УДК 519.7

Д. О. КОЛЕСНИКОВ, С. А. ПОСЛАВСКИЙ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Введение

Одной из важных задач теории интеллекта является задача идентификации понятий логики. Такая идентификация состоит из нескольких частей. Изначально, логическому понятию, соответствующим образом, сопоставляем некоторый предикат, заданный на определенной области определения. Потом определяем некоторую совокупность свойств, которые бы определяли это понятие, или, иными словами, находим некоторую аксиоматическую характеристику предиката, соответствующего данному понятию. По возможности, находим несколько аксиоматических характеристик. Они позволяют по-разному взглянуть на структуру идентифицируемого понятия. На заключительном этапе находим общий вид предиката, который извлекаем из некоторой его аксиоматической характеристики. Результаты идентификации понятий логики могут быть широко применены в бионике интеллекта. Также они могут служить в качестве отправной точки для последующей проверки соответствия этих понятий объектам реального мира. Такая проверка необходима для обоснования применения логических понятий при построении математических моделей объектов реального мира и, в частности, объектов физики информационных процессов, что имеет существенное значение для теории интеллекта.

В статье, в качестве идентифицируемых объектов, рассматриваются логические понятия, которыми пользуется в своей работе математик. Предпринята попытка идентификации следующих понятий логики: равенство элементов; равенство множеств; декартово произведение множеств; объединение, пересечение и дополнение множеств; связь между отношениями и отображениями. Формальное описание перечисленных понятий приходится вести, используя в качестве средства описания те же самые логические понятия. В связи с этим возникает опасность совершить ошибку логического круга. Защиту от этой опасности может обеспечить проверка фактической непротиворечивости получаемых результатов идентификации. Поэтому необходим постоянный и тщательный контроль доброкачественности формируемой теории логических понятий всеми доступными исследователю средствами.

Одной из важных мер, обеспечивающих эффективность идентификации, является четкое различение логических понятий, используемых в роли средства и объекта описания. Известный логик Клини во введении к курсу математической логики пишет [1]: “Итак, мы собираемся изучать логику, и притом с помощью математических методов. Но тут мы встречаемся с парадоксом: разве для того, чтобы *изучать* логику с помощью математики (да и вообще любым систематическим методом), нам не придется *пользоваться* самой логикой? Этот парадокс решается просто, но чтобы до конца понять, как это делается, потребуется некоторое время. Основная идея здесь состоит в том, что мы будем тщательно различать логику, которую мы изучаем, и логику, с помощью которой это делается. Но тогда нам придется различать и соответствующие языки: изучаемая нами логика формулируется на некотором языке, который мы будем называть *предметным языком* (или *языком-объектом*), поскольку этот язык так же как и связанная с ним логика – является предметом (объектом) нашего изучения. Язык же, в рамках которого мы исследуем предметный язык (употребляя при этом те логические средства, которые могут понадобиться), мы так и назовем *языком исследователя*. Соответственно можно говорить о *предметной* (или *объектной*) логике и *логике исследователя*. Необходимо все время помнить об этом различии между изучаемой (предметной) логикой и логикой как средством такого изучения (то есть логикой исследователя). Тому, кто не готов к этому, стоит сразу же закрыть эту книгу и подыскать себе другое занятие по вкусу (скажем, составление шарад или пчеловодство)". Формальное описание логических понятий будем вести на языке алгебры подстановочных операций [2]. Этот язык достаточно развит для того, чтобы на нем можно было беспрепятственно и в полном объеме описать простейшие логические понятия.

Актуальность идентификации логических понятий на ее начальном этапе зиждется на практической важности математической работы, для которой некоторые из логических понятий являются необходимым средством. На последующих этапах актуальность разработок будет постоянно поддерживаться необходимостью более глубокого обоснования результатов идентификации. Уровень надежности последних будет становиться все более высоким по мере развития теории логических понятий, однако он никогда не сможет достичь абсолютной достоверности. Можно ли на этом пути, дойти до любого конкретного логического понятия, или же некоторые из них окажутся недоступными и поэтому ни на каком этапе не смогут быть идентифицированы? Ответа на этот важный вопрос мы пока не знаем.

