня наближення $u_{3,2}$

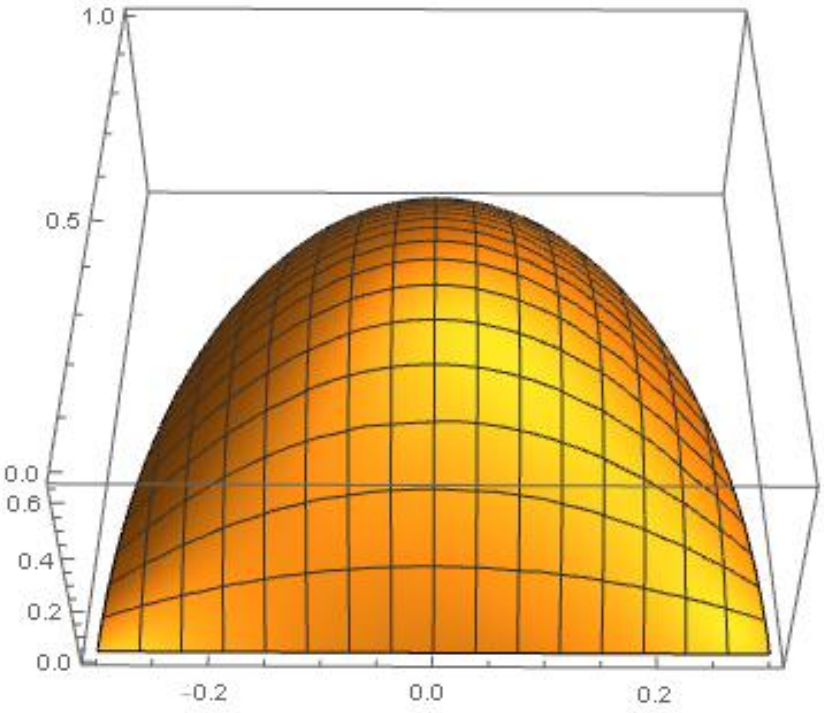

Рисунок 4.15 – Поверхня наближення $u_{3,3}$

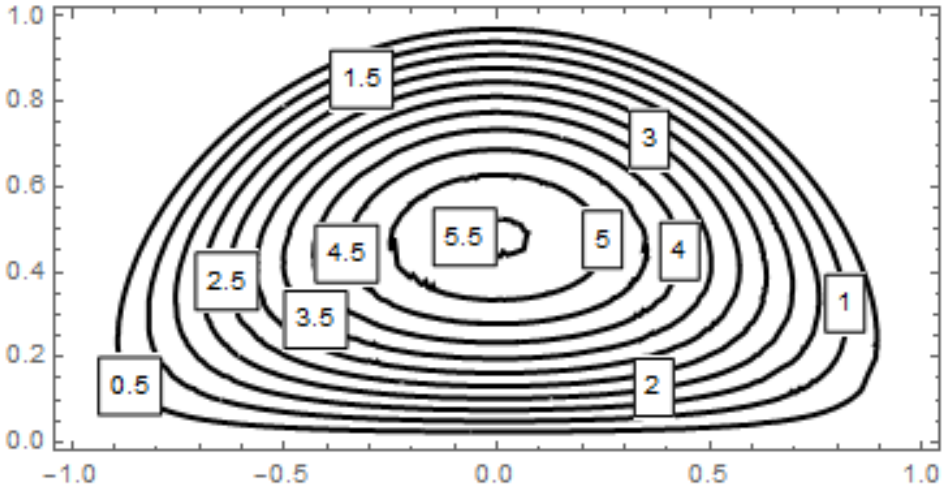

Рисунок 4.16 – Лінії рівня наближення $u_{3,1}$

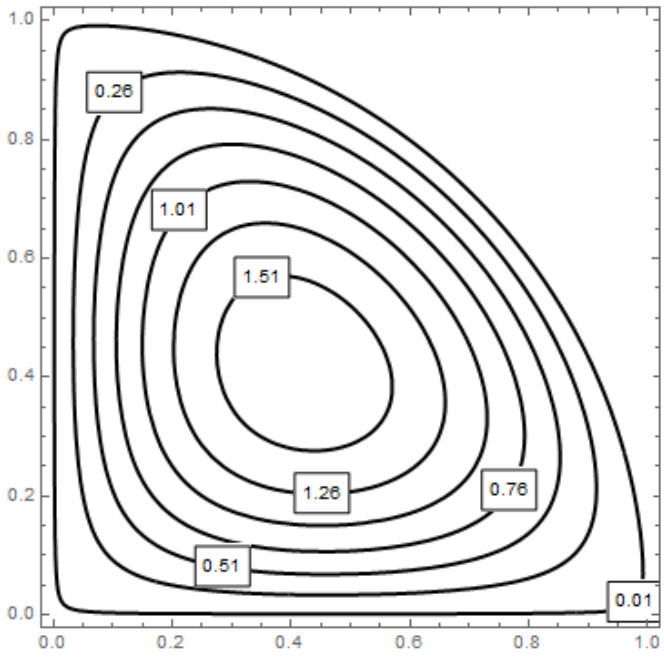

Рисунок 4.17 – Лінії рівня наближення $u_{3,2}$

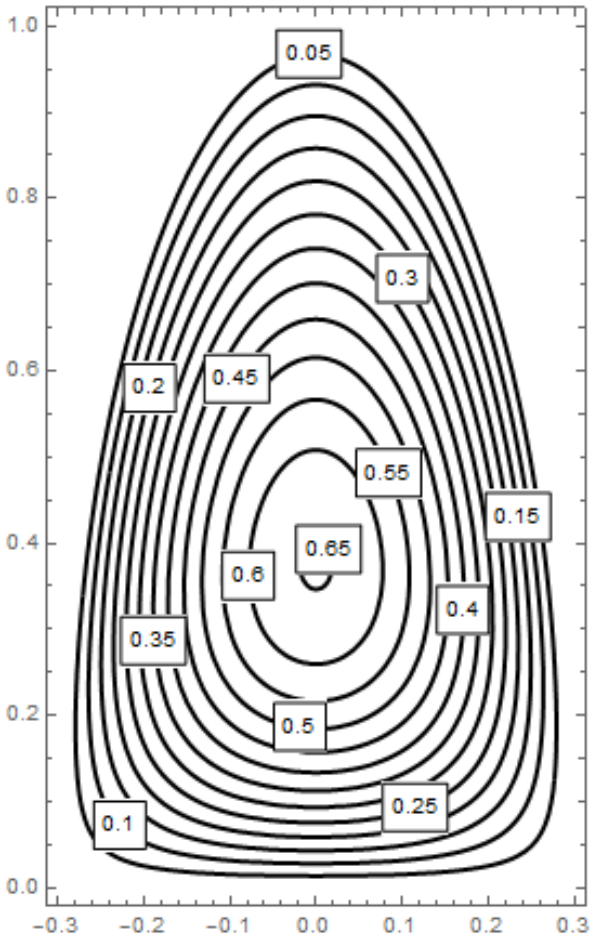

Рисунок 4.18 – Лінії рівня наближення $u_{3,3}$

4.2 Достовірність отриманих результатів

Для досліджуваної задачі неможливо одержати точний розв'язок та немає ніяких експериментальних даних, з якими можна було б зробити порівняння отриманого нами наближеного розв'язку, тому ми порівняємо результати, отримані у атестаційній роботі методом квазіфункцій Гріна, з результатами, отриманими іншим методом, а саме методом послідовних наближень, для цієї ж задачі.

Порівняння результатів, отриманих обома методами в рамках проведених у роботі експериментів, наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Порівняння отриманих результатів

$\lambda \setminus \Omega$	Ω_1	Ω_2	$\Omega_3(a=0,3, b=1)$
$0,5$	$0,595 \cdot 10^{-1}$	$0,319 \cdot 10^{-1}$	$0,168 \cdot 10^{-1}$
3	$0,558$	$0,253$	$0,121$
10	$5,284$	$1,561$	$0,584$

Як бачимо, різниця збільшується при збільшенні значення параметра λ ,

Також можна побачити залежність різниці між результатами, отриманими за допомогою двох вказаних вище методів, від області, на якій задана крайова задача. При $\lambda<1, a<1, b<1$ точність є достатньо високою, що дозволяє вважати результати достовірними.

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Багато явищ в різних галузях природознавства таких, як фізика, хімія, біологія та інші, достатньо точно можуть бути описані диференціальними рівняннями. Однак точні розв’язки крайових задач для диференціальних рівнянь можна отримати для дуже вузького класу задач. Зазвичай, це доволі прості рівняння, задані в простих областях.

В сучасній науці спостерігається велика зацікавленість до процесів, які відбуваються у нелінійних середовищах. Математичними моделями процесів у нелінійних середовищах є нелінійні крайові задачі математичної фізики, оскільки лінійні задачі не зовсім адекватно описують фізичну реальність.

Також слід відмітити, що є досить велика кількість моделей в математичній фізиці, для дослідження поведінки яких можна використовувати метод квазіфункцій Гріна та метод послідовних наближень.

