

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Волков, Э. А. Чернин

Харьков

Статистическая обработка информации о характеристиках метановыделения и процентного содержания метана в шахтных выработках [1, 2] позволяет рассматривать процесс изменения концентрации метана в лаве как случайный, являющийся следствием многих случайно изменяющихся факторов. Исследованиями установлено [2], что этот процесс можно считать стационарным. Корреляционная функция изменения концентрации метана описывается уравнением

$$R_{ff}(\tau) = D_f e^{-a\tau}, \quad (1)$$

а соответствующая спектральная плотность, заданная в диапазоне положительных частот,

$$S_{ff}(\omega) = \frac{2aD_f}{\pi(a^2 + \omega^2)}. \quad (2)$$

Поскольку процессы изменения основного регулируемого параметра — концентрации метана случайные, возникают следующие задачи статистического анализа логической системы управления проветриванием шахты [3]:

1) определение точности процессов регулирования концентрации метана при случайном ее изменении;

2) определение устойчивости процессов регулирования с учетом случайной помехи концентрации метана, характеризующейся значениями R_{ff} , S_{ff} ;

3) анализ возможности фильтрации помехи.

Сложность решения поставленных задач обуславливается нелинейностью системы, ее многоконтурностью и особенно наличием логического устройства (ЛУ), осуществляющего изменение структуры системы управления путем отключения и подключения внутренних контуров обратных связей и главного контура регулирования.

Прежде чем приступить к рассмотрению сформулированных выше задач, необходимо остановиться на вопросе статистической линеаризации нелинейностей логической системы, в том числе ЛУ.

Структурная схема логической системы управления (рис. 1) состоит из следующих элементов:

1, 2 — пятипозиционные релейные датчики отклонения концентрации метана γ и координаты дросселя α за пределы зон нечувствительности γ_3 , α_3 и ограничения γ_0 , α_0 ;

γ^+ , γ^- , α^+ , α^- — сигналы датчиков об отклонениях γ , α за пределы зон нечувствительности;

γ_0^+ , γ_0^- , α_0^+ , α_0^- — сигналы датчиков о достижении этими параметрами соответствующих зон ограничения;

ЛУ — логическое устройство;

3 — дроссель с приводом, регулирующий дебит воздуха в i -й ветви вентиляционной сети 5;

4 — объект проветривания (шахтная выработка).

Согласно [4] заменим двухконтурную структурную схему логической системы (рис. 1) эквивалентной ей одноконтурной с введением условного эквивалентного нелинейного элемента (УЭНЭ), который объединяет релейные датчики 1, 2 и ЛУ и характеристика которого учитывает реальное существование внутренней обратной связи по координате дросселя и ее влияние на моменты переключений выходного релейного управляющего сигнала (U) ЛУ.

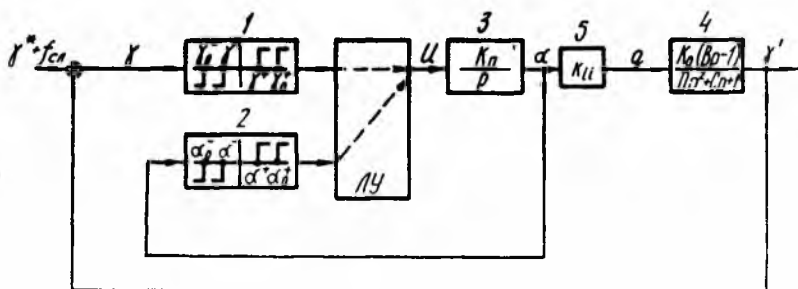


Рис. 1. Структурная схема логической системы управления.

Выберем логическую функцию ЛУ такой, чтобы характеристика УЭНЭ была бы петлевой с опережением [3]. Можно показать, что опережающая петлевая характеристика УЭНЭ необходима для обеспечения устойчивости преобразованной одноконтурной, а следовательно, и исходной структурных схем логической системы. Расчетная одноконтурная структурная схема логической системы управления приведена на рис. 2.

