УДК 519.82

*В. А. ГОРБАЧЕВ, В. В. МАТЕЙЧЕНКО, А. Д. ТЕВЯШЕВ*

# РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ И ПРОВЕРКА ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОМ ВЕРОЯТНОСТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При обработке наблюдений в большом классе задач применени широко распространенного алгоритма наименьших квадратов дае худшие результаты, чем другие методы. Это обусловлено, во-пер вых, тем, что наблюдаемые данные часто составляют группы с ра личными, в общем случае неизвестными точностными характери стиками, т. е. представляют собой неравноточные системы наблю дений, в которых закон распределения ошибок отличен от нормалı ного [1]. Метод наименьших квадратов оптимален (в смысле макси мума функции правдоподобия) именно для нормального закон распределения [2].

Второй причиной отклонения закона распределения от нор мального может являться косвенный характер измерений, т. е вместо интересующих нас величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут наблюдаться $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые функции от них, которые могут быть линеаризованы.

В-третьих, множественность состояний контролируемого объекта можно представить моделями, лишь часть которых соответствует гипотезе о нормальности ошибок измерения, а другие подчиняются иным законам распределения. В таких случаях необходимость применения алгоритма наименьших квадратов для всей совокупности состояний также представляется спорной. В связи с этим возникает задача об отыскании детерминированного алгоритма, более эффективного в смысле сведения к минимуму ошибок по совокупности состояний.

Наконец, четвертая причина неэффективности метода наименьших квадратов — его неэффективность при малом количестве наблюдений (асимптотическая эффективность оценок еще не означает их абсолютной эффективности). Поэтому в данном случае для получения гарантированного результата рекомендуется использовать алгоритмы, предлагаемые теорией игр (минимаксный алгоритм) [3].

Аналитически исследовать каждую из перечисленных проблем достаточно сложно; комплексное изучение еще сложнее. Тем не менее системный подход к проблеме повышения точности обработки наблюдений алгоритмическими методами требует начать именно с комплексного рассмотрения для выбора наиболее перспективных путей решения.

Целью данной работы является оценка эффективности различных алгоритмов применительно к выбранным модели и стратегиям природы (для упрощения задачи), а ориентировочными будут служить результаты вероятностного моделирования. В качестве модели была выбрана триангуляционная система измерений (косвенные наблюдения).

При определении местоположения объекта триангуляционным методом необходимо уравнивать измерения, когда неизвестные параметры $x_1$, $x_2$ (координаты объекта) подчинены линейному соотношению

$$\Delta_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $n$ — число измерителей пространственно-разнесённой системы местоопределения;

$a_{i1}$, $a_{i2}$, $b_i$ — коэффициенты, зависящие от результата измерения.

Как правило, число наблюдений оказывается больше двух. Поэтому решение системы (1) необходимо искать не алгебраически, а статистически, т. е. следует вычислить значения неизвестных параметров так, чтобы вся совокупность невязок $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ обладала некоторыми минимальными свойствами. Выбор вида такой совокупности можно обосновать с помощью метода максимального правдоподобия, однако при этом требуется сформулировать некоторые предположения. Невязки системы (1) не являются ошибками физического эксперимента, однако могут быть приближены к ним вследствие предположения о малости последних. В дальнейшем под ошибками измерений будем подразумевать невязки системы (1).

Пусть закон распределения ошибок измерений $\Delta_i$ сформулирован. Обозначим посредством $g_i(\Delta_i)$ функцию плотности $i$-й ошибки, а с помощью $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ — многомерную функцию плотности совместного распределения всей совокупности ошибок $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. В случае независимости ошибок измерений величина

$$L(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(\Delta_i). \qquad (2)$$

Функция $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ плотности совместного распределения ошибок измерения называется функцией правдоподобия. Набор $x_1$, $x_2$, который при заданных измерениях максимизирует функцию правдоподобия, именуется оценкой максимального правдоподобия.