Логический инструментарий

Кратко охарактеризуем те логические понятия, которые используются в данной статье в качестве средств идентификации рассматриваемых понятий. Более подробно они описаны в работе [3]. Вводится конечное число *т предметных переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и их значения, которые черпаются из заранее выбранного универсума U. На *предметном пространстве*, представляющем собой декартову степень U^m универсума, определяются предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Предикаты записываются формулами алгебры предикатов с базисными элементами в виде *предикатов узнавания предмета*: $x_i^a = 1 \Leftrightarrow x_i = a$, $(i = \overline{1,m},\ a \in U)$ и базисными операциями дизъюнкции $\vee$, конъюнкции $\wedge$ и отрицания $\neg$. Введем рад сокращений, которые позволят сделать последующее изложение материала более компактным.

Между отношениями и предикатами существует естественная взаимно однозначная связь. Поэтому в дальнейшем будем совершать переходы от отношений к предикатам и обратно, особо их не обговаривая и подразумевая, что из записи будет понятно, где отношение, а где предикат. Произвольному множеству $M \subseteq U$, как отношению, соответствует предикат M(x), где $x \in U$, такой, что $M(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M$. Когда квантор берется по предметным переменным, заданным на универсуме, то там, где это приемлемо, универсум в ключе квантора будем опускать. Аналогично, если множество (отношение) включено в универсум (в предметное пространство), то универсум (или его декартову степень) в ключе квантора также будем опускать всюду где это будет удобным. Квантор существования и единственности определяем следующим образом: $\exists! xP(x) = \exists xP(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \supset D(x,y))$.

Равенство

Определение равенства не зависит ни от каких вводимых нами логических понятий. Оно опирается только на логический язык, то есть только на инструментальную логику. Поэтому приведем его в первую очередь. Введем предикат равенства P на $U \times U$ условием:

$$\forall x, y \in U(P(x,y) \approx \forall A \subseteq U(A(x) \approx A(y))). \tag{1}$$

Одно это условие образует полную систему аксиом для понятия равенства. В этом определении фигурирует инструментальное равенство в виде логической операции "$\approx$". Эта операция представляет собой равенство, заданное на множестве $\{0, 1\}$.

Теорема (об общем виде предиката равенства). *Уравнение (1) имеет единственное решение*

$$P(x,y) = \exists a \in U(x^a y^a). \tag{2}$$

Доказательство. Для того, чтобы доказать теорему достаточно показать, что $\forall A \subseteq U(A(x) \approx A(y)) = \exists a \in U(x^a y^a)$. Заиндексируем элементы универсума подходящим множеством индексов $I : U = \{a_j\}_{j \in I}$. Произвольному множеству A соответствует множество индексов $I_A \subseteq I$ тех элементов из которых состоит $A : A = \{a_j\}_{j \in I_A}$. В этом случае множеству А будет соответствовать предикат $A(x) = \bigvee_{j \in I_A} x^{a_j}$. Множеству $\overline{A}$ соответствует предикат $\overline{A}(x) = \bigvee_{j \in I \setminus I_A} x^{a_j}$. Проведем несложные выкладки :

$$\forall A(A(x) \approx A(y)) = \forall A(A(x)A(y) \vee \overline{A}(x)\overline{A}(y)) =$$
$$= \bigwedge_{I_A \subseteq I} ((\bigvee_{j \in I_A} x^{a_j})(\bigvee_{j \in I_A} y^{a_j}) \vee (\bigvee_{j \in I \setminus I_A} x^{a_j})(\bigvee_{j \in I \setminus I_A} y^{a_j}) =$$
$$= \bigwedge_{I_A \subseteq I} (\bigvee_{i,j \in I_A} x^{a_j} y^{a_j} \vee \bigvee_{i,j \in I \setminus I_A} x^{a_j} y^{a_j}) = \exists a \in U(x^a y^a).$$

В общем виде предиката равенства (2) фигурирует инструментальное равенство в виде предиката узнавания предмета x^a. Следует отметить, что аксиому (1) можно упростить, если квантор общности брать не по всем подмножествам универсума U, а только по одноэлементным:

$$\forall x, y \in U(P(x,y) \approx \forall \xi \in U(x^{\xi} \approx y^{\xi})). \tag{3}$$

