менты которой $a_{ij}(1 \le i, j \le n)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_{ii} \le 0 \quad 1 \le i \le n$;

2) $a_{ij} \ge 0 \quad 1 \le i, j \le n, i \ne j$;

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad 1 \le i \le n$.

Пусть ρ – максимальный по модулю диагональный элемент матрицы A. Из условия 1 следует, что ρ – максимальный по модулю отрицательный элемент матрицы A, а из условий 2 и 3 следует, что ρ – максимальный по модулю элемент матрицы A.

Построим матрицу следующим образом:

$$B = (A + |\rho| E)/|\rho|,$$

где E – единичная матрица. Элементы матрицы $b_{ij}(1 \le i, j \le n)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $0 \le b_{ij} \le 1$, $1 \le i, j \le n$;

2) $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$, $1 \le i \le n$.

Таким образом, матрица A является стохастической. Найдем границы множества собственных значений квазистохастической матрицы A. Пусть некоторое число λ_0 является характеристическим корнем матрицы A. Тогда оно удовлетворяет характеристическому уравнению матрицы A:

$$|A - \lambda_0 E| = 0,$$

$$||\rho|(B - E) - \lambda_0 E| = 0,$$

$$||\rho| B - (\lambda_0 + |\rho|)E/|\rho|| = 0.$$

Таким образом, число $(\lambda_0 + |\rho|)/|\rho|$ удовлетворяет характеристическому уравнению матрицы B и, следовательно, является характеристическим корнем стохастической матрицы B.

Обозначим множество характеристических корней всех квазистохастических матриц n-го порядка с максимальным по модулю элементом ρ через K_n^ρ. Из сказанного следует, что все элементы множества K_n^ρ получаются из элементов множества M_n умножением на число $|\rho|$ и вычитанием числа $|\rho|$. Таким образом, для квазистохастических матриц n-го порядка с максимальным по модулю элементом ρ справедливы следующие утверждения:

K_2^ρ представляет собой отрезок действительной оси $[-2|\rho|, 0]$. K_3^ρ представляет объединение треугольника с вершинами в точках (0,0), $|\rho|\exp(2\pi i/3) - |\rho|$, $|\rho|\exp(4\pi i/3) - |\rho|$ с отрезком действительной оси $[-2|\rho|, 0]$.

Для $n > 3$ фигура K_n^ρ заключена в круге $|z + |\rho|| \le |\rho|$ и имеет с окружностью $|z + |\rho|| = |\rho|$ общие точки $|\rho|\exp(2\pi i a/b) - |\rho|$, где $0 \le a < b \le n$. Граница K_n^ρ состоит из этих точек и соединяющих их в круговом порядке криволинейных дуг.

Отрезки границы множества K_n^ρ, проходящие через точку комплексной плоскости (0,0), представляют собой отрезки прямых, соединяющих точки $|\rho|\exp(2\pi i(n-1)/n) - |\rho|$ и (0,0), (0,0) и $|\rho|\exp(2\pi i/n) - |\rho|$ соответственно.

Литература: 1. *Дмитриев Н.А., Дынкин Е.Б.* Характеристические корни стохастических матриц // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1946. №10. С.167-184. 2. *Карпелевич Ф.И.* О корнях матриц с неотрицательными элементами // Изв. АН СССР. Серия математчиеская. 1951. № 15. С.361-383.

Поступила в редколлегию 22.09.98

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Веприк Александр Ефимович, научный сотрудник кафедры ПМ ХТУРЭ. Адрес: Украина, Харьков, ул. Командарма Уборевича, 20-А, кв.10, тел. 65-90-38.

УДК 519.217.8

ДОСТИЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

ВЕПРИК А.Е.

Рассматривается однородный марковский случайный процесс с непрерывным временем, для которого выполняются условия сходимости к стационарному распределению. Предлагается способ управления параметрами процесса в целях достижения стационарного распределения марковского процесса за конечное время.