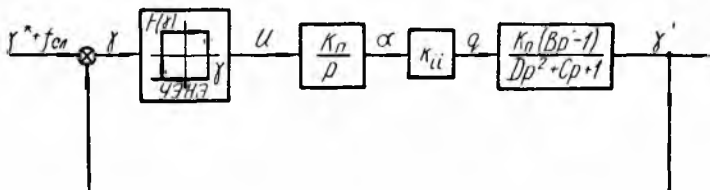


Рис. 2. Преобразованная структурная схема логической системы управления.

Таким образом, в данном случае статистическая линейаризация нелинейностей логической системы управления сводится к статистической линейаризации опережающей петлевой характеристики.

В соответствии с методом статистической линейаризации [5] заменим исходную нелинейную функцию $U = F(\gamma)$ УЭНЭ линейаризованной $Z(\gamma)$. Для обеспечения статистической равноценности обеих функций наложим условие минимума среднеквадратической ошибки при замене нелинейной функции $F(\gamma)$ линейной, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Z - U)^2 f(\gamma) d\gamma = \min. \quad (3)$$

Разложим переменную γ на две составляющие: математическое ожидание m_γ и случайную центрированную функцию $\gamma_{сл}$:

$$\gamma = m_\gamma + \gamma_{сл}. \quad (4)$$

Тогда можно величину $Z(\gamma)$ представить в виде

$$Z = K_m m_\gamma + K_x \gamma_{\text{сл}}, \quad (5)$$

где K_m — статистический коэффициент усиления УЭНЭ по полезному сигналу;

K_x — статистический коэффициент усиления УЭНЭ по флуктуациям концентрации метана.

Подставив значение Z в (3) и взяв частные производные по K_m и K_x , получим следующие экстремальные значения:

$$K_m = \frac{1}{m_\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) f(U) dU, \quad (6)$$

$$K_x = \frac{1}{D_\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma - m_\gamma) F(\gamma) f(\gamma) d\gamma. \quad (7)$$

При фильтрации высокочастотных составляющих нелинейного сигнала U с выхода ЛУ линейной частью системы можно неизвестную плотность вероятности $f(U)$ в уравнении (6) заменить известной плотностью вероятности распределения случайной величины γ на входе в УЭНЭ. В этом случае

$$K_m = \frac{1}{m_\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) f(\gamma) d\gamma. \quad (8)$$

Разобьем интеграл (8) на характерные участки, в пределах которых функция $F(\gamma)$ имеет постоянное значение, и возьмем усредненное значение интеграла [6] при обходе релейной петлевой характеристики (рис. 2) в положительном и отрицательном направлениях. За положительное направление обхода примем положительное направление оси γ петлевой характеристики. Тогда

$$K_m = \frac{U}{m_\gamma} \left[\Phi \left(\frac{\gamma_3 + m_\gamma}{\sigma_\gamma} \right) - \Phi \left(\frac{\gamma_3 - m_\gamma}{\sigma_\gamma} \right) \right], \quad (9)$$

где $\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Аналогично предыдущему разобьем интеграл (7) на характерные участки и определим

$$K_x = \frac{U}{\sigma_\gamma \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(\gamma_3 + m_\gamma)^2}{2\sigma_\gamma^2}} + e^{-\frac{(\gamma_3 - m_\gamma)^2}{2\sigma_\gamma^2}} \right]. \quad (10)$$

Проанализируем теперь точность логической системы при воздействии на нее случайных возмущений концентрации метана, которые в общем случае характеризуются величинами математического ожидания m_i и флуктуациями $f_{\text{сл}}$. В связи со стационарностью возмущений $m_i = \text{const}$ и его величина может быть скомпенсирована управляющим полезным сигналом γ^* , например соответствующей настройкой номинала датчика отклонения концентрации метана. Поэтому на систему фактически действуют управляющий постоянный сигнал γ^* (настроечное расчетное значение концентрации метана) и центрированная случайная функция $f_{\text{сл}}$.