Аксиома (3) эквивалентна аксиоме (1) в том смысле, что они обе однозначно определяют предикат равенства (2). После того, как установлена единственность предиката равенства, дадим ему индивидуальное имя $D(x, y)$. Этот предикат является уже предметным предикатом, который с помощью инструментальных средств охарактеризован аксиомами (1) или (3) и выражен в явном виде (2). В качестве полной несократимой системы аксиом для предиката равенства можно предложить так же систему, состоящую из рефлексивности и подстановочности предиката равенства:

$$\forall x \in UP(x,x), \tag{4}$$
$$\forall A \subseteq U \forall x, y \in U(A(x) \wedge P(x,y) \supset A(y)) \tag{5}$$

Для того, чтобы это доказать, достаточно показать, что система (4, 5) определяет предикат равенства и только его, и аксиомы (4 и 5) независимы. Независимость данных аксиом очевидна, так как тождественно ложный предикат удовлетворяет аксиоме (5) и не удовлетворяет аксиоме (4), если же взять тождественно истинный предикат, то ситуация будет обратной, отсюда и следует независимость аксиом. Пусть теперь для некоторого предиката P выполняются аксиомы (4 и 5). Их можно рассматривать как некоторые логические уравнения относительно неизвестного предиката P. Покажем, что единственным решением системы уравнений (4, 5) является предикат равенства (2). Решая уравнение (5) относительно неизвестного P, получим общее решение в виде $P(x,y) = \forall A(A(x) \supset A(y))C(x,y)$, где предикат $C(x, y)$ выступает в качестве свободного параметра [4]. Для того, чтобы определить предикат C подставим найденное решение в уравнение (4), получим

$$\forall x(\forall A(A(x) \supset A(x))C(x,x) = \forall xC(x,x),$$

то есть предикат C – должен быть рефлексивным. Выполняя несложные преобразования, окончательно получим

$$P(x,y) = \forall A(A(x) \sim A(y))C(x,y) = (\exists a \in Ux^a y^a) \wedge C(x,y) =$$
$$= \exists a \in U(x^a y^a \wedge C(x,y)) = \exists a \in U(x^a y^a \wedge C(a,a)) = \exists a \in Ux^a y^a.$$

Таким образом система аксиом (4, 5) эквивалентна аксиоме (1) и определяет предикат равенства.

Заметим, что равенство представляет собой частный случай эквивалентности, когда каждый класс эквивалентности содержит только один элемент. Поэтому можно привести следующую аксиоматическую характеристику предиката равенства:

$$\forall xP(x,x);\ \forall x,y(P(x,y) \sim P(y,x));\ \forall x,y,z(P(x,y) \wedge P(y,z) \supset P(x,z)); \tag{6}$$
$$\forall x\exists!\, yP(x,y) \tag{7}$$

Аксиомы (6) определяют P как эквивалентность, аксиома (7) "отвечает" за одноэлементность классов эквивалентности. Мы получили следующие различные аксиоматические характеристики равенства: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Декартово произведение

Декартово произведение является одной из основных общематематических конструкций. Оно, как и равенство, опирается только на инструментальную логику. Идентификацию декартова произведения начнем с идентификации понятия упорядоченной пары.

Будем рассматривать некоторый универсум U. Упорядоченная пара, как математическое понятие, вполне определяется двумя свойствами [5]: (*) для любых двух данных предметов $a,b \in U$ существует объект, который можно обозначить $\langle a,b \rangle$, называемый упорядоченной парой a и b и однозначно определяемый предметами a и b; (**) если $\langle a,b \rangle$ и $\langle b,c \rangle$ – две упорядоченные пары, то $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle$ в том и только в том случае, когда $a = c$ и $b = d$. В классической математике по разному эксплицируют такое абстрактное определение упорядоченной пары, например, $\langle a,b \rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$ [6], $\langle a,b \rangle = \{\{a\},\{b,\varnothing\}\}$ [7] и другие. Запишем предикат, соответствующий понятию упорядоченной пары $\langle a,b \rangle$ следующим образом: для любых $x, y \in U$