Допустим, что ошибки измерения в (2) подчинены нормальному закону

$$g_i(\Delta_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (i = 1, \ldots, n).$$

В этом случае функция правдоподобия имеет вид

$$L = \prod g_i(\Delta_i) = \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}\Delta_i^2\right].$$

Очевидно, что $L$ достигает максимума при минимальной величине

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}\Delta_i^2. \qquad (3)$$

Таким образом, при нормальном законе распределения ошибок для получения оптимальных оценок следует минимизировать сумму квадратов невязок. Такие оценки называются оценками метода наименьших квадратов.

Для решения системы (1) методом наименьших квадратов подставим в (3) значения $\Delta_i$, выраженные через $x_1$, $x_2$:

$$\Phi = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_1)^2. \qquad (4)$$

Параметры $(x_1, x_2)$ из (4) определяются путем решения системы из двух линейных уравнений.

Оценки, полученные методом наименьших квадратов, можно считать оптимальными, если закон распределения ошибок измерения — нормальный. Рассмотренная в [1] модель процесса измерений построена для условий, когда в каждом конкретном случае известно лишь среднее значение дисперсии для всей совокупности измерений. В определенной обстановке такая модель может существовать, так как точность каждого конкретного измерения часто определяется принципиально непредсказуемыми внешними условиями, и в этом случае бывает известна лишь средняя дисперсия измерений. При сделанных предположениях распределение ошибок осуществляется по закону Лапласа [1]:

$$g(\Delta_i) = \frac{1}{2\sigma_i} \exp\left[-\frac{|\Delta_i|}{\sigma_i}\right].$$

В этом случае функция правдоподобия имеет вид

$$L = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2\sigma_i} \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i} |\Delta_i|\right].$$

Здесь $L$ достигает максимума, когда значение $\Phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i} |\Delta_i|$ минимально.

Введем дополнительные переменные $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ таким образом, чтобы $\frac{1}{\sigma_i} |\Delta_i| \leqslant y_i$, т. е. $y_i + \frac{1}{\sigma_i} \Delta_i \geqslant 0$ и $y_i - \frac{1}{\sigma_i} \Delta_i \geqslant 0$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда задача о минимизации функции $\Phi$ оказывается эквивалентной следующей задаче выпуклого кусочно-линейного программирования:

с помощью симплекс-метода ми имизировать функцию

$$z = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

при ограничениях

$$\gamma_i \equiv y_i + \frac{1}{\sigma_i} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i) \geqslant 0;$$

$$\gamma_i^* = y_i - \frac{1}{\sigma_i} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i) \geqslant 0,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Систему (1) можно также решить при условии минимизации функции $\Phi = \max_i |\Delta_i|$.

В этом случае получаем минимаксное решение, алгоритм нахождения которого также сводится к решению задачи симплекс-методом.

Перечисленные алгоритмы выбраны в качестве конкурирующих в условиях машинного эксперимента, методика и результаты которого приводятся ниже.

Количество измерителей в единичном опыте полагалось равным $n = [3, 4, \ldots, 10]$, т. е. избыточность наблюдений для двумерной задачи варьировалась от одного до восьми (малое количество наблюдений). Множественность состояний была обусловлена тем, что триангуляция проводилась для 21 точки, равномерно покрывающих область исходной неопределенности («район контроля»). Стратегии природы (законы распределения ошибок наблюдений) соответствовали схемам несмещенных равноточных и неравноточных измерений.

Для равноточных схем измерений действовали нормальный закон распределения ошибок со среднеквадратичным отклонением $\sigma_0$ и равномерный закон с тем же значением СКО.

Законы распределения для неравноточных схем измерений были получены в виде нормально обобщенного по среднеквадратичным отклонениям $\sigma_i$ нормального закона с плотностью

$$f(\varepsilon)_\sigma = \frac{1}{\pi\sigma_0}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right]d\sigma$$

с тем же значением $\sigma_0$ и нормально обобщенного по мере точности $h_i$ нормального закона, являющегося распределением Коши:

$$f(\varepsilon)_h = \frac{2h_0}{\pi}\int_0^\infty h\exp\left[-h^2\left(\varepsilon^2+h_0^2\right)\right]dh = \frac{h}{\pi\left(\varepsilon^2+h_0^2\right)},$$

где $h_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_0}$.