Запишем уравнение замкнутой системы (рис. 2):

$$m_\gamma + \gamma_{\text{сл}} = \gamma^* + f_{\text{сл}} - \frac{K_0(Bp - 1)}{Dp^2 + Cp + 1} K_{ii} \frac{K_n}{p} (K_m m_\gamma + K_x \gamma_{\text{сл}}). \quad (11)$$

Уравнение (11) можно разбить на два: связывающее математическое ожидание концентрации метана и управляющий сигнал γ^* , связывающее случайные флуктуации концентрации метана $\gamma_{\text{сл}}$ с флуктуациями возмущения $f_{\text{сл}}$. Тогда из первого уравнения найдем связь $m_{\gamma'}$ и γ^* через передаточную функцию статистически линеаризованной системы по полезному сигналу:

$$m_{\gamma'} = \gamma^* \frac{K_m K_n K_{ii} K_0 (Bp - 1)}{p(Dp^2 + Cp + 1) + K_m K_n K_{ii} K_0 (Bp - 1)}, \quad (12)$$

а из второго уравнения — связь между $\gamma_{\text{сл}}$ и $f_{\text{сл}}$ через передаточную функцию статистически линеаризованной системы по флуктуациям:

$$\gamma_{\text{сл}} = f_{\text{сл}} \frac{K_x K_n K_{ii} K_0 (Bp - 1)}{p(Dp^2 + Cp + 1) + K_x K_n K_{ii} K_0 (Bp - 1)}. \quad (13)$$

Из уравнения (12) следует, что в установившемся режиме ($p = 0$) $m_{\gamma'} = \gamma^*$, т. е. статистически линеаризованная система управления является астатической.

Величина дисперсии $D_{\gamma'}$ концентрации метана γ' на выходе из объекта проветривания при прохождении случайной величины $f_{\text{сл}}$ через замкнутую систему с передаточной функцией (13) согласно [7] может быть определена по уравнению

$$D_{\gamma'} = \int_0^{\infty} S_{ff}(\omega) \left| \frac{K_x K_n K_{ii} K_0 (Bj\omega - 1)}{j\omega [D(j\omega)^2 + Cj\omega + 1] + K_x K_n K_{ii} K_0 (Bj\omega - 1)} \right|^2 d\omega. \quad (14)$$

Поскольку статистический коэффициент K_x , входящий в уравнение (14), зависит, как следует из (10), от математического ожидания $m_{\gamma'}$ и дисперсии $D_{\gamma'}$ концентрации метана на входе в УЭНЭ (рис. 2), то предварительно необходимо найти $m_{\gamma'}$ и $D_{\gamma'}$.

Величина $m_{\gamma'}$ может быть найдена из полученного выше значения $m_{\gamma'} = \gamma^*$. Тогда в установившемся режиме

$$m_{\gamma'} = \gamma^* - m_{\gamma'} = 0. \quad (15)$$

Для определения $D_{\gamma'}$ запишем передаточную функцию замкнутой системы для случайной составляющей концентрации метана $\gamma_{\text{сл}}$ на входе в УЭНЭ:

$$\gamma_{\text{сл}} = f_{\text{сл}} \frac{p(Dp^2 + Cp + 1)}{p(Dp^2 + Cp + 1) + K_x K_n K_{ii} K_0 (Bp - 1)}. \quad (16)$$

Тогда по аналогии с уравнением (14)

$$D_{\gamma'} = \int_0^{\infty} S_{ff}(\omega) \left| \frac{j\omega [D(j\omega)^2 + Cj\omega + 1]}{j\omega [D(j\omega)^2 + Cj\omega + 1] + K_x K_n K_{ii} K_0 (Bj\omega - 1)} \right|^2 d\omega. \quad (17)$$

Подставив в уравнение (17) значение $S_{ff}(\omega)$ согласно (2) и $p = j\omega$, получим

$$D_{\gamma'} = \frac{2aD_f}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega^6 D^2 + \omega^4 (C^2 - 2D) + \omega^2}{|D(j\omega)^3 + C(j\omega)^2 + (1 + K_x K_n K_{ii} K_0 B)j\omega - K_x K_n K_{ii} K_0|^2} d\omega. \quad (18)$$