$$P(x,y) = x^a y^a \tag{8}$$

Множество, определяемое предикатом (8), является упорядоченной парой по определению, так как оно удовлетворяет необходимым свойствам (*) и (**). Действительно, любые два предмета a и b вполне однозначно определяют упорядоченную пару $\langle a,b \rangle$, так как по ним однозначно записывается предикат (8). Равенство двух пар $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle$ эквивалентно высказыванию $\forall x,y(x^a y^b \sim x^c y^d)$. После несложных преобразований приходим к следующему результату: $\forall x,y(x^a y^b \sim x^c y^d) = \forall x(x^a \sim x^c) \wedge \forall y(y^b \sim y^d) = D(a,c) \wedge D(b,d)$. То есть $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Для любых двух множеств A и B из 2^U их декартовым произведением называется множество $A \times B = \{<a,b>| a \in A, b \in B\}$. Предикат, соответствующий последнему множеству, имеет вид $(A \times B)(x,y) = \bigvee\limits_{a\in a,b\in B} x^a y^b = \exists a \in A, b \in B x^a y^b = (\exists a \in A x^a) \wedge (\exists b \in B y^b) = A(x) \wedge B(y)$. Следовательно, для того, чтобы записать предикат декартова произведения двух множеств из 2^U, достаточно взять конъюнкцию предикатов этих множеств, причем в предикатах должны фигурировать различные переменные. Таким образом, для любых $A, B \subseteq U$

$$(A \times B)(x,y) = A(x) \wedge B(y). \tag{9}$$

Определение (9) может выступать в качестве конструктивного определения декартова произведения двух множеств. Из вышеизложенного следует, что среди предикатов, заданных на U^2, существуют такие, которые соответствуют декартовому произведению некоторых множеств из 2^U. Совокупность таких предикатов можно задать аксиоматически следующим образом:

$$\forall x, y(P(x,y) \sim (\exists x P(x,y)) \wedge (\exists y P(x,y)). \tag{10}$$

Действительно, если для некоторого двухместного предиката выполняется (10), то $P(x,y) = A(x) \wedge B(y)$, где $A(x) = \exists y P(x,y), B(y) = \exists x P(x,y)$ и $P = A \times B$.

Обратно, пусть $P = A \times B$, тогда $P(x,y) = A(x) \wedge B(y)$, откуда $\exists x P(x,y) = (\exists x A(x)) \wedge B(y)$, $\exists y P(x,y) = A(x) \wedge (\exists y B(y))$.

Если $A, B \neq \varnothing$, то $\exists x P(x,y) = 1 \wedge B(y) = B(y)$, $\exists y P(x,y) = A(x) \wedge 1 = A(x)$ и выполняется (10), в противном случае $P(x,y) \equiv 0$ и для такого предиката аксиома (10) также выполняется. Назовем класс двухместных предикатов, удовлетворяющих аксиоме (10) декартовыми предикатами. Этот класс является подмножеством множества всех двухместных предикатов. Как было показано, тождественно ложный предикат является декартовым предикатом и для любого декартова предиката $P(x, y)$, отличного от тождественно ложного, существует единственным образом определяемая пара предикатов $A(x) = \exists y P(x,y)$ и $B(e) = \exists x P(x,y)$ такая, что $P(x,y) = A(x) \wedge B(y)$. Поэтому справедлива следующая теорема:

Теорема (об общем виде декартова произведения). *Для любого ненулевого декартова предиката P, заданного на $U \times U$ существует единственная пара предикатов A и B, заданных на U, таких, что для любых $x, y \in U$ $P(x,y) = A(x) \wedge B(y)$*

Исходя из введенного определения (10) можно доказать наиболее широко используемы свойства декартова произведения. Отдельного рассмотрения заслуживает свойство $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Декартово произведение обладает этим свойством в силу того, что соответствующие предикаты заданы на различных множествах. Если $U^* = U \times U$, то предикат $((A \times B) \times C)(\xi, z)$ задан на $U^* \times U$, а предикат $(A \times (B \times C))(x, \eta)$ задан на $U \times U^*$. Отсюда и следует справедливость постановки знака неравенства. Мы идентифицировали понятие декартова произведения таким, каким оно является по классическому определению множеством упорядоченных пар. Любая математическая конструкция, включающая в себя декартово произведение, в конечном итоге, базируется на понятии упорядоченной пары. Это и служит причиной того, что не выполняется свойство "сочетательности"

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \tag{11}$$

так как, его выполнение противоречило бы абстрактному определению упорядоченной пары.