Рассмотрим однородный марковский случайный процесс с непрерывным временем x(t) и конечным состоянием n. Такой процесс рассмотрен в [1]. Пусть для этого процесса выполнены условия теоремы о сходимости к стационарному распределению. Тогда существует набор стационарных вероятностей, к которым стремятся с течением времени соответствующие вероятности нахождения данного процесса в его состояниях, причем этот набор единственен. Ставится задача управления значениями параметров однородного марковского случайного процесса в целях ускорения достижения вероятностями нахождения данного процесса в его состояниях стационарных вероятностей. Для решения этой задачи разработан алгоритм управления значениями параметров данного процесса.

Лемма 1. Рассмотрим однородный марковский процесс с конечным числом состояний n и параметрами $\lambda_{ij}(1 \le i, j \le n)$. Пусть для этого процесса выполняются условия теоремы о сходимости к стационарному распределению, причем все стационарные вероятности не равны нулю: $p_i^* \ne 0, \quad 1 \le i \le n.$

Определим матрицу A следующим образом:

$$a_{ij} = p_j^* \pi_{ji}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

Рассмотрим произвольный набор несовпадающих номеров $(d_1,\dots,d_m) \subset (1,\dots,n), \quad 1 \le m \le n$. Тогда для элементов матрицы B, определяемой формулами $b_{ij} = a_{k_j k_j} \quad (k_i \in (d_i,\dots,d_m), 1 \le i, j \le m)$, выполняется условие $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} \le 0 \quad (1 \le j \le n)$, и существует такой номер $l \in (d_1,\dots,d_n)$, что $\sum_{i=1}^{m} b_{il} < 0$. (Доказательство см. в работе [2]).

Лемма 2.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$Az = b, \qquad (1)$$

где $A \in R^{nxn}, z \in R^n, b \in R^n$.

Пусть выполняются условия:

1. $a_{ii} < 0 \ \forall i;$
2. $a_{ij} \ge 0 \ \forall i \ne j;$
3. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 0, 1 \le j \le n; \exists l, 1 \le l \le n, \sum_{i=1}^{n} a_{il} < 0;$
4. $b_i \le 0 \ \forall i, b_1 < 0;$
5. $b_i = 0 \Rightarrow \exists l, 1 \le l < 0, a_{il} > 0;$
6. Для любого набора несовпадающих номеров $(d_1,\dots,d_m) \subset (1,\dots,n), \quad 1 \le m \le n$ условие выполняется. (Доказательство см. в работе [2]).

Перейдем к рассмотрению собственно алгоритма. Предположим, что начальное распределение вероятностей имеет следующий вид. Вероятность нахождения процесса в одном из состояний в начальный момент времени равна единице, во всех остальных она равна нулю. Основная идея алгоритма заключается в следующем. В момент времени t=0 считаем, что $\lambda_i(t) = 0$ для всех состояний, кроме состояния ν, в котором начальная вероятность не равна нулю. λ_i зависят от t, так как мы будем изменять их с течением времени. На каждом шаге алгоритма вероятность нахождения процесса достигает стационарного значения в одном или нескольких состояниях. С каждым шагом число состояний, вероятности нахождения процесса в которых достигли стационарных значений, увеличивается. В момент достижения стационарных значений в новых на данном шаге состояниях параметры λ_i изменяются таким образом, чтобы, начиная с этого момента времени, значения вероятностей нахождения процесса в этих состояниях не изменялись, т. е. в любой момент времени после момента достижения были равны стационарным вероятностям. Параметры λ_i для состояний, в которых стационарные значения еще не достигнуты, равны нулю. Параметр λ_ν остается неизменным всегда.