ВИСНОВКИ

Велика частина способів наближеного розв’язку задачі пов’язана з ідеєю послідовних наближень. Ця ідея застосовується не тільки для розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь, а й для розв’язань ряду практичних задач.

В результаті виконання даної атестаційної роботи був отриманий розв’язок крайової задачі для нелінійного еліптичного рівняння за допомогою методу квазіфункцій Гріна та порівняний з розв’язком, отриманим методом послідовних наближень. Для обчислень та графічного представлення результатів роботи використовувався математичний пакет Mathematica 11.2. За результатами роботи можна зробити висновок, що метод квазіфункцій Гріна, як і метод послідовних наближень, можна застосовувати до крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь в областях складної геометрії.

Проведено системний аналіз системи «Розв’язати крайову задачу для нелінійного еліптичного рівняння»: наведені вербальна, морфологічна, функціональна, інформаційна моделі системи. За допомогою методу аналізу ієрархій проведена оцінка та надані рекомендації щодо вибору методу вирішення задачі.

Було запропоновано застосування методу квазіфункцій Гріна для розв’язання крайових задач для нелінійного еліптичного рівняння в областях складної геометрії.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. Москва : Наука, 1972. 688 с.

2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1977. 742 с.

4. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів : Видавничий центр ЛНУ, 2004. 221 с.

5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва : Наука, 1952. 392 с.

6. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. Москва : Наука, 1974. 432 с.

7. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Москва : Физматгиз, 1962. 767 с.

8. Тевяшев А. Д., Кривошеева Г. М. Методические указания по дипломному проектированию. Харьков : ХНУРЭ, 2012. 39 с.

9. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.

10. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій: навч. посіб. Київ : Либідь, 1993. 248 с.

11. Тевяшев А. Д., Колосова С. В., Сидоров М. В. Вибрані глави математичної фізики у прикладах та задачах : навч. посіб. Харків : ХНУРЕ, 2007. 340 с.

12. Красносельский М. А. Положительное решение операторных уравнений. Москва : Физматгиз, 1962. 394 с.