Исходя из результатов идентификации понятия декартова произведения, естественно подойти к следующему его расширению: декартовым предикатом будем называть всякий предикат, представимый в виде конъюнкции двух и более предикатов меньшей размерности с непересекающимися наборами переменных. Для того, чтобы формально описать класс декартовых предикатов как подмножество множества всех многоместных предикатов, необходимо формализовать понятие набора переменных. Такая формализация довольно громоздка, поэтому приводить ее не будем. Укажем только на то, что получаются, как и в случае декартова произведения, конструктивное определение, подобное (9), и аксиоматическое определение, подобное (10). Конструктивное определение декартовых предикатов заключается в следующем. Если дана некоторая система множеств, то, записывая конъюнкцию соответствующих предикатов с непересекающимися наборами переменных, получим предикат, которому соответствует некоторое множество. Таким образом, декартовым предикатам поставлена в соответствие некоторая математическая конструкция которая является расширением понятия декартова произведения. Назовем эту конструкцию конъюнкцией на разных областях.

Существует множество аргументов в пользу того, что человеческий интеллект и сам физический мир имеют конъюнктивную структуру [3]. Исходя из этого, в качестве инструментальных средств для исследования структуры человеческого интеллекта и объектов реального мира должен выступать математический аппарат, соответствующим образом реализующий ее конъюнктивность. Здесь мы сталкиваемся с влиянием предмета описания на выбор инструмента описания. Хотя для описания объекта может быть успешно использован математического аппарат, структура которого далека от соответствия структуре этого объекта [8], тем не менее, преследуя цель познания устройства мира, мы, несомненно, должны отдавать предпочтение инструментальным средствам, которые в максимальной степени согласуются с таким устройством. Использование таких средств должно облегчить понимание особенностей структуры исследуемых объектов, и, в конечном итоге, служить катализатором открытий пока еще не известного. Так как устройство мира конъюнктивно, то для его описания, введенное понятие конъюнкции на различных областях более предпочтительнее, чем декартово произведение, именно в силу того, что последнее понятие в меньшей степени соответствует структуре описываемых с его помощью объектов, чем первое. Конъюнкция на разных областях может быть с успехом использована для описания любых объектов, структура которых ранее записывалась с привлечением классического декартова произведения.

Пример декартова предиката: $P(x, y, z, t) = A(x, y) \wedge B(z) \wedge C(t)$

Принадлежность элемента множеству

Отношение $x \in y$ *принадлежности элемента* $x \in A$ множеству $y \in B$ формально представляем предикатом $P(x, y)$ на $A \times B$, соответствующим этому отношению: $P(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \in y$. Объект у является множеством только в интерпретации. Теперь же это некоторый элемент множества B, совершенно не имеющий какойлибо своей структуры. Избавляться от структуры объектов, подвергаемых идентификации, это общий прием при идентификации объектов. Структура объекта – это как раз то, что мы хотим описать при идентификации. Если мы не освободим объект от структуры, то не сможем его описать. От объекта должно остаться только его имя.

Ниже приводится аксиоматическое определение элемента принадлежности множеству Оно состоит всего из одного условия, называемого *аксиомой выделения*:

$$\forall M \subseteq A \exists! y \in A(P(x, y) \sim M(x)) \tag{12}$$

Условие (12) связывает три предиката: A, B и P. Множества A и B – это параметры уравнения (12). Смысл аксиомы выделения состоит в следующем. Для каждого подмножества M множества A найдется в точности одно имя $y \in B$, такое что $M(x) = P(x, y)$. Таким образом, предикат $P(x, y)$ присваивает каждому подмножеству M множества A одно имя из числа элементов множества B. Разным множествам предикат P присваивает разные имена. Отсюда следует, что для любого предиката принадлежности P на $A \times B$ должно выполняться соотношение следующее соотношение между мощностями:

$$|B| = \left|2^A\right|. \tag{13}$$

Очевидно, что справедлива следующая теорема

Теорема (о связи множеств и их имен). *Пусть A некоторое множество, 2^A – система всех подмножеств множества A, B – система имен всех подмножеств множества A. Тогда каждому предикату принадлежности P на $A \times B$ однозначно соответствует некоторое биективное отображение φ: $2^A \to B$.*