Пусть завершился k-й шаг алгоритма (перенумеруем состояния по порядку достижения в них стационарных вероятностей, нулевой номер присвоим состоянию ν). Вероятности нахождения процесса в состояниях с 1-го по k-е удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Колмогорова [1]:

$$p_i'(t) = \lambda_0 \pi_{0i} p_0(t) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \pi_{ji} p_j(t) \quad 1 \le i \le k.$$

Требуя сохранения стационарных значений вероятностей $p_i(t) \ (1 \le i \le k)$, имеем

$$\lambda_0 \pi_{0i} p_0(t) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \pi_{ji} p_j^* = 0 \quad 1 \le i \le k,$$

$$p_0(t) > 0 \quad \forall t \ge 0,$$

$$\lambda_0 \pi_{0i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{p_0(t)} \pi_{ji} p_j^* = 0 \quad 1 \le i \le k.$$

Пусть $\lambda_i = z_i p_0(t)$, где z_i неизвестный коэффициент, подлежащий определению:

$$\lambda_0 \pi_{0i} + \sum_{j=1}^{k} z_j \pi_{ji} p_j^* = 0 \quad 1 \le i \le k. \qquad (2)$$

Решив систему (2), находим коэффициенты z_i и вычисляем необходимые значения $\lambda_i = z_i p_0(t)$. Система (2) удовлетворяет условиям 1–6 леммы 2 для $1 \le k < n$. Следовательно, она имеет единственное решение $z_i > 0 \quad 1 \le i \le k$.

Докажем конечность промежутка времени, за который при работе алгоритма вероятности нахождения процесса во всех его состояниях достигают стационарных значений. В начальный момент времени $t = 0$ все параметры $\lambda_i = 0$, кроме λ_0. Тогда для всех i таких, что $\pi_{0i} > 0$: $p_i'(t) = \pi_{0i} \lambda_0 p_0(t)$.

Так как до того момента времени, когда

$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 - p_0^* \quad p_0(t) > p_0^*$, то $p_i'(t) > \pi_{0i} \lambda_0 p_0^*$.

Следовательно, промежуток времени

$$t_i^* (p_i(t) < p_i^* \ \forall t < t_i^*; p_i(t) \ge p_i^* \ \forall t \ge t_i^*$$

конечен.

Выбираем $t_1 = \min t_i^*$. $\lambda_1(t)$ выбирается таким образом, чтобы $p_1(t) = p_1^* \ \forall t \ge t_1^*$.

Пусть стационарные вероятности достигнуты в m-1 вершинах. Тогда решается система (1) для k=m-1, которая имеет единственное решение:

$$z_j > 0 \ \ 1 \le j \le m-1.$$

Полагаем $\lambda_j = z_j p_0(t) \ (1 \le j \le k-1; t_{m-1}^* \le t \le t_m^*)$.

Для состояний j таких, что

$$m \le j \le n-1, \pi_{ij} > 0, 1 \le i \le m-1,$$

$$p_j'(t) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} p_i^* \pi_{ij} z_i + \lambda_0 \pi_{0j} \right) p_0(t),$$

$$p_j'(t) > \text{const} > 0 \quad (m \le j \le n-1).$$

Следовательно, промежуток времени t_m^* тоже конечен для всех m. В момент времени t_{n-1}^* стационарные значения достигнуты в состояниях с 1-го по (n-1)-е. Значит, и $p_0(t) = p_0^*$. Следовательно, если число состояний конечно, то промежуток времени, за который при работе алгоритма вероятности нахождения процесса во всех состояниях достигают стационарных значений, конечен. Оценим этот промежуток времени. Очевидно, что он совпадает со временем достижения стационарного значения вероятностью нахождения процесса в состоянии 0:

$$p_0(t) = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(t)\pi_{i0}p_i(t) - \lambda_0\right)t\right\}.$$

Тогда

$$p_0^* = \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n-1}p_i^*\pi_{i0}z_i(t_0^*)p_0^* - \lambda_0\right)t\right\},$$

$$t_0^* = \frac{\ln p_0^*}{\sum_{i=1}^{n-1}p_i^*\pi_{i0}z_i(t_0^*)p_0^* - \lambda_0}.$$

Вычислим

$$\sum_{i=1}^{n-1}p_i^*\pi_{i0}z_i(t_0^*)p_0^* = p_0^*\sum_{i=1}^{n-1}p_i^*\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\pi_{ij}\right)z_i(t_0^*) =$$

$$= -p_0^*\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}p_i^*\pi_{ij}z_i(t_0^*) = p_0^*\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_0\pi_{0j} = p_0^*\lambda_0.$$

Тогда

$$t_0^* = \frac{\ln p_0^*}{\lambda\lambda_0\left(p_0^* - 1\right)}.$$

Литература: 1. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука. 1989. 312 с. 2. *Веприк А.Е., Герасин С.А., Дикарев В.А., Родзинский А.А., Числин Н.И.* Методы и алгоритмы фокусировки распределений марковских процессов. Харьков, 1997. 159 с.

