МЕТОД АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ КАК СРЕДСТВО МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Золотарев Д.А.
Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. Нерух А.Г.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. Высшей математики,
тел. (057) 702-13-72)
e-mail: hm@kture.kharkov.ua

The approximation functions method for solution of an integral equation is considered. A nonlinear 2D Volterra integral equation which describes electromagnetic wave propagation in a nonlinear layer is solved by this method. Original software for computer modeling of such an algorithm is developed and numerical results are presented.

Метод аппроксимирующих функций позволяет не только успешно рассчитывать /моделировать поля в плоско-слоистых одномерных средах, но и также производить различные манипуляции с таблично заданными полями, как если бы это были аналитические функции.

Предметом рассмотрения является в общем случае нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$u(t,x)+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^L \Phi(t,x,t',x',u)\,dx'dt' = f(t,x) \tag{8}$$

где $f(x,t)$ – свободный член, $\Phi(t,x,t',x',u)$ – ядро уравнения и $u(t,x)$ – искомая функция двух переменных, L некоторая константа. Эта функция определена в прямоугольнике $(t,\mathrm{x})\in[0,a]\times[0,b]$.

Для решения уравнения (8) неизвестная функция аппроксимируется суммой функций $\hat{u}_{i,j}(t,x)$:

$$u(t,x)\approx\hat{u}(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\hat{u}_{i,j}(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}c_{i+k,j+l}\cdot T_{ij}^{k,l}(t,x)\right], \tag{9}$$

где каждая функция $\hat{u}_{i,j}(t,x)$ определена в (i,j)-ячейке сетки, являющейся полуоткрытым квадратом

$$\{ih\le t<(i+1)h,\ jh\le x<(j+1)h\},\ \ i=\overline{0,\text{n-1}},\ \ j=\overline{0,\text{m-1}} \tag{10}$$

и представляет собой сумму аппроксимирующих полиномов $\left\{T_{ij}^{kl}(t,x),k=\overline{0,1},\ l=\overline{0,1}\right\}$ с соответствующими весовыми множителями. Здесь h шаг сетки, являющейся результатом разбиения всей области определения функции $u(t,x)$. На открытых границах (i,j)-квадратов ($t\in[ih,(i+1)h],x=(j+1)h$ и $x\in[jh,(j+1)h],t=(i+1)h$) функции $\hat{u}_{i,j}(t,x)$ соседних квадратов равны.

Перенеся в (8) функцию $f(t,x)$ в левую часть, обозначив получившееся выражение как $\Psi(t,x)$ и вычислив его в точках $\left(t_i, x_j\right)$, $i=\overline{0,\mathrm{n}}, j=\overline{0,\mathrm{m}}$ получим систему алгебраических уравнений для весовых множителей $c_{i,j}$:

$$\begin{gathered}
\Psi_{i,j}=c_{i,j}-f\left(t_i,x_j\right)+\\
+\sum_{k=0}^{i-2}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{\partial}{\partial t}\int_{kh}^{(k+1)h}\int_{lh}^{(l+1)h}\Phi\left(\begin{array}{l}t,x,t',x',\\ c_{k,l},c_{k+1,l},c_{k,l+1},c_{k+1,l+1},T_{k,l}^{00},T_{k,l+1}^{01},T_{k+1,l}^{10},T_{k+1,l+1}^{11}\end{array}\right)dt'dx'\Bigg|_{\substack{t=t_i\\ x=x_j}}+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int_{(i-1)h}^{t}\sum_{l=0}^{j-1}\int_{lh}^{(l+1)h}\Phi\left(\begin{array}{l}t,x,t',x',\\ c_{i-1,j-1},c_{i,j-1},c_{i-1,j},c_{i,j},T_{i-1,j-1}^{00},T_{i-1,j}^{01},T_{i,j-1}^{10},T_{i,j}^{11}\end{array}\right)dt'dx'\Bigg|_{\substack{t=t_i\\ x=x_j}}\\
i=\overline{0,\mathrm{n}},\ j=\overline{0,\mathrm{m}}
\end{gathered}\tag{11}$$

Эта система может быть решена любым методом решения систем нелинейных алгебраических уравнений. В нашем случае используется классический метод Ньютона.

Описанный метод, названый методом аппроксимирующих функций (МАФ), является частным случаем широко известного метода конечных элементов (МКЭ).

В качестве аппроксимирующих полиномов выбраны следующие функции:

$$\begin{gathered}
T_{ij}^{00}(t,x)=\left(1-\frac{t-ih}{h}\right)\left(1-\frac{x-jh}{h}\right),\ T_{ij}^{10}(t,x)=\left(\frac{t-ih}{h}\right)\left(1-\frac{x-jh}{h}\right),\\
T_{ij}^{01}(t,x)=\left(1-\frac{t-ih}{h}\right)\left(\frac{x-jh}{h}\right),\ T_{ij}^{11}(t,x)=\left(\frac{t-ih}{h}\right)\left(\frac{x-jh}{h}\right),
\end{gathered}\tag{12}$$

Его особенностью является простота программной реализации за счет квадратных областей и возможность проводить некоторые аналитические операции с таблично заданными функциями, так как неизвестные коэффициенты в (11) есть не что иное, как значения функции в узлах сетки.

Такой подход позволяет интегрировать и дифференцировать сеточную функцию как обычную аналитическую с определенной погрешностью. Погрешность может быть уменьшена за счет:

– уменьшения шага сетки,

– увеличения степени аппроксимирующих полиномов (12).

Данным методом были рассчитаны поля внутри одномерного слоя для хорошо изученных функций: гармонической волны $E_0(\tau,\xi)=\cos(\xi-\tau)$ и гауссова импульса $E_0(\tau,\xi)=e^{-(\tau-\tau_0-\xi)^2/2\sigma^2}$. Для первой сравнение коэффициента отражения/прохождения с точными значениями дало погрешность в 6-й значащей цифре после запятой. Для второго был проверен баланс энергий, что дало погрешность менее 2%.