Согласно этой теореме, отношение принадлежности Р каждому множеству ставит в соответствие в точности одно имя. В этом и только этом заключается роль отношения принадлежности: давать каждому множеству свое имя. Условие (12) можно рассматривать как абстрактное определение понятия принадлежности элемента множеству, отношения принадлежности $x \in y$ на $A \times B$. Аксиома выделения определяет не один, а много предикатов принадлежности. Каждому такому предикату соответствует своя биекция φ. Предикат принадлежности связан с соответствующим ему отношением принадлежности равносильностью: $P(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \in y,\ x \in A,\ y \in B$. Принадлежность связывает элемент не с множеством, а с именем множества. Множества это семантическая категория и им нет места в синтаксисе алгебры предикатов. Множества находятся за пределами формализма. Только решение логических уравнений дает множества.

Очевидно, что справедлива следующая теорема:

Теорема (об общем виде предиката принадлежности). *При любых $x \in A$ и $y \in B$ предикат принадлежности P выражается в виде:*

$$P(x, y) = \exists M \subseteq A(M(x) y^{\varphi(M)}), \tag{14}$$

где φ – некоторое биективное отображение 2^A на B.

Теорема (об изоморфности предикатов принадлежности). *Пусть P на $A \times B$ и P' на $A' \times B'$ предикаты принадлежности и $|A| = |A'|$. Тогда для любой биекции φ : $A \to A'$ существует биекция ψ: $B \to B'$, такая что для всех $x \in A$ и $y \in B$ $P(x, y) = P'(\varphi(x), \psi(y))$.*

Доказательство. Запишем абстрактно предикаты P и P':

$$P(x, y) = \exists M \subseteq A(M(x) y^{\wp(M)}), \quad P'(\xi, \eta) = \exists L \subseteq A' L(\xi) \eta^{\wp'(L)}.$$

Зададимся произвольной биекцией φ: $A \to A'$ и некоторой, пока еще не определенной, биекцией ψ: $B \to B'$. В этом случае можно записать

$P'(\xi, \eta) = P'(\varphi(x), \psi(y)) = \exists L \subseteq A' L(\varphi(x)) \psi(y)^{\wp'(L)}$. Построим отображение Φ: $2^A \to 2^{A'}$ следующим образом: для любого $M \in 2^A$ $\Phi(M) = \{\varphi(a) \mid a \in M\}$. Очевидно, что Φ – является биективным отображением, и для любых $L \in 2^{A'}$, $M \in 2^A$ $L = \Phi(M)$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in A\ (L(\varphi(x)) \sim M(x)$. Отсюда следует, что $P'(\varphi(x), \psi(y)) = \exists M \subseteq A\ M(x) \psi(y)^{\wp'(\Phi(M))}$.

Биекцию ψ: $B \to B'$ определим из соотношения $\forall M \subseteq A\ \ \forall y \in B\ \ (y^{\wp(M)} \sim \psi(y)^{\wp'(\Phi(M))}$, которое равносильно соотношению $\forall M \subseteq A\ \ (\psi(\wp(M)) \sim \wp'(\Phi(M)))$. Полагая $\wp(M) = b \in B$, получаем $\forall b \in B\ \ \psi(b) = \wp'(\Phi(\wp^{-1}(b)))$. То есть отображение ψ однозначно определяется отображением φ. Теорема доказана.