Поступила в редколлегию 27.09.98

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Веприк Александр Ефимович, научный сотрудник кафедры ПМ ХТУРЭ. Адрес: Украина, Харьков, ул. Командарма Уборевича, 20-А, кв.10, тел. 65-90-38.

УДК 681.513.7

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ТАКСОНОМИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

БОДЯНСКИЙ Е.В., ЛЮБЧИК Л.М., МАТУСОВСКИЙ Г.А., ПЛИСС И.П.

Предлагается алгоритм сжатия массивов финансово-экономической информации на основе таксономического показателя уровня развития. Процедура предназначается для работы в режиме реального времени и реализована с помощью нейросетевой технологии.

В настоящее время в социально-экономических, экономико-математических, математико-криминалистических [1-4] исследованиях для анализа объектов и систем с большим числом показателей используются таксономические процедуры классификации [5]. Они основаны на расчете так называемого таксономического показателя уровня развития, представляющего собой синтетическую величину. Последняя включает в себя все множество контролируемых технических, экономических, финансовых и других показателей и позволяет ответить на вопросы: насколько хорошо или плохо функционировал объект в каждый текущий момент контроля; каков его рейтинг в системе аналогичных объектов; какие показатели "виновны" в плохих результатах (низком рейтинге); каким должен быть гипотетический эталонный объект и насколько далеко наш контролируемый объект отстоит от эталона.

Рассмотрим процесс построения таксономического показателя уровня развития для объекта с n технико-экономическими и финансовыми показателями, наблюдавшегося на временном интервале от 1 до t.

Первым этапом является построение $(t \times n)$ матрицы наблюдений

$$X_t = \begin{pmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \ldots & \hat{x}_{1k} & \check{x}_{1,k+1} & \ldots & \check{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \ldots & \hat{x}_{2k} & \check{x}_{2,k+1} & \ldots & \check{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{x}_{i1} & \hat{x}_{i2} & \ldots & \hat{x}_{ik} & \check{x}_{i,k+1} & \ldots & \check{x}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{x}_{t1} & \hat{x}_{t2} & \ldots & \hat{x}_{tk} & \check{x}_{t,k+1} & \ldots & \check{x}_{tn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

содержащей t строк, которые соответствуют разным моментам времени контроля, и n столбцов, отвечающих разным показателям. Таким образом, x_{im} – это значение m-го показателя в i-й момент времени. Все показатели в матрице X_t разбиты на две группы: показатели-стимуляторы и показатели-дестимуляторы, которые отличаются тем, что если увеличение значения показателя улучшает общее состояние объекта, то это стимулятор, если же наоборот (чем больше показатель, тем хуже) – то это дестимулятор. Показатели-стимуляторы будем обозначать с помощью символа $\wedge$, дестимуляторы – $\vee$. Если же в процессе вычислений разделение на стимуляторы и дестимуляторы непринципиально – символы $\wedge$ и $\vee$ не используются. С формальной точки зрения такое разбиение соответствует введению двух подмножеств: стимуляторов $\hat{x}_{i1} \ldots \hat{x}_{ik}$ таких, что $\hat{x}_{ij} \succ \hat{x}_{i+1,j}$, если $\hat{x}_{ij} > \hat{x}_{i+1,j}$, $j = 1,2,\ldots,k$, и дестимуляторов $\check{x}_{i,k+1} \ldots \check{x}_{in}$ таких, что $\check{x}_{il} \succ \check{x}_{i+1,l}$, если $\check{x}_{il} < \check{x}_{i+1,l}$, $l = k+1,\ldots,n$.