Координаты измерителей углов фиксировались относительно контролируемого района. Число реализаций данной стратегии на отдельную точку было равно десяти. По четырем стратегиям природы (законы распределения ошибок для равноточных и неравноточных схем измерений) при числе наблюдений от трех до десяти, 21 точке района неопределенности и десятикратном повторении каждого опыта общее количество прогенерированных реализаций составило $4 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 10 = 6\,720$. Результаты обработки этих реализаций тремя алгоритмами и вычисления ошибок приведены в таблице (каждое число представляет собой результат усреднения в условных единицах по 210 реализациям).

Таким образом, в условиях проведенного эксперимента наилучшим целесообразно признать, как это видно из таблицы, алгоритм наименьших модулей. Он показал самые низкие средние потери по сравнению с МНК — в 1,46 раза, а по сравнению с минимаксным — в 1,31 раза. Как вытекает и из физических соображений, закон распределения типа Коши оказался наименее благоприятной для данных алгоритмов стратегией природы; указанный алгоритм обработал его наилучшим образом.

| Номер модуля | Метод | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | наименьших квадратов | | | | наименьших модулей | | | | минимаксный | | | |
| | Н | Р | НН | Коши | Н | Р | НН | Коши | Н | Р | НН | Коши |
| 3 | 0,070 | 0,085 | 0,0612 | 0,197 | 0,1026 | 0,0803 | 0,0738 | 0,1657 | 0,07 | 0,0613 | 1,0652 | 0,1691 |
| 4 | 0,0532 | 0,060 | 0,0607 | 0,2214 | 0 0787 | 0,0915 | 0,0519 | 0,1767 | 0,058 | 0,071 | 0,0567 | 0,1979 |
| 5 | 0,058 | 0,0623 | 0,521 | 0,2068 | 0,086 | 0,0778 | 0,0434 | 0,1785 | 0,0632 | 0,0573 | 0,0455 | 0,2022 |
| 6 | 0,0507 | 0,0487 | 0,0549 | 0,2281 | 0,0629 | 0,0698 | 0,0481 | 0,1068 | 0,0466 | 0,0713 | 0,0549 | 0,1831 |
| 7 | 0,058 | 0,055 | 0,0549 | 0,2822 | 0,0671 | 0,0706 | 0,0387 | 0,1293 | 0,0512 | 0,0596 | 0,0552 | 0,2554 |
| 8 | 0,042 | 0,0497 | 0,0964 | 0,3118 | 0,0502 | 0,0463 | 0,0350 | 0,1153 | 0,0646 | 0,0475 | 0,0645 | 0,3115 |
| 9 | 0,050 | 0,0655 | 0,0439 | 0,3946 | 0,0555 | 0,0695 | 0,0434 | 0,1368 | 0,0585 | 0,0614 | 0,0609 | 0,3114 |
| 10 | 0,0442 | 0,0567 | 0,0679 | 0,6236 | 0,0526 | 0,0557 | 0,0372 | 0,092 | 0,0501 | 0,0542 | 0,0570 | 0,3617 |
| 11 | 0,0534 | 0,0603 | 0,0608 | 0,3081 | 0,0694 | 0,0702 | 0,0466 | 0,1413 | 0,0575 | 0,0603 | 0,0575 | 0,2540 |

При визуальной обработке многоугольников засечек (посредством выделения района наибольшей густоты точек пересечения линий положения) в условиях большой избыточности следует ожидать, что алгоритм наименьших модулей даст лучшие результаты, чем оператор.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Мудров В. И., Кушко В. Л. Метод наименьших модулей. М., «Знание», 1971. 72 с.
2. Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. М., Геодезиздат, 1947. 430 с.
3. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М., «Наука», 1971. 230 с.