Теорема означает, что при фиксированной мощности множества А все принадлежности на $A \times B$ при любых A и B будут в абстрактном смысле одинаковы. Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Любые два предиката принадлежности P на A × B и P' на A × B' связаны зависимостью* $P(x, y)=P(x, \psi(y))$, *где* y*:* $B \to B'$ *биекция.*

Теорема (о равенстве элементов). *Предикат* $D_A(x_1, x_2)$ *на* $A \times A$*, определяемый условием*

$$\forall x_1,\ x_2 \in A(D_A(x_1,x_2) \sim \forall y \in B(P(x_2,y) \sim P(x_2,y))) \qquad (15)$$

является предикатом равенства на A при любом выборе множеств A и B, связанных условием $|B|=2^{|A|}$*, и произвольном выборе предиката принадлежности P.*

Доказательство. Для любого предиката принадлежности P на $A \times B$ и любых $x_1, x_2 \in A$, $y \in B$ справедливо $P(x_1, y) \sim P(x_2, y) = (x_1 \in M) \sim (x_2 \in M) = M(x_1) \sim M(x_2)$, где M – множество, которому предикат P присваивает имя y. Отсюда следует, что определение (15) предиката D_A совпадает с определением предиката равенства

$$\forall x_1,\ x_2 \in A(D_A(x_1,x_2) \sim \forall M \subseteq A(M(x_1) \sim M(x_2))).$$

Теорема доказана.

Иными словами, общее решение логического уравнения (15) имеет вид:

$$D_A(x_1,x_2) = \exists a \in A(x_1^a, x_2^a).$$

Видно, что это решение не зависит от выбора предиката P и множества B. Условие (15) можно принять в качестве абстрактного определения понятия равенства элементов.

Теорема (о равенстве множеств). *Предикат* $D_B(x_1, x_2)$ *на* $B \times B$*, определяемый условием*

$$\forall y_1,\ y_2 \in B(D_B(y_1,y_2) \sim \forall x \in A(P(x,y_1) \sim P(x,y_2))), \qquad (16)$$

является предикатом равенства на B при любом выборе множеств A и B, связанных условием $|B|=2^{|A|}$*, и произвольном выборе предиката принадлежности P.*

Условие (16) представляет собой ни что иное, как известную аксиому объемности теории множеств [6]. Содержательно, эту аксиому можно озвучить следующим образом: два множества совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их элементы. Из теоремы следует, что общее решение логического уравнения (16) имеет вид: $D_B(y_1,y_2) = \exists\ \ b \in B(y_1^b, y_2^b)$. Видно, что это решение не зависит от выбора предиката P и множества A. Условие (16) можно принять в качестве абстрактного определения понятия равенства множеств. Таким образом, мы формально описали понятие равенства множеств, являющихся подмножествами произвольно взятого множества A.

Теоретико-множественные операции

Введем аксиоматически предикаты, соответствующие понятиям теоретикомножественных операций объединения, пересечения и дополнения множеств. Будем рассматривать некоторое множество A и множество B, которое интерпретируем как систему имен подмножеств из A. Множества A и B должны быть согласованы по мощности: $|B| = 2^{|A|}$. Зададимся некоторым предикатом принадлежности $P(x, y)$ на $A \times B$.

Вводим предикат $R(y_1, y_2, y_3)$ на B^3, называемый предикатом объединения, который содержательно понимаем как операцию объединения множеств:

$$R(y_1, y_2, y_3) = 1 \Leftrightarrow Y_1 \cup Y_2 = Y_3,$$

где Y_1, Y_2, Y_3 – множества, имеющие, соответственно, имена y_1, y_2, y_3. Аксиоматическая характеристика предиката R будет следующая:

$$\forall y_1,\ y_2,\ y_3 \in B(R(y_1, y_2, y_3) \sim \forall x \in A((P(x_2, y_1) \vee P(x, y_2)) \sim P(x, y_3)) \qquad (17)$$

Вводим предикат $S(y_1, y_2, y_3)$ на B^3, называемый предикатом пересечения, который содержательно понимаем как операцию пересечения множеств:

$$S(y_1, y_2, y_3) = 1 \Leftrightarrow Y_1 \cap Y_2 = Y_3,$$

где Y_1, Y_2, Y_3 множества, имеющие, соответственно, имена y_1, y_2, y_3. Аксиоматическая характеристика предиката S будет следующая:

$$\forall y_1, y_2 \in B(T(y_1, y_2) \sim \forall x \in A(\overline{P}(x, y_1) \sim P(x, y_2)). \qquad (18)$$