Преобразовав $a^2 + \omega^2$ к виду $|a + j\omega|^2$ и введя под знак модуля в уравнении (18), запишем выражение

$$D_{\gamma'} = h \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega = hJ_4, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 h &= 2aD_f, \\
 G(\omega) &= \beta_0\omega^6 + \beta_1\omega^4 + \beta_2\omega^2 + \beta_3, \\
 H(j\omega) &= \gamma_0(j\omega)^4 + \gamma_1(j\omega)^3 + \gamma_2(j\omega)^2 + \gamma_3(j\omega) + \gamma_4, \\
 \beta_0 &= D^2, \\
 \beta_1 &= C^2 - 2D, \\
 \beta_2 &= 1, \quad \beta_3 = 0, \\
 \gamma_0 &= D, \\
 \gamma_1 &= C + aD, \\
 \gamma_2 &= 1 + aC + K_x K_n K_{ii} K_0 B, \\
 \gamma_3 &= a + K_x K_n K_{ii} K_0 (aB - 1), \\
 \gamma_4 &= -aK_x K_n K_{ii} K_0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

а интеграл $I_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega$ в случае, когда все корни операторного многочлена $H(j\omega)$ лежат в левой полуплоскости, имеет решение [8]

$$I_4 = \frac{\beta_0(-\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3) - \gamma_0\gamma_3\beta_1 + \gamma_0\gamma_1\beta_2 + \frac{\gamma_0\beta_3}{\gamma_4}(\gamma_0\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)}{2\gamma_0(\gamma_0\gamma_3^2 + \gamma_1^2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3)}. \tag{21}$$

Подставив в уравнение (19) значения h и I_4 , получим

$$D_f = aD_f \frac{\beta_0(-\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3) - \gamma_0\gamma_3\beta_1 + \gamma_0\gamma_1}{\gamma_0(\gamma_0\gamma_3^2 + \gamma_1^2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3)}, \tag{22}$$

где согласно уравнениям (20) коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ являются постоянными, а коэффициенты $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — функция $D(\gamma)$. В связи с этим уравнение (22) решается численными или графоаналитическими методами с учетом уравнений (20), (15), (10).

Определив D_f , находим K_x по уравнению (10) с учетом уравнения (15). По аналогии с уравнением (19) запишем

$$D_{f'} = h' I_4', \tag{23}$$

где

$$h' = D_f a K_x K_n K_{ii} K_0, \tag{24}$$

$$I_4' = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega, \tag{25}$$

$$G'(\omega) = 1 + \omega^2 B^2. \tag{26}$$

Тогда значение

$$I_4' = \frac{B^2\gamma_0\gamma_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_4}(\gamma_0\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)}{\gamma_0(\gamma_0\gamma_3^2 + \gamma_1^2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3)}, \tag{27}$$

а

$$D_{f'} = D_f a K_x K_n K_{ii} K_0 \frac{B^2\gamma_0\gamma_1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_4}(\gamma_0\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)}{\gamma_0(\gamma_0\gamma_3^2 + \gamma_1^2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3)}. \tag{28}$$

Таким образом, точность логической системы управления при случайных изменениях концентрации метана определяется уравнениями (12) и (28).

Численные расчеты величины D_+ по уравнению (28) показывают, что логическая система позволяет частично скомпенсировать случайные флуктуации концентрации метана, уменьшая величину D_+ по сравнению с D_i примерно в 2 раза.

ВЫВОДЫ

1. Преобразование многоконтурной логической системы в одноконтурную с УЭНЭ позволяет получить простые зависимости для определения точности логической системы при случайных изменениях концентрации метана.

2. Статистически линеаризованная логическая система управления является астатической.

3. Логическая система управления дает возможность частично скомпенсировать случайные флуктуации концентрации метана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Волков, В. П. Чуберкис. Характеристика случайных процессов, определяющих проветривание участка. «Технология и экономика угледобычи», 1965, № 2.

2. А. А. Волков, В. П. Чуберкис. Стационарность случайных процессов, определяющих проветривание добычного участка. «Технология и экономика угледобычи», 1965, № 7.

3. А. А. Волков, Э. А. Чернин. Об одном принципе построения самооптимизирующейся системы авторегулирования проветриванием шахты. «Приборы и системы автоматики», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

4. Э. А. Чернин. К вопросу расчета устойчивости двухконтурной релейной системы авторегулирования с логическим устройством. «Научно-техническая конференция, посвященная Дню радио». Изд. НТО им. А. С. Попова, Харьков, 1966.

5. И. Е. Казаков. Приближенный метод статистического исследования нелинейных систем. Труды ВВИА им. Жуковского, вып. 394, 1954.

6. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.

7. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применения к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.

8. Дж. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Изд-во иностр. лит., 1958.