Вводим предикат $T(y_1, y_2)$ на B^2, называемый предикатом дополнения, который содержательно понимаем как операцию дополнения множеств: $T(y_1, y_2, y_3) = 1 \Leftrightarrow \overline{Y_1} = Y_2$, где Y_1 и Y_2 множества, имеющие, соответственно, имена y_1 и y_2. Аксиоматическая характеристика предиката T будет следующая:

$$\forall y_1, y_2 \in B(T(y_1, y_2) \sim \forall x \in A(\overline{P}(x, y_1) \sim P(x, y_2)) \qquad (19)$$

Теорема (о функциональности предикатов объединения, пересечения и дополнения). *Для любых y_1, $y_2 \in B$ существует единственный $y_3 \in B$, такой что $R(y_1, y_2, y_3) = 1$. Для любых y_1, $y_2 \in B$ существует единственный $y_3 \in B$, такой что $S(y_1, y_2, y_3) = 1$. Для любого y_1 существует единственный $y_2 \in B$, такой что $T(y_1, y_2) = 1$.*

Доказательство. Абстрактно запишем предикат принадлежности:

$P(x, y) = \exists M \subseteq B\ \ M(x) y^{\varphi(M)}$, где φ – биекция из 2^A на B, соответствующая данному предикату P. Подставляя в определение (17), получим

$$R(y_1, y_2, y_3) = \forall x(\exists M \subseteq B\ \ M(x)(y_1^{\varphi(M)} \vee y_2^{\varphi(M)}) \sim P(x, y_3)).$$

Пусть y_1 и y_2 – некоторые фиксированные элементы из B. Тогда, очевидно,

$$\exists M \subseteq BM(x)(y_1^{\varphi(M)} \vee y_2^{\varphi(M)}) = (\varphi^{-1}(y_1))(x) \vee (\varphi^{-1}(y_2))(x) = M^*(x).$$

Множество $M^* \in 2^A$ однозначно определяется элементами y_1 и y_2. Получаем

$$R(y_1, y_2, y_3) = \forall x(M^*(x) \sim P(x, y_3)).$$

Отсюда следует, что элемент $y_3 = \varphi(M^*) = \varphi(\varphi^{-1}(y_1) \cup \varphi^{-1}(y_2))$ однозначно определяется по элементам y_1 и y_2. Аналогично доказывается функциональность предикатов пересечения и дополнения.

Связь отображений с предикатами

Рассмотрим произвольные множества A и B. Между отношениями на $A \times B$ и отображениями из A в 2^B существует взаимнооднозначное соответствие следующего вида. Пусть P некоторое отношение на $A \times B$, тогда ему соответствует отображение f: $A \to 2^B$, такое, что $f(x) = S_x = \{y \mid P(x, y) = 1\}$ для любого $x \in A$. Пусть, далее, множество C – некоторая система имен множеств из 2^B. Тогда отображение f формально зададим предикатом $F(x, z)$ на $A \times C$, который связывает элемент $x \in A$ с именем $z \in C$ множества S_x. Предикат F выражается через предикат P следующей формулой: $\forall x \in A,\ z \in C$

$$F(x, y) = \forall y \in B(P(x, y) \sim \prod(y, z)), \tag{20}$$

где P – предикат принадлежности на $B \times C$.

Выражение (20) можно использовать в качестве формального определения понятия отображения. Обратный переход от предиката F к предикату P описывается зависимостью: $\forall x \in A,\ y \in B$

$$P(x, y) = \exists z \in C(F(x, z) \sim \prod(y, z), \tag{21}$$

где Р – тот же предикат принадлежности, что и в (20).

Список литературы: 1. *Клини С.* Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Вища школа, 1987. 159 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х.: Вища школа, 1984. 142 с. 4. *Колесников Д.О.* О решении уравнений с неизвестным множеством // Радиотехника, 1999. Вып. 112. С. 8082. 5. *Столл Р.Р.* Множество. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 231 с. 6. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1969. 416 с. 7. *Целищев В.В.* Логическая истина и эмпиризм. Новосибирск: Наука, 1973. 112 с. 8. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984. 434 с.

Поступила в редколлегию 4